Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione al Calcolo Numerico

Il Calcolo Numerico è una disciplina che fa parte di un ampio settore della Matematica Applicata che prende il nome di Analisi Numerica. Si tratta di una materia che è al confine tra la Matematica e l'Informatica poichè cerca di risolvere i consueti problemi matematici utilizzando però una via algoritmica. In pratica i problemi vengono risolti indicando un processo che, in un numero finito di passi, fornisca una soluzione numerica e soprattutto che sia implementabile su un elaboratore. I problemi matematici che saranno affrontati nelle pagine seguenti sono problemi di base: risoluzione di sistemi lineari, approssimazione delle radici di funzioni non lineari, approssimazione di funzioni e dati sperimentali, calcolo di integrali definiti. Tali algoritmi di base molto spesso non sono altro se non un piccolo ingranaggio nella risoluzione di problemi ben più complessi.

1.2 Elementi di Algebra Lineare

Assegnati due numeri interi positivi $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, si definisce matrice una tabella avente m righe ed n colonne. Se gli elementi della matrice sono numeri reali allora l'insieme delle matrici aventi m righe ed n colonne si indica con $\mathbb{R}^{m \times n}$. Per convenzione le matrici si indicano con lettere maiuscole dell'alfabeto latino. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora m ed n si dicono dimensioni della matrice. Se consideriamo due numeri interi $i, j \in \mathbb{N}$, tali che $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, questi identificano, rispettivamente, una riga ed una colonna della

matrice A, e l'elemento che si trova nella posizione (i, j) viene indicato con a_{ij}. Una matrice di dimensione $m \times n$ può essere rappresentata nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se $m = n$ allora la matrice A si dice quadrata di dimensione n o di ordine n altrimenti si dice rettangolare. Gli elementi a_{ij} di una matrice quadrata A di ordine n tali che $i = j$ sono detti elementi principali o diagonali e formano la cosiddetta diagonale principale di A.
Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si definisce matrice trasposta di A la matrice $B = A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tale che

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m.$$

Se accade che $A = A^T$ allora la matrice è detta simmetrica. Una matrice simmetrica deve essere ovviamente quadrata. Gli elementi di una matrice che si trovano al di sopra della diagonale principale sono detti sopradiagonali, mentre quelli che si trovano al di sotto della stessa diagonale principale sono detti sottodiagonali. Se una matrice ha tutti gli elementi sopradiagonali e sottodiagonali uguali a zero viene detta matrice diagonale. Se invece ha solo gli elementi sopradiagonali nulli allora viene detta triangolare inferiore. Se ha gli elementi sottodiagonali nulli allora è detta triangolare superiore.
Assegnate due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si definisce somma di A e B, e si denota con $C = A + B$, la matrice $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i cui elementi sono:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

In modo analogo si definisce la differenza tra matrici, infatti $D = A - B$ è la matrice avente elementi:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ allora la matrice $C = \alpha A$ è definita da:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Se $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ si definisce *prodotto* di A per B la matrice $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i cui elementi sono

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Si noti che affinchè tale prodotto abbia senso è necessario che il numero delle colonne di A coincida con il numero delle righe di B. Quando ciò accade le matrici si dicono conformabili, altrimenti si dicono non conformabili. Ad esempio nel nostro caso se $m \neq n$ allora il prodotto BA non ha senso. Ha sempre significato considerare i prodotti AB e BA se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine ($m = n$).
È facile verificare che il prodotto tra matrici gode della proprietà *associativa* ma in generale non di quella commutativa. Vale invece la seguente proprietà:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Esempio 1.2.1 *Siano A e B le seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $C = AB$. L'elemento c_{ij} è uguale alla somma dei prodotti degli elementi della $i-$esima riga di A per la $j-$esima colonna di B.

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 = 6 \\
c_{12} &= 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 4 \\
c_{13} &= 3\cdot (-1) + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = -2 \\
c_{21} &= -1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 = 0 \\
c_{22} &= -1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 \\
c_{23} &= -1\cdot (-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 4 \\
c_{31} &= 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 = 8 \\
c_{32} &= 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5 \\
c_{33} &= 3\cdot (-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcolando il prodotto $D = BA$ si trova invece:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui risulta evidente che $AB \neq BA$.

Si definisce matrice identità di ordine n la matrice quadrata diagonale I_n avente tutti gli elementi principali uguali a 1:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice identità è l'elemento neutro per il prodotto, cioè se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si ha

$$AI_n = I_n A = A.$$

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

dove $A_{11}, B_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $A_{12}, B_{12} \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$, $A_{21}, B_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$ e infine $A_{22}, B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, con $p < n$, rappresentano a loro volta matrici e non semplici elementi. Si dice cioè che A e B sono state suddivise a blocchi. Il prodotto AB può essere calcolato utilizzando tale decomposizione delle matrici:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Tale modo di effettuare il prodotto tra matrici viene detto prodotto a blocchi ed è molto utile quando le matrici hanno una particolare struttura (per esempio se uno dei blocchi è identicamente nullo oppure è uguale alla matrice identità). Per esempio se A e B sono matrici triangolari inferiori il blocco in posizione $(1, 2)$ è nullo perchè composto da elementi sopradiagonali, quindi le matrici possono essere divise nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Il loro prodotto a blocchi ha come risultato:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

evidenziando che il blocco $(1, 2)$ non va calcolato perchè identicamente nullo.

Definizione 1.2.1 *Una matrice che si ottiene da I_n scambiando alcune righe (o colonne) viene detta matrice di permutazione.*

Esempio 1.2.2 *Sia P la seguente matrice di permutazione:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che è stata ottenuta da I_3 scambiando la prima riga con la terza. Consideriamo la seguente matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

e calcoliamo il prodotto PA:

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La moltiplicazione a sinistra di una matrice di permutazione per A ha l'effetto di scambiare le righe di A esattamente nello stesso modo con cui erano state scambiate le righe dell'identità per ottenere P. Calcoliamo ora il prodotto AP:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Invece la moltiplicazione a destra di una matrice di permutazione per A ha l'effetto di scambiare le colonne di A.

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una matrice $B \in \mathbb{R}^{h\times k}$, $0 < h \leq m$, $0 < k \leq n$, è detta sottomatrice di A se è ottenuta da A eliminando $m - h$ righe ed $n - k$ colonne. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una sottomatrice quadrata B di ordine $k \leq n$ di A è detta principale se gli elementi principali di B sono anche gli elementi principali di A. Una sottomatrice B principale di ordine k di A è detta principale di testa se è formata dagli elementi a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, k$.

Definizione 1.2.2 *Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice di ordine 1, si definisce determinante di A il numero*

$$\det A = a_{11}.$$

Se la matrice A è quadrata di ordine n allora fissata una qualsiasi riga (colonna) di A, diciamo la i-esima (j-esima) allora applicando la cosiddetta regola di Laplace il determinante di A è:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Il determinante è pure uguale a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

cioè il determinante è indipendente dall'indice di riga (o di colonna) fissato. Se A è la matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Il determinante ha le seguenti proprietà:
1. Se A è una matrice triangolare o diagonale allora

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii};$$

2. $\det I = 1$;
3. $\det A^T = \det A$;
4. $\det AB = \det A \det B$ (Regola di Binet);
5. se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $\det \alpha A = \alpha^n \det A$;
6. $\det A = 0$ se una riga (o una colonna) è nulla, oppure una riga (o una colonna) è proporzionale ad un'altra riga (o colonna) oppure è combinazione lineare di due (o più) righe (o colonne) di A.
7. Se A è una matrice triangolare a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

con B e D matrici quadrate, allora

$$\det A = \det B \det D. \tag{1.1}$$

Una matrice A di ordine n si dice non singolare se il suo determinante è diverso da zero, in caso contrario viene detta *singolare*. Si definisce inversa di A la matrice A^{-1} tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Per quello che riguarda il determinante della matrice inversa vale la seguente proprietà:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Ricordiamo che se A, B e C sono matrici invertibili, in base alla regola di Binet, anche il loro prodotto è una matrice invertibile e risulta

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Vettori

Se $A \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (o $A \in \mathbb{R}^{1\times m}$), la matrice si riduce ad una sola colonna (o una sola riga) e viene detta vettore colonna (o riga) ad m elementi o componenti. Solitamente il termine vettore viene associato a vettori colonna e l'insieme dei vettori ad m componenti viene indicato con $\mathbb{R}^m$. Per le operazioni tra vettori valgono le stesse regole viste per le matrici, cioè la somma e la differenza sono possibili tra vettori dello stesso tipo e con lo stesso numero di componenti. Se $\mathbf{x}$ è un vettore colonna di m elementi allora $\mathbf{x}^T$ è un vettore riga sempre

di m elementi. Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è possibile definire il prodotto matrice per vettore nel seguente modo:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

quindi $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Non è possibile effettuare il prodotto $A\mathbf{x}^T$ perchè le dimensioni non sono compatibili.

Esempio 1.2.3 *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathbf{x}$ *il vettore*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il vettore prodotto $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$*:*

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 7 \\ y_2 &= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 7 \\ y_3 &= 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -2. \end{aligned}$$

Tra vettori sono consentite due tipi di prodotto:
1. prodotto interno;
2. prodotto esterno.

Il prodotto interno (o scalare), che viene spesso indicato come $(\cdot, \cdot)$, è definito nel seguente modo: siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha$$

e il risultato è un numero reale. Il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = 0$;
2. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
3. $(\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;

4. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})^T\mathbf{z} = \mathbf{x}^T\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

5. se $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ allora i due vettori si dicono ortogonali.

Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ allora il prodotto esterno viene definito nel seguente modo:

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$$

e il risultato è una matrice di dimensione $n \times m$ i cui elementi sono:

$$a_{ij} = x_i y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

Esempio 1.2.4 *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *i seguenti vettori:*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo prima il prodotto interno:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 7.$$

Osserviamo che tale operazione gode della proprietà commutativa, poichè $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 7$.
Per quello che riguarda il prodotto esterno, il risultato è la matrice

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ -3 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Tale prodotto non gode della proprietà commutativa, infatti:

$$B = \mathbf{y}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Infatti $B \neq A$, *anche se va osservato che* $B = A^T$.

Capitolo 2

L'insieme dei numeri macchina

2.1 Rappresentazione macchina dei numeri reali

Uno dei più importanti aspetti legati all'uso di algoritmi numerici per la soluzione di problemi matematici è l'affidabilità dei risultati ottenuti. I metodi descritti in questo capitolo funzionerebbero sempre bene (cioè fornirebbero risultati numericamente affidabili) se non si dovesse aver a che fare con una serie di problemi legati alla struttura dell'elaboratore che stiamo utilizzando. Un primo problema che ci troviamo ad affrontare è il modo con cui i numeri reali sono rappresentati nella memoria di un elaboratore. Giusto per rendersi conto delle difficoltà che si incontrano va osservato che i numeri reali sono infiniti mentre la memoria di un calcolatore ha una capacità finita. Una seconda osservazione consiste nel fatto che un numero reale ammette molteplici rappresentazioni. Per esempio il numero 12.47 può essere scritto in diversi modi

$$12.47 = 1.247 \times 10^1 = 0.1247 \times 10^2 = 1247 \times 10^{-2}.$$

Questa prima ambiguità viene risolta convenzionalmente utilizzando come rappresentazione la seguente:

$$x = segno(x)\ q \times 10^p$$

dove segno$(x) = \pm 1$, $q = 0.d_1d_2d_3 \ldots d_k \ldots$ è un numero reale positivo minore di 1 con le cifre d_i comprese tra 0 e 9 se si utilizza la rappresentazione in base 10, e si impone $d_1 \neq 0$, cioè

$$\frac{1}{10} \leq q < 1.$$

Lo stesso discorso si può ripetere scegliendo una qualsiasi base $\beta \in \mathbb{N}$, cioè

$$x = segno(x)\ q \times \beta^p, \qquad \text{dove} \quad q = 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k \dots$$

con le cifre d_i comprese tra 0 e $\beta - 1$, e $d_1 \neq 0$, cioè

$$\frac{1}{\beta} \leq q < 1.$$

Assegnato $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, l'espressione

$$x = segno(x)\ \beta^p \times 0.d_1 d_2 \dots d_k \dots$$

prende il nome di rappresentazione in base β di x. Il numero p viene detto esponente (o caratteristica), i valori d_i sono le cifre della rappresentazione, mentre $0.d_1 d_2 \dots d_k \dots$ si dice mantissa. Il numero x viene normalmente rappresentato con la cosiddetta notazione posizionale $x = segno(x)(.d_1 d_2 d_3 \dots) \times \beta^p$, che viene detta normalizzata. In alcuni casi à ammessa una rappresentazione in notazione posizionale tale che $d_1 = 0$, che viene detta denormalizzata. Quindi un qualunque numero reale $x \neq 0$ può essere rappresentato con infinite cifre nella mantissa. Inoltre come è noto l'insieme dei numeri reali ha cardinalità infinita. Poichè un elaboratore è dotato di memoria finita non è possibile memorizzare:
a) gli infiniti numeri reali
b) le infinite (in generale) cifre di un numero reale.
Risulta perciò importante stabilire dei criteri che permettano di rappresentare in macchina i numeri reali che è possibile rappresentare in modo da commettere il minimo errore possibile.
Assegnati i numeri $\beta, t, m, M \in \mathbb{N}$ con $\beta \geq 2$, $t \geq 1$, $m, M > 0$, si dice insieme dei numeri di macchina con rappresentazione normalizzata in base β con t cifre significative l'insieme:

$$\mathcal{F}(\beta, t, m, M) = \{ \quad x \in \mathbb{R} : \ x = \pm\beta^p \times 0.d_1 d_2 \dots d_t \text{ con } \ 0 \leq d_i \leq \beta - 1,$$

$$d_1 \neq 0, -m \leq p \leq M\} \cup \{0\}.$$

Infatti poichè zero sfugge alla rappresentazione in base normalizzata viene assegnato per definizione all'insieme $\mathcal{F}$. Normalmente lo zero viene rappresentato con mantissa nulla ed esponente $-m$.
Osserviamo che un elaboratore che abbia le seguenti caratteristiche:

- t campi di memoria per la mantissa, ciascuno dei quali può assumere β differenti configurazioni (e perciò può memorizzare una cifra d_i),

- un campo di memoria che può assumere $m + M + 1$ differenti configurazioni (e perciò può memorizzare i differenti valori p dell'esponente),
- un campo che può assumere due differenti configurazioni (e perciò può memorizzare il segno + o −),

è in grado di rappresentare tutti gli elementi dell'insieme $\mathcal{F}(\beta, t, m, M)$.
Assumiamo ora che $x \in \mathbb{R}$ e che abbia la seguente rappresentazione in base β:

$$x = segno(x)\ \beta^p \times 0.d_1 d_2 \dots d_t$$

con $d_1 \neq 0$ e $p \in [-m, M]$. Allora è evidente che $x \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ e pertanto verrà rappresentato esattamente su un qualunque elaboratore che utilizzi $\mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ come insieme dei numeri di macchina.
Assumiamo ora che $x \in \mathbb{R}$ ma $x \notin \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$. In questo caso si pone il problema di associare ad x un numero di macchina che lo rappresenti in modo da commettere il più piccolo errore possibile. Per risolvere questo problema facciamo innanzitutto, e solo per semplicità di esposizione, le seguenti ipotesi $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e β numero pari.
Distinguiamo quindi i seguenti casi:

a) $p \notin [-m, M]$. Se $p < -m$ allora x è più piccolo del più piccolo numero di macchina: in questo caso si dice che si è verificato un underflow (l'elaboratore interrompe la sequenza di calcoli e segnala con un messaggio l'underflow). Se $p > M$ allora vuol dire che x è più grande del più grande numero di macchina e in questo caso si dice che si è verificato un overflow (anche in questo caso l'elaboratore si ferma e segnala l'overflow).

b) $p \in [-m, M]$, $x = \beta^p \times 0.d_1 d_2, \dots d_t \dots$, ed esiste un $k > t$ tale che $d_k \neq 0$. Anche in questo caso poichè x ha più di t cifre significative $x \notin \mathcal{F}$. È però possibile rappresentare x mediante un numero in $\mathcal{F}$ con un'opportuna operazione di taglio delle cifre decimali che seguono la t-esima. In pratica i criteri di taglio sono i seguenti:

   1. troncamento di x alla t-esima cifra significativa

      $$\tilde{x} = \mathrm{tr}(x) = \beta^p \times 0.d_1 d_2 \dots d_t$$

   2. arrotondamento di x alla t-esima cifra significativa

      $$\tilde{x} = \mathrm{arr}(x) = \beta^p \times 0.d_1 d_2 \dots \tilde{d}_t$$

dove

$$\tilde{d}_t = \begin{cases} d_t + 1 & \text{se } d_{t+1} \geq \beta/2 \\ \\ d_t & \text{se } d_{t+1} < \beta/2. \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ e $\tilde{x}$ è la sua rappresentazione di macchina, chiameremo errore assoluto la quantità

$$E_a = |x - \tilde{x}|$$

mentre per $x \neq 0$ chiameremo errore relativo la quantità

$$E_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}.$$

Nel seguito assumeremo $x > 0$ e supporremo anche che la rappresentazione di x in $\mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ non dia luogo ad underflow o overflow.

Teorema 2.1.1 *Sia $x = \pm\beta^p \; 0.d_1 d_2 \ldots d_t \ldots$ tale che la sua rappresentazione macchina non dia luogo a fenomeni di underflow o overflow, allora risulta:*

$$|tr(x) - x| < \beta^{p-t}$$

$$|arr(x) - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{p-t}$$

dove il segno di uguaglianza vale se e solo se $d_{t+1} = \frac{\beta}{2}$ e $d_{t+i} = 0$ per $i \geq 2$.

Teorema 2.1.2 *Sia $x = \pm\beta^p \; 0.d_1 d_2 \ldots d_t \ldots$, $x \neq 0$, se $\tilde{x}$ è la sua rappresentazione di macchina cioè $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$, allora*

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| < u$$

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{\tilde{x}}\right| < u$$

dove

$$u = \begin{cases} \beta^{-t+1} & \text{se} \quad \tilde{x} = tr(x) \\ \\ \frac{1}{2}\beta^{-t+1} & \text{se} \quad \tilde{x} = arr(x). \end{cases}$$

La quantità u che interviene nel precedente teorema si chiama precisione di macchina o zero macchina. La rappresentazione di $x \in \mathbb{R}$ attraverso $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ si dice rappresentazione in virgola mobile di x o rappresentazione floating point, con troncamento se $\tilde{x} = \mathrm{tr}(x)$, con arrotondamento se $\tilde{x} = \mathrm{arr}(x)$.
Se $\tilde{x}$ è un'approssimazione di $x \in \mathbb{R}$ con un errore relativo minore di β^{1-t}, si dice che t cifre della rappresentazione in base β sono significative.
Un problema simile si presenta anche quando si effettuano delle operazioni aritmetiche su numeri reali. In fatti non è garantito, in generale, che un'operazione aritmetica su due numeri macchina fornisca come risultato un numero di macchina. Per esempio considerati $x = (.11)10^0$ e $y = (.11)10^{-2}$, $x, y \in \mathcal{F}(10, 2, m, M)$, si ha:

$$x + y = (.1111)10^0 \notin \mathcal{F}(10, 2, m, M)$$

Per poter realizzare la naturale ed importante Proprietà di chiusura di una operazione in un certo insieme risulta importante definire delle operazioni di macchina che permettano appunto di realizzare tale proprietà. Un requisito essenziale che si richiede nel costruire un'aritmetica di macchina è il seguente. Indicata con $\cdot$ una delle quattro operazioni aritmetiche $+, -, \times, \div$ e con $\odot$ la corrispondente operazione di macchina dev'essere:

$$x \odot y = (x \cdot y)(1 + \varepsilon), \qquad |\varepsilon| < u \tag{2.1}$$

per ogni $x, y \in \mathcal{F}(\beta, t, m, M)$ tali che $x \odot y$ non dia luogo ad overflow o underflow. Si può dimostrare che

$$x \odot y = \mathrm{tr}(x \cdot y)$$

e

$$x \odot y = \mathrm{arr}(x \cdot y)$$

soddisfano la (2.1) e dunque danno luogo ad operazioni di macchina. Le quattro operazioni così definite danno luogo alla aritmetica di macchina o aritmetica finita.
Si può dimostrare che per le operazioni di macchina non valgono alcune proprietà, come per esempio l'associatività dell'addizione e della moltiplicazione o la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione, che invece sono valide per le operazioni tra numeri reali.
Supponiamo ora di voler valutare la somma tra due numeri reali x e y. Siano

$fl(x)$ e $fl(y)$ rispettivamente le loro rappresentazioni di macchina. Vogliamo vedere quale è l'errore relativo che viene commesso dall'elaboratore quando calcola $x + y$.

$$\begin{aligned} fl(x) \oplus fl(y) &= [fl(x) + fl(y)](1 + \varepsilon) = \\ &= [x(1 + \varepsilon_x) + y(1 + \varepsilon_y)](1 + \varepsilon) = \\ &= (x + x\varepsilon_x + y - y\varepsilon_y)(1 + \varepsilon) = \\ &= (x + y) + (x + y)\varepsilon + x\varepsilon_x + y\varepsilon_y + x\varepsilon\varepsilon_x - y\varepsilon\varepsilon_y. \end{aligned}$$

Una maggiorazione per l'errore relativo è la seguente

$$\begin{aligned} \frac{|(fl(x) \oplus fl(y)) - (x + y)|}{|x + y|} \leq \; & |\varepsilon| + \frac{|x|}{|x + y|}(|\varepsilon_x| + |\varepsilon||\varepsilon_x|) + \\ & + \frac{|y|}{|x + y|}(|\varepsilon_y| + |\varepsilon||\varepsilon_y|). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se x e y hanno lo stesso segno risulta

$$\max(|x|, |y|) \leq |x + y|$$

e dalla (2.2) segue la maggiorazione

$$\frac{|(fl(x) \oplus fl(y)) - (x + y)|}{|x + y|} \leq 3u + O(u^2)$$

dove u è la precisione di macchina ed $O(u^2)$ indica la maggiorazione per i cosiddetti termini quadratici dell'errore, che sono trascurabili in quanto ogni singolo fattore è maggiorato dalla precisione di macchina.

Capitolo 3

Equazioni non Lineari

3.1 Introduzione

Le radici di un'equazione non lineare $f(x) = 0$ non possono, in generale, essere espresse esplicitamente e anche se ciò è possibile spesso l'espressione si presenta in forma talmente complicata da essere praticamente inutilizzabile. Di conseguenza per poter risolvere equazioni di questo tipo siamo obbligati ad utilizzare metodi numerici che sono, in generale, di tipo iterativo, cioè partendo da una (o in alcuni casi più) approssimazioni della radice, producono una successione x_0, x_1, $x_2, \ldots$, convergente alla radice. Per alcuni di questi metodi per ottenere la convergenza è sufficiente la conoscenza di un intervallo $[a, b]$ che contiene la soluzione, altri metodi richiedono invece la conoscenza di una buona approssimazione iniziale. Talvolta è opportuno utilizzare in maniera combinata due metodi, uno del primo tipo e uno del secondo.
Prima di analizzare alcuni metodi per l'approssimazione delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ diamo la definizione di molteplicità di una radice.

Definizione 3.1.1 *Sia $f \in \mathcal{C}^r([a, b])$ per un intero $r > 0$. Una radice α di $f(x)$ si dice di molteplicità r se*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^r} = \gamma, \qquad \gamma \neq 0, c \neq \pm\infty. \tag{3.1}$$

Se α è una radice della funzione $f(x)$ di molteplicità r allora risulta

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \qquad f^{(r)}(\alpha) = \gamma \neq 0.$$

3.1.1 Il Metodo di Bisezione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$, e sia $f(a)f(b) < 0$. Sotto tali ipotesi esiste sicuramente almeno un punto nell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione si annulla. L'idea alla base del Metodo di Bisezione (o metodo delle bisezioni) consiste nel costruire una successione di intervalli $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$, con $I_0 = [a_0, b_0] \equiv [a, b]$, tali che:

1. $I_{k+1} \subset I_k$;
2. $\alpha \in I_k$, $\forall k \geq 0$;
3. l'ampiezza di I_k tende a zero per $k \to +\infty$.

La successione degli I_k viene costruita nel seguente modo. Innanzitutto si pone

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$$

e si calcola il punto medio

$$c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Se $f(c_1) = 0$ allora $\alpha = c_1$, altrimenti si pone:

$$I_1 = [a_1, b_1] \equiv \begin{cases} a_1 = a_0 \quad b_1 = c_1 & \text{se } f(a_0)f(c_1) < 0 \\ \\ a_1 = c_1 \quad b_1 = b_0 & \text{se } f(a_0)f(c_1) > 0. \end{cases}$$

Ora, a partire da $I_1 = [a_1, b_1]$, si ripete la stessa procedura. In generale al passo k si calcola

$$c_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

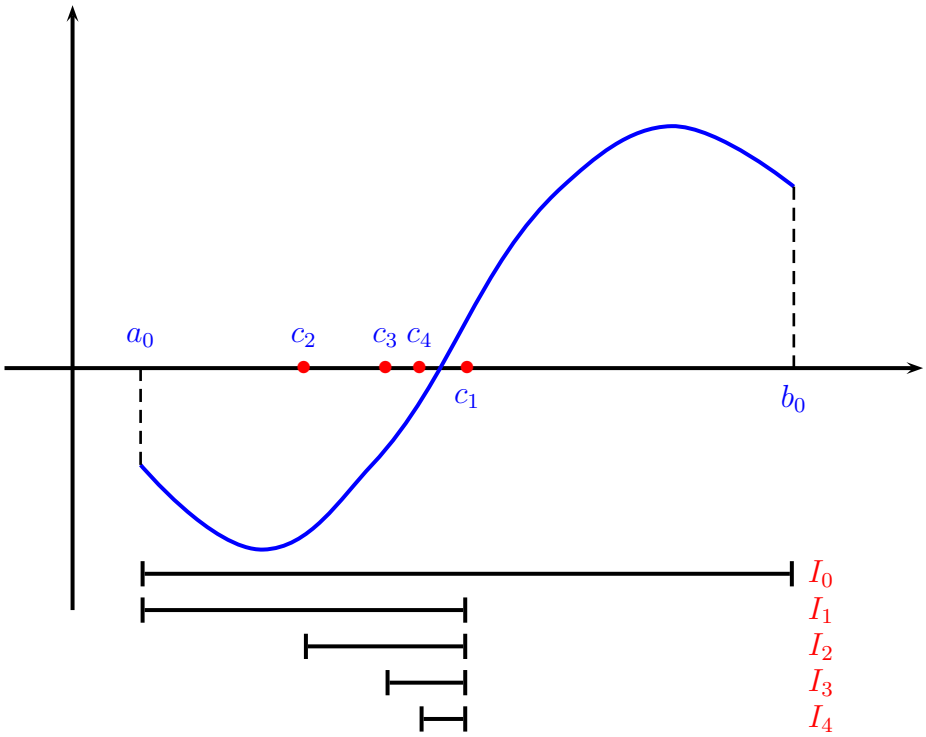
Se $f(c_{k+1}) = 0$ allora $\alpha = c_{k+1}$, altrimenti si pone:

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv \begin{cases} a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = c_k & \text{se } f(a_k)f(c_{k+1}) < 0 \\ \\ a_{k+1} = c_{k+1} \quad b_{k+1} = b_k & \text{se } f(a_k)f(c_{k+1}) > 0. \end{cases}$$

La successione di intervalli I_k così costruita soddisfa automaticamente le condizioni 1) e 2). Per quanto riguarda la 3) abbiamo:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

e dunque l'ampiezza di I_k tende a zero quando $k \to +\infty$.



Generalmente costruendo le successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ accade che la condizione $f(c_k) = 0$, per un certo valore k, non si verifica mai a causa degli errori di arrotondamento. Quindi è necessario stabilire un opportuno criterio di stop che ci permetta di fermare la procedura quando riteniamo di aver raggiunto una precisione soddisfacente. Per esempio si può imporre:

$$b_k - a_k \leq \varepsilon \tag{3.2}$$

dove ε è una prefissata tolleranza. La (3.2) determina anche un limite per il numero di iterate infatti:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} \leq \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad k > \log_2 \left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right).$$

Poichè $b_k - \alpha \leq b_k - a_k$, il criterio (3.2) garantisce che α è approssimata da c_{k+1} con un errore assoluto minore di ε. Se $0 \notin [a, b]$ si può usare come criterio di stop

$$\frac{b_k - a_k}{\min\left(|a_k|, |b_k|\right)} \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

che garantisce che α è approssimata da c_{k+1} con un errore relativo minore di ε. Un ulteriore criterio di stop è fornito dal test:

$$|f(c_k)| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

È comunque buona norma utilizzare due criteri di stop insieme, per esempio (3.2) e (3.4) oppure (3.3) e (3.4).

3.1.2 Il metodo della falsa posizione

Una variante del metodo delle bisezioni è appunto il metodo della falsa posizione. Partendo sempre da una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$, in questo caso si approssima la radice considerando l'intersezione della retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b.f(b))$ con l'asse x. L'equazione della retta è

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

pertanto il punto c_1, sua intersezione con l'asse x, è:

$$c_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

Si testa a questo punto l'appartenenza della radice α ad uno dei due intervalli $[a, c_1]$ e $[c_1, b]$ e si procede esattamente come nel caso del metodo delle bisezioni, ponendo

$$[a_1, b_1] \equiv \begin{cases} a_1 = a, \quad b_1 = c_1 & \text{se } f(a)f(c_1) < 0 \\ \\ a_1 = c_1, \quad b_1 = b & \text{se } f(a)f(c_1) > 0. \end{cases}$$

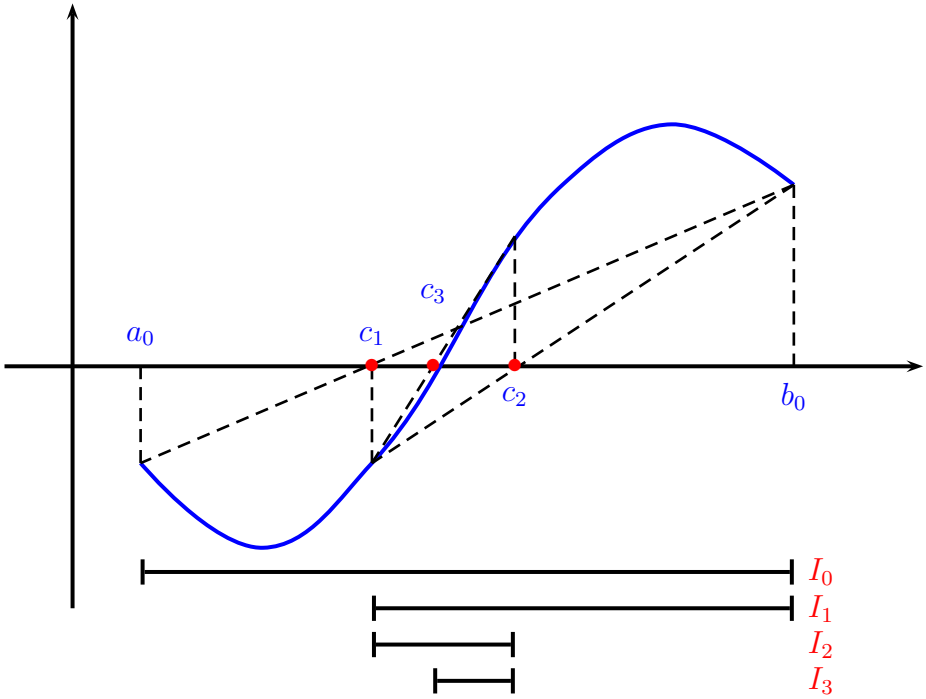
Ad un generico passo k si calcola

$$c_k = a_{k-1} - f(a_{k-1})\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}$$

e si pone

$$[a_k, b_k] \equiv \begin{cases} a_k = a_{k-1} \quad b_k = c_k & \text{se } f(a_{k-1})f(c_k) < 0 \\ \\ a_k = c_k \quad b_k = b_{k-1} & \text{se } f(a_{k-1})f(c_k) > 0. \end{cases}$$

Anche per questo metodo è possibile dimostrare la convergenza nella sola ipotesi di continuità della funzione $f(x)$. Nella seguente figura è rappresentato graficamente il metodo della falsa posizione.



3.2 Metodi di Iterazione Funzionale

Il metodo di bisezione può essere applicato ad una vastissima classe di funzioni, in quanto per poter essere applicato si richiede solo la continuità della funzione. Tuttavia ha lo svantaggio di risultare piuttosto lento, infatti ad ogni passo si guadagna in precisione una cifra binaria. Per ridurre l'errore di un decimo sono mediamente necessarie 3.3 iterazioni. Inoltre la velocità di convergenza non dipende dalla funzione $f(x)$ poichè il metodo utilizza esclusivamente il segno assunto dalla funzione in determinati punti e non il suo valore. Il metodo delle bisezioni può essere comunque utilizzato con profitto per determinare delle buone approssimazioni della radice α che possono essere utilizzate dai metodi iterativi che stiamo per descrivere.
Infatti richiedendo alla f supplementari condizioni di regolarità è possibile individuare una vasta classe di metodi che forniscono le stesse approssimazioni

del metodo di bisezione utilizzando però un numero di iterate molto minore. In generale questi metodi sono del tipo:

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

dove x_0 è un'assegnato valore iniziale e forniscono un'approssimazione delle soluzioni dell'equazione

$$x = g(x). \tag{3.6}$$

Ogni punto α tale che $\alpha = g(\alpha)$ si dice punto fisso o punto unito di g.
Per poter applicare uno schema del tipo (3.5) all'equazione $f(x) = 0$, bisogna prima trasformare questa nella forma (3.6). Ad esempio se $[a, b]$ è l'intervallo di definizione di f ed $h(x)$ è una qualunque funzione tale che $h(x) \neq 0$, per ogni $x \in [a, b]$, si può porre:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{h(x)}. \tag{3.7}$$

Ovviamente ogni punto fisso di g è uno zero di f e viceversa.

Teorema 3.2.1 *Sia $g \in \mathcal{C}([a, b])$ e assumiamo che la successione $\{x_k\}$ generata da (3.5) sia contenuta in $[a, b]$. Allora se tale successione converge, il limite è il punto fisso di g.*

Dimostrazione.

$$\alpha = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} g(x_k) = g(\lim_{k\to+\infty} x_k) = g(\alpha). \ \square$$

Teorema 3.2.2 *Sia α punto fisso di g e $g \in \mathcal{C}^1([\alpha - \rho, \alpha + \rho])$, per qualche $\rho > 0$. Scelto x_0 tale che*

$$|x_0 - \alpha| \leq \rho$$

per la successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generata da (3.5) si ha che se $|g'(x)| < 1$, per $|x - \alpha| \leq \rho$, allora $|x_k - \alpha| \leq \rho$, per ogni k, e la successione $\{x_k\}$ converge a α.

Dimostrazione. Sia

$$\lambda = \max_{|x-\alpha|\leq\rho} |g'(x)| < 1.$$

Proviamo per induzione che tutti gli elementi della successione $\{x_k\}$ sono contenuti nell'intervallo di centro α e ampiezza 2ρ. Per $k = 0$ si ha banalmente $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$. Assumiamo che $|x_k - \alpha| \leq \rho$ e dimostriamolo per $k + 1$.

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| = |g'(\xi_k)||x_k - \alpha|$$

dove $|\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha| \leq \rho$. Pertanto

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha| < |x_k - \alpha| \leq \rho.$$

Proviamo ora che:

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha.$$

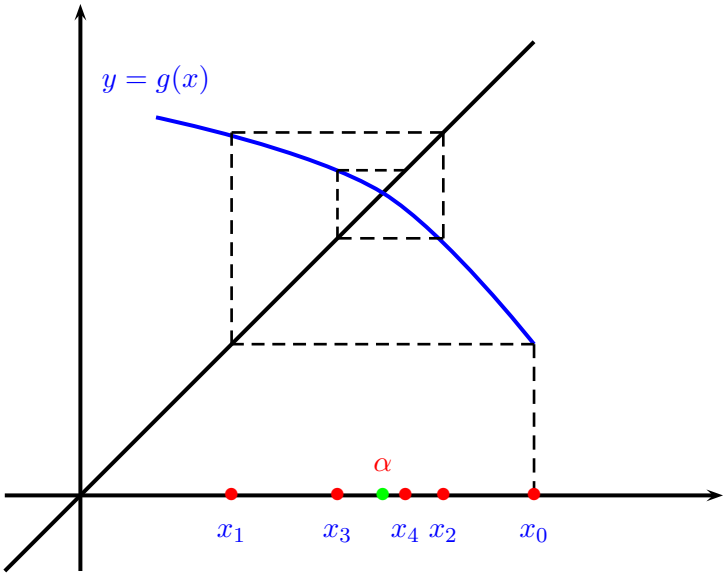
Da $|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|$ segue

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda^{k+1} |x_0 - \alpha|.$$

Conseguentemente qualunque sia x_0 si ha:

$$\lim_{k \to +\infty} |x_k - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha. \; \square$$

Nella seguente figura viene rappresentata l'interpretazione geometrica di un metodo di iterazione funzionale in ipotesi di convergenza.



Definizione 3.2.1 *Un metodo iterativo del tipo (3.5) si dice localmente convergente ad una soluzione α del problema $f(x) = 0$ se esiste un intervallo $[a, b]$ contenente α tale che, per ogni $x_0 \in [a, b]$, la successione generata da (3.5) converge a α.*

Una volta determinata una condizione sufficiente per la convergenza della successione $\{x_k\}$ ad un punto fisso di $g(x)$ si deve essere sicuri che tale punto fisso è unico. Infatti se, altre ad α esistesse anche $\beta \in [a, b]$ tale che $\beta = g(\beta)$, con $\alpha \neq \beta$, allora

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\xi)||\alpha - \beta|$$

con $\xi \in [a, b]$. Poichè $|g'(\xi)| < 1$ si ha:

$$|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

e ciò è assurdo.
Come abbiamo già visto nel caso del metodo delle bisezioni anche per metodi di iterazione funzionale è necessario definire dei criteri di arresto per il calcolo delle iterazioni. Teoricamente, una volta stabilita la precisione voluta, ε, si dovrebbe arrestare il processo iterativo quando l'errore al passo k

$$e_k = |\alpha - x_k|$$

risulta minore della tolleranza prefissata ε. In pratica l'errore non può essere noto quindi è necessario utilizzare qualche stima. Per esempio si potrebbe considerare la differenza tra due iterate consecutive e fermare il calcolo degli elementi della successione quando

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon,$$

oppure

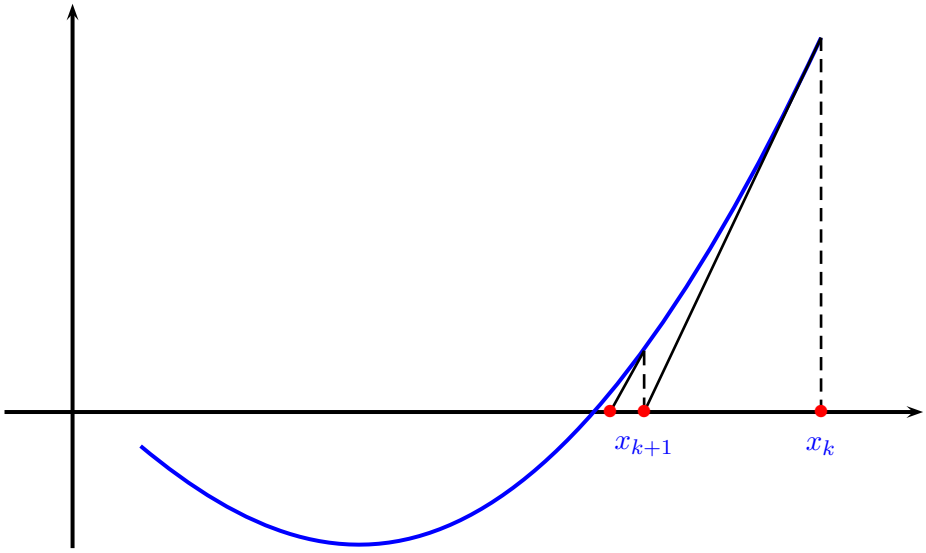
$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{\min(|x_{k+1}|, |x_k|)} \leq \varepsilon \qquad |x_{k+1}|, |x_k| \neq 0$$

se i valori hanno un ordine di grandezza particolarmente elevato. Una stima alternativa valuta il residuo della funzione rispetto al valore in α, cioè

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon.$$

3.2.1 Metodo di Newton-Raphson

Nell'ipotesi che f sia derivabile ed ammetta derivata prima continua allora un altro procedimento per l'approssimazione dello zero della funzione $f(x)$ è il metodo di Newton-Raphson, noto anche come metodo delle tangenti. Nella figura seguente è riportata l'interpretazione geometrica di tale metodo. A partire dall'approssimazione x_0 si considera la retta tangente la funzione f passante per il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Si calcola l'ascissa x_1 del punto di intersezione tra tale retta tangente e l'asse delle x e si ripete il procedimento a partire dal punto P_1 di coordinate $(x_1, f(x_1))$. Nella seguente figura è rappresentato graficamente il metodo di Newton-Raphson.



È facile vedere che il metodo definisce il seguente processo iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

che equivale, scegliendo in (3.7) $h(x) = f'(x)$, al metodo di iterazione funzionale in cui la funzione $g(x)$ è

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{3.9}$$

Per esaminare la convergenza del metodo consideriamo che per ipotesi $f'(x) \neq 0$, per $x \in [a, b]$, dove $[a, b]$ è un opportuno intervallo contenente α. Calcol-

iamo quindi la derivata prima di $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}. \tag{3.10}$$

Poichè α è semplice risulta $f'(\alpha) \neq 0$ e quindi:

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0$$

esiste quindi un intorno di α nel quale $|g'(x)| < 1$, per ogni x, e per il teorema (3.2.2) comunque si sceglie un punto iniziale appartenente a tale intorno il metodo di Newton-Raphson risulta convergente.

Il metodo della direzione costante

Se applicando ripetutamente la formula di Newton-Raphson accade che la derivata prima della funzione $f(x)$ si mantiene sensibilmente costante allora si può porre

$$M = f'(x)$$

e applicare la formula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M} \tag{3.11}$$

anzichè la (3.8). La (3.11) definisce un metodo che viene detto metodo di Newton semplificato oppure metodo della direzione costante in quanto geometricamente equivale all'applicazione del metodo di Newton in cui anzichè prendere la retta tangente la curva f si considera la retta avente coefficiente angolare uguale a M. La funzione iteratrice del metodo è

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{M}$$

ed il metodo è convergente se

$$|g'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{M}\right| < 1$$

da cui si deduce che è necessario che $f'(x)$ ed M abbiano lo stesso segno.

Capitolo 4

Metodi diretti per sistemi lineari

4.1 Introduzione

Siano assegnati una matrice non singolare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ed un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Risolvere un sistema lineare avente A come matrice dei coefficienti e $\mathbf{b}$ come vettore dei termini noti significa trovare un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{4.1}$$

Esplicitare la relazione (4.1) significa imporre le uguaglianze tra le componenti dei vettori a primo e secondo membro:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = \quad b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = \quad b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots+ & a_{nn}x_n = \quad b_n. \end{array} \tag{4.2}$$

Le (4.2) definiscono un sistema di n equazioni algebriche lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il vettore $\mathbf{x}$ viene detto vettore soluzione. Un metodo universalmente noto per risolvere il problema (4.1) è l'applicazione della cosiddetta Regola di Cramer la quale fornisce:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la sua i-esima colonna con il termine noto $\mathbf{b}$. Dalla (4.3) è evidente che per ottenere tutte le componenti

del vettore soluzione è necessario il calcolo di $n+1$ determinanti di ordine n. Si può facilmente dedurre che il numero di operazioni necessarie per il calcolo del determinate di una matrice di ordine n applicando la regola di Laplace è circa $n!$, quindi questa strada non permette di poter determinare velocemente la soluzione del nostro sistema. Basti pensare che se $n = 100$ il il numero di operazioni per il calcolo di un solo determinante sarebbe all'incirca dell'ordine di 10^{157}.

4.1.1 Risoluzione di sistemi triangolari

Prima di affrontare la soluzione algoritmica di un sistema lineare vediamo qualche particolare sistema che può essere agevolmente risolto. Assumiamo che il sistema da risolvere abbia la seguente forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1i}x_i & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & \dots & +a_{2i}x_i & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{ii}x_i & \dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \tag{4.4}$$

con $a_{ii} \neq 0$ per ogni i. In questo caso la matrice A è detta *triangolare superiore*. È evidente che in questo caso, la soluzione è immediatamente calcolabile. Infatti:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ \\ x_i = \dfrac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, \dots, 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Il metodo (4.5) prende il nome di metodo di sostituzione all'indietro, poichè il vettore $\mathbf{x}$ viene calcolato partendo dall'ultima componente. Anche per il

seguente sistema il vettore soluzione è calcolabile in modo analogo.

$$\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & & & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & & & & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & \dots & +a_{ii}x_i & & & = b_i \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{ni}x_i & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \tag{4.6}$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è triangolare inferiore e la soluzione viene calcolata con il metodo di sostituzione in avanti:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \\ x_i = \dfrac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Concludiamo questo paragrafo facendo alcune considerazioni sul costo computazionale dei metodi di sostituzione. Per costo computazionale di un algoritmo si intende il numero di operazioni che esso richiede per fornire la soluzione di un determinato problema. Nel caso di algoritmi numerici le operazioni che si contano sono quelle aritmetiche che operano su dati reali. Considerano per esempio il metodo di sostituzione in avanti osserviamo che per calcolare x_1 è necessaria una sola operazione (una divisione), per calcolare x_2 le operazioni sono tre (un prodotto, una differenza e una divisione), mentre il generico x_i richiede $2i-1$ operazioni ($i-1$ prodotti, $i-1$ differenze e una divisione), quindi indicato con $C(n)$ il numero totale di operazioni necessarie è:

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2,$$

sfruttando la proprietà che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.1.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

L'idea di base del metodo di Gauss è appunto quella di operare delle opportune trasformazioni sul sistema originale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, che non costino eccessivamente, e consentano di ottenere un sistema equivalente, che ammetta cioè la stessa soluzione, ma che sia di facile risoluzione, per esempio si può pensare di trasformare il sistema in uno triangolare superiore. Prima di descrivere il metodo di eliminazione di Gauss vediamo un esempio di come funziona. Supponiamo di dover risolvere il sistema:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & -1 \\ -6x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -4x_1 & -6x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & -3x_4 & = & 0. \end{array}$$

Il vettore soluzione di un sistema lineare non cambia se ad un'equazione viene sommata la combinazione lineare di un'altra equazione del sistema. L'idea alla base del metodo di Gauss è quella di ottenere un sistema lineare con matrice dei coefficienti triangolare superiore effettuando opportune combinazioni lineari tra le equazioni. Poniamo

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rispettivamente la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti del sistema di partenza. Calcoliamo un sistema lineare equivalente a quello iniziale ma che abbia gli elementi sottodiagonali della prima colonna uguali a zero. Azzeriamo ora l'elemento $a_{21}(1)$. Lasciamo inalterata la prima equazione. Poniamo

$$l_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-6}{2} = 3$$

e moltiplichiamo la prima equazione per l_{21} ottenendo:

$$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3.$$

La nuova seconda equazione sarà la somma tra la seconda equazione e la prima moltiplicata per l_{21}:

$$\begin{array}{rrrrl} -6x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = 1 \\ 6x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & = -3 \\ \hline & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -2 \quad [\texttt{Nuova seconda equazione}]. \end{array}$$

Prcediamo nello stesso modo per azzerare gli altri elementi della prima colonna. Poniamo

$$l_{31} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{-4}{2} = 2$$

e moltiplichiamo la prima equazione per l_{31} ottenendo:

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2.$$

La nuova terza equazione sarà la somma tra la terza equazione e la prima moltiplicata per l_{31}:

$$\begin{array}{rrrrll} -4x_1 & -6x_2 & -3x_3 & -x_4 & = 2 & \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = -2 & \\ \hline & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 & [\texttt{Nuova terza equazione}]. \end{array}$$

Poniamo ora

$$l_{41} = -\frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{2}{2} = -1$$

e moltiplichiamo la prima equazione per l_{41} ottenendo:

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la prima moltiplicata per l_{41}:

$$\begin{array}{rrrrll} 2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & -3x_4 & = 0 & \\ -2x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 1 & \\ \hline & -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & = 1 & [\texttt{Nuova quarta equazione}]. \end{array}$$

I numeri $l_{21}, l_{3,1}, \ldots$ sono detti moltiplicatori.
Al secondo passo il sistema lineare è diventato:

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -2 \\ & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ & -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & = 1. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono diventati:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo ora di azzerare gli elementi sottodiagonali della seconda colonna, a partire da a_{32}, usando una tecnica simile. Innanzitutto osserviamo che non conviene prendere in considerazione una combinazione lineare che coinvolga la prima equazione perchè avendo questa un elemento in prima posizione diverso da zero quando sommata alla terza equazione cancellerà l'elemento uguale a zero in prima posizione. Lasciamo quindi inalterate le prime due equazioni del sistema e prendiamo come equazione di riferimento la seconda. Poichè $a_{22}^{(2)} \neq 0$ poniamo

$$l_{32} = -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-4}{-1} = -4$$

e moltiplichiamo la seconda equazione per l_{32} ottenendo:

$$4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 8.$$

La nuova terza equazione sarà la somma tra la terza equazione e la seconda appena modificata:

$$\begin{array}{rrrll} -4x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 & \\ 4x_2 & +8x_3 & -4x_4 & = 8 & \\ \hline & 7x_3 & -5x_4 & = 8 & [\texttt{Nuova terza equazione}]. \end{array}$$

Poniamo

$$l_{42} = -\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-4}{-1} = -4$$

e moltiplichiamo la seconda equazione per l_{42} ottenendo:

$$4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 8.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la seconda appena modificata:

$$\begin{array}{rrrll} -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & = 1 & \\ 4x_2 & +8x_3 & -4x_4 & = 8 & \\ \hline & 14x_3 & -7x_4 & = 9 & [\texttt{Nuova quarta equazione}]. \end{array}$$

Al terzo passo il sistema lineare è diventato:

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -2 \\ & & 7x_3 & -5x_4 & = 8 \\ & & 14x_3 & -7x_4 & = 9. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono quindi

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Resta da azzerare l'unico elemento sottodiagonali della terza colonna. Lasciamo inalterate le prime tre equazioni del sistema. Poniamo

$$l_{43} = -\frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = -\frac{14}{7} = -2$$

e moltiplichiamo la terza equazione per l_{43} ottenendo:

$$-14x_3 + 10x_4 = -16.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la terza appena modificata:

$$\begin{array}{rrll} 14x_3 & -7x_4 & = -16 & \\ -14x_3 & +10x_4 & = 9 & \\ \hline & 3x_4 & = -7 & [\texttt{Nuova quarta equazione}]. \end{array}$$

Abbiamo ottenuto un sistema triangolare superiore:

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 \\ & & 7x_3 & -5x_4 & = 8 \\ & & & 3x_4 & = -7. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono diventati:

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Vediamo ora di calcolare le formule che consentano di calcolare gli elementi della matrice dei coefficienti e del vettore dei termini noti ad ogni passo del metodo di Gauss. Abbiamo detto che $A^{(1)}$ e $\mathbf{b}^{(1)}$ sono assegnati inizialmente, ipotizziamo per il momento che $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Calcoliamo ora gli stessi dati al passo 2 tenendo presente che:

1. La prima equazione del sistema resta invariata;
2. Gli elementi sottodiagonali della prima colonna di $A^{(2)}$ sono nulli;
3. La $i-$esima equazione del sistema ($i \geq 2$) è ottenuta sommando alla medesima equazione la prima moltiplicata per $-a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$.

Fissiamo quindi un'equazione i, $i \geq 2$, e calcoliamone i coefficienti $a_{ij}^{(2)}$ e $b_i^{(2)}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} & a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & a_{i3}^{(1)} & \dots & a_{ij}^{(1)} & \dots & a_{in}^{(1)} & b_i^{(1)} & + \\ -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\times & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} & = \\ \hline & 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & b_i^{(2)} & \end{array}$$

dove

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, \qquad i,j = 2,\dots,n$$

e

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}, \qquad i = 2,\dots,n.$$

Se ipotizziamo che $a_{22}^{(2)} \neq 0$ possiamo calcolare gli elementi del sistema al passo 3 tenendo presente che:

1. La prime 2 equazioni del sistema restano invariate;
2. Gli elementi sottodiagonali della prime 2 colonna di $A^{(3)}$ sono nulli;
3. La $i-$esima equazione del sistema ($i \geq 3$) è ottenuta sommando alla medesima equazione la seconda moltiplicata per $-a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$.

Fissiamo quindi un'equazione i, $i \geq 3$, e calcoliamone i coefficienti $a_{ij}^{(3)}$ e $b_i^{(3)}$:

$$\begin{array}{rccccccccc} & 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & b_i^{(2)} & + \\ -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\times & 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} & = \\ \hline & 0 & 0 & a_{i3}^{(3)} & \dots & a_{ij}^{(3)} & \dots & a_{in}^{(3)} & b_i^{(3)} & \end{array}$$

dove

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}, \qquad i,j = 3,\dots,n$$

e

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}, \qquad i = 3,\dots,n.$$

Avendo ricavato esplicitamente le formule per i primi due passi del metodo di Gauss è semplice ricavare quelle per un generico passo k. La matrice $A^{(k)}$ ha gli elementi sottodiagonali delle prime $k-1$ colonne uguali a zero, e, supposto $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, gli elementi di $A^{(k+1)}$ e di $\mathbf{b}^{(k+1)}$ sono quindi:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \qquad i,j = k+1,\dots,n \tag{4.7}$$

e

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, \qquad i = k+1,\dots,n. \tag{4.8}$$

Il valore di k varia da 1 (matrice dei coefficienti e vettori dei termini noti iniziali) fino a $n-1$, infatti la matrice $A^{(n)}$ avrà gli elementi sottodiagonali delle prime $n-1$ colonne uguali a zero.
Si può osservare che il metodo di eliminazione di Gauss ha successo se tutti gli elementi $a_{kk}^{(k)}$ sono diversi da zero, che sono detti elementi pivotali.
Un proprietà importante delle matrici $A^{(k)}$ è il fatto che le operazioni effettuate non alterano il determinante della matrice, quindi

$$\det A^{(k)} = \det A,$$

per ogni k. Poichè la matrice $A^{(n)}$ è triangolare superiore allora il suo determinante può essere calcolato esplicitamente

$$\det A^{(k)} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}.$$

Quello appena descritto è un modo, alternativo alla regola di Laplace per calcolare il determinante della matrice A.

4.1.3 Costo Computazionale del Metodo di Eliminazione di Gauss

Cerchiamo ora di determinare il costo computazionale (cioè il numero di operazioni aritmetiche) richiesto dal metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare di ordine n. Dalle relazioni

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, \qquad i = k+1, \ldots, n,$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \qquad i, j = k+1, \ldots, n$$

è evidente che servono 3 operazioni per calcolare $b_i^{(k+1)}$ (noto $b_i^{(k)}$) mentre sono necessarie che solo 2 operazioni per calcolare $a_{ij}^{(k+1)}$ (noto $a_{ij}^{(k)}$), infatti il moltiplicatore viene calcolato solo una volta. Il numero di elementi del vettore dei termini noti che vengono modificati è pari ad $n-k$ mentre gli elementi della matrice cambiati sono $(n-k)^2$ quindi complessivamente il numero di operazioni per calcolare gli elementi al passo $k+1$ è:

$$2(n-k)^2 + 3(n-k)$$

Pertanto per trasformare A in $A^{(n)}$ e $\mathbf{b}$ in $\mathbf{b}^{(n)}$ è necessario un numero di operazioni pari ala somma, rispetto a k, di tale valore

$$f(n) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1}(n-k).$$

Sapendo che

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ed effettuando un opportuno cambio di indice nelle sommatorie risulta

$$f(n) = 2\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] + 3\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n.$$

A questo valore bisogna aggiungere le n^2 operazioni aritmetiche necessarie per risolvere il sistema triangolare superiore ottenendo

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

che è un valore molto inferiore rispetto alle $n!$ operazioni richieste dalla regola di Cramer, applicata insieme alla regola di Laplace.

4.1.4 Strategie di Pivoting per il metodo di Gauss

Nell'eseguire il metodo di Gauss si è fatta l'implicita ipotesi (vedi formule (4.7) e (4.8)) che gli elementi pivotali $a_{kk}^{(k)}$ siano non nulli per ogni k. In vero questa non è un'ipotesi limitante in quanto la non singolarità di A permette, con un opportuno scambio di righe in $A^{(k)}$, di ricondursi a questo caso. Infatti scambiare due righe in $A^{(k)}$ significa sostanzialmente scambiare due equazioni nel sistema $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$ e ciò non altera la natura del sistema stesso.
Consideriamo la matrice $A^{(k)}$ e supponiamo $a_{kk}^{(k)} = 0$. In questo caso possiamo scegliere un elemento sottodiagonale appartenente alla $k-$esima colonna diverso da zero, supponiamo $a_{ik}^{(k)}$, scambiare le equazioni di indice i e k e continuare il procedimento perchè in questo modo l'elemento pivotale è diverso da zero. In ipotesi di non singolarità della matrice A possiamo dimostrare tale elemento diverso da zero esiste sicuramente. Infatti supponendo che, oltra all'elemento pivotale, siano nulli tutti gli $a_{ik}^{(k)}$ per $i = k+1, \ldots, n$, allora $A^{(k)}$ ha la seguente struttura:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \ldots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & 0 & a_{k,k+1}^{(k)} & & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)}. \end{bmatrix}$$

Se partizioniamo $A^{(k)}$ nel seguente modo

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

con $A_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ allora il determinante di $A^{(k)}$ è

$$\det A^{(k)} = \det A_{11}^{(k)} \det A_{22}^{(k)} = 0$$

perchè la matrice $A_{22}^{(k)}$ ha una colonna nulla. Poichè tutte la matrici $A^{(k)}$ hanno lo stesso determinante di A, dovrebbe essere $\det A = 0$ e questo contrasta con l'ipotesi fatta. Quindi possiamo concludere che se $a_{kk}^{(k)} = 0$ e $\det A \neq 0$ deve necessariamente esistere un elemento $a_{ik}^{(k)} \neq 0$, con $i \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$. Per evitare che un elemento pivotale possa essere uguale a zero si applica una delle cosiddette strategie di pivoting. La strategia di Pivoting parziale prevede che prima di fare ciò si ricerchi l'elemento di massimo modulo tra gli elementi $a_{kk}^{(k)}$, $a_{k+1,k}^{(k)}$, $\ldots$, $a_{nk}^{(k)}$ e si scambi la riga in cui si trova questo elemento con la k-esima qualora esso sia diverso da $a_{kk}^{(k)}$. In altri termini il pivoting parziale richiede le seguenti operazioni:

1. determinare l'elemento $a_{rk}^{(k)}$ tale che
$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k\leq i\leq n} |a_{ik}^{(k)}|;$$
2. effettuare lo scambio tra la r-esima e la k-esima riga.

In alternativa si può adottare la strategia di Pivoting totale che è la seguente:

1. determinare gli indici r, s tali che
$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)}|;$$
2. effettuare lo scambio tra la r-esima e la k-esima riga e tra la s-esima e la k-esima colonna.

La strategia di pivoting totale è senz'altro migliore perchè garantisce maggiormente che un elemento pivotale non sia un numero piccolo (in questa eventualità potrebbe accadere che un moltiplicatore sia un numero molto grande) ma richiede che tutti gli eventuali scambi tra le colonne della matrice siano memorizzati. Infatti scambiare due colonne significa scambiare due incognite del vettore soluzione pertanto dopo la risoluzione del sistema triangolare per ottenere il vettore soluzione del sistema di partenza è opportuno permutare le componenti che sono state scambiate.

4.1.5 La Fattorizzazione *LU*

Supponiamo di dover risolvere un problema che richieda, ad un determinato passo, la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e di utilizzare il metodo di Gauss. La matrice viene resa triangolare superiore e viene risolto il sistema triangolare

$$A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}. \tag{4.9}$$

Ipotizziamo che, nell'ambito dello stesso problema, dopo un certo tempo sia necessario risolvere il sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

i cui la matrice dei coefficienti è la stessa mentre è cambiato il termine noto. Appare chiaro che non è possibile sfruttare i calcoli gia fatti in quanto il calcolo del vettore dei termini noti al passo n dipende dalle matrici ai passi precedenti all'ultimo, quindi la conoscenza della matrice $A^{(n)}$ è del tutto inutile. È necessario pertanto applicare nuovamente il metodo di Gauss e risolvere il sistema triangolare

$$A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{c}^{(n)}. \tag{4.10}$$

L'algoritmo che sarà descritto in questo paragrafo consentirà di evitare l'eventualità di dover rifare tutti i calcoli (o una parte di questi). La Fattorizzazione *LU* di una matrice stabilisce, sotto determinate ipotesi, l'esistenza di una matrice L triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1 e di una matrice triangolare superiore U tali che $A = LU$.
Vediamo ora di determinare le formule esplicite per gli elementi delle due matrici. Fissata la matrice A, quadrata di ordine n, imponiamo quindi che risulti

$$A = LU.$$

Una volta note tali matrici il sistema di partenza $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ viene scritto come

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

e, posto $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, il vettore $\mathbf{x}$ viene trovato prima risolvendo il sistema triangolare inferiore

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

e poi quello triangolare superiore

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Imponiamo quindi che la matrice A ammetta fattorizzazione LU:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ l_{i1} & \dots & l_{i,i-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{n,i-1} & l_{n,i} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & \dots & u_{1j} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2j} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u_{jj} & \dots & u_{jn} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Deve essere

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}u_{kj} \qquad i,j = 1,\dots,n. \tag{4.11}$$

Considerando prima il caso $i \leq j$, uguagliando quindi la parte triangolare superiore delle matrici abbiamo

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \qquad j \geq i \tag{4.12}$$

ovvero

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ii}u_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + u_{ij} \qquad j \geq i$$

infine risulta

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \qquad j \geq i \tag{4.13}$$

e ovviamente $u_{1j} = a_{1j}$, per $j = 1,\dots,n$. Considerando ora il caso $j < i$, uguagliando cioè le parti strettamente triangolari inferiori delle matrici risulta:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj} \qquad i > j \tag{4.14}$$

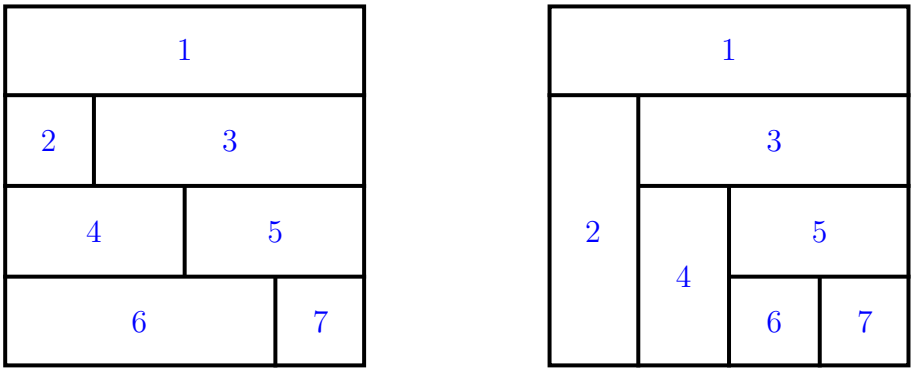
ovvero

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij}u_{jj} \qquad i > j$$

da cui

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right) \qquad i > j. \tag{4.15}$$

Si osservi che le formule (4.13) e (4.15) vanno implementate secondo uno degli schemi riportati nella seguente figura.



Tecnica di Crout **Tecnica di Doolittle**

Ogni schema rappresenta in modo stilizzato una matrice la cui parte triangolare superiore indica la matrice U mentre quella triangolare inferiore la matrice L mentre i numeri indicano l'ordine con cui gli elementi saranno calcolati. Per esempio applicando la tecnica di Crout si segue il seguente ordine:

- 1^o Passo: Calcolo della prima riga di U;
- 2^o Passo: Calcolo della seconda riga di L;
- 3^o Passo: Calcolo della seconda riga di U;
- 4^o Passo: Calcolo della terza riga di L;
- 5^o Passo: Calcolo della terza riga di U;

- 6^o Passo: Calcolo della quarta riga di L;
- 7^o Passo: Calcolo della quarta riga di U;

e così via procedendo per righe in modo alternato. Nel caso della tecnica di Doolittle si seguono i seguenti passi:

- 1^o Passo: Calcolo della prima riga di U;
- 2^o Passo: Calcolo della prima colonna di L;
- 3^o Passo: Calcolo della seconda riga di U;
- 4^o Passo: Calcolo della seconda colonna di L;
- 5^o Passo: Calcolo della terza riga di U;
- 6^o Passo: Calcolo della terza colonna di L;
- 7^o Passo: Calcolo della quarta riga di U.

La fattorizzazione LU è un metodo sostanzialmente equivalente al metodo di Gauss, infatti la matrice U che viene calcolata coincide con la matrice $A^{(n)}$. Lo svantaggio del metodo di fattorizzazione diretto risiede essenzialmente nella maggiore difficoltà, rispetto al metodo di Gauss, di poter programmare una strategia di pivot. Infatti se un elemento diagonale della matrice U è uguale a zero non è possibile applicare l'algoritmo.

Capitolo 5

Interpolazione e Quadratura

5.1 Introduzione

Nel campo del Calcolo Numerico si possono incontrare diversi casi nei quali è richiesta l'approssimazione di una funzione (o di una grandezza incognita):
1) non è nota l'espressione analitica della funzione $f(x)$ ma si conosce il valore che assume in un insieme finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si potrebbe pensare anche che tali valori siano delle misure di una grandezza fisica incognita valutate in differenti istanti di tempo.
2) Si conosce l'espressione analitica della funzione $f(x)$ ma è così complicata dal punto di vista computazionale che è più conveniente cercare un'espressione semplice partendo dal valore che essa assume in un insieme finito di punti. In questo capitolo analizzeremo un particolare tipo di approssimazione di funzioni cioè la cosiddetta interpolazione che richiede che la funzione approssimante assume in determinate ascisse esattamente lo stesso valore di $f(x)$. In entrambi i casi appena citati è noto, date certe informazioni supplementari, che la funzione approssimante va ricercata della forma:

$$f(x) \simeq g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n). \tag{5.1}$$

Se i parametri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono definiti dalla condizione di coincidenza di f e g nei punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, allora tale procedimento di approssimazione si chiama appunto Interpolazione. Invece se $x \notin [\min_i x_i, \max_i x_i]$ allora si parla di *Estrapolazione*. Tra i procedimenti di interpolazione il più usato è

quello in cui si cerca la funzione g in (5.1) nella forma

$$g(x; a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x)$$

dove $\Phi_i(x)$, per $i = 0, \ldots, n$, sono funzioni fissate e i valori di a_i, $i = 0, \ldots, n$, sono determinati in base alle condizioni di coincidenza di f con la funzione approssimante nei punti di interpolazione (detti anche nodi), x_j, cioè si pone

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x_j) \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Il processo di determinazione degli a_i attraverso la risoluzione del sistema (5.2) si chiama metodo dei coefficienti indeterminati. Il caso più studiato è quello dell'interpolazione polinomiale, in cui si pone:

$$\Phi_i(x) = x^i \qquad i = 0, \ldots, n$$

e perciò la funzione approssimante g assume la forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i;$$

mentre le condizioni di coincidenza diventano

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Se i nodi x_j sono distinti allora la matrice dei coefficienti del sistema (5.3) è non singolare quindi il problema dell'interpolazione ammette sempre un'unica soluzione. Descriviamo ora un modo alternativo di risolvere il problema di interpolazione in grado di fornire l'espressione esplicita del polinomio cercato.

5.1.1 Il Polinomio Interpolante di Lagrange

Al fine di dare una forma esplicita al polinomio interpolante, scriviamo il candidato polinomio nella seguente forma:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x) f(x_k) \tag{5.4}$$

dove gli $l_{nk}(x)$ sono per il momento generici polinomi di grado n. Imponendo le condizioni di interpolazione

$$L_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

deve essere, per ogni i:

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x_i) f(x_k) = f(x_i)$$

ed è evidente che se

$$l_{nk}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases} \tag{5.5}$$

allora esse sono soddisfatte. In particolare la prima condizione di (5.5) indica che $l_{nk}(x)$ si annulla negli n nodi $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ e quindi deve avere la seguente struttura:

$$l_{nk}(x) = c_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)$$

mentre impondendo la seconda condizione di (5.5)

$$l_{nk}(x_k) = c_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i) = 1$$

si trova immediatamente:

$$c_k = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}.$$

In definitiva il polinomio interpolante ha la seguente forma:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) f(x_k). \tag{5.6}$$

Il polinomio (5.6) prende il nome di Polinomio di Lagrange mentre i polinomi:

$$l_{nk}(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}; \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

si chiamano Polinomi Fondamentali di Lagrange.

5.1.2 Il Resto del Polinomio di Lagrange

Assumiamo che la funzione interpolata $f(x)$ sia di classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ e valutiamo l'errore che si commette nel sostituire $f(x)$ con $L_n(x)$ in un punto $x \neq x_i$. Supponiamo che l'intervallo $[a, b]$ sia tale da contenere sia i nodi x_i che l'ulteriore punto x. Sia dunque

$$e(x) = f(x) - L_n(x)$$

l'errore (o resto) commesso nell'interpolazione della funzione $f(x)$. Poichè

$$e(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \qquad i = 0, \ldots, n$$

è facile congetturare per $e(x)$ la seguente espressione:

$$e(x) = c(x)\omega_{n+1}(x)$$

dove

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

è il cosiddetto polinomio nodale mentre $c(x)$ è una funzione da determinare. Definiamo ora la funzione

$$\Phi(t; x) = f(t) - L_n(t) - c(x)\omega_{n+1}(t)$$

dove t è una variabile ed x è un valore fissato. Calcoliamo la funzione $\Phi(t; x)$ nei nodi x_i:

$$\Phi(x_i; x) = f(x_i) - L_n(x_i) - c(x)\omega_{n+1}(x_i) = 0$$

e anche nel punto x:

$$\Phi(x;x) = f(x) - L_n(x) - c(x)\omega_{n+1}(x) = e(x) - c(x)\omega_{n+1}(x) = 0$$

pertanto la funzione $\Phi(t;x)$ (che è derivabile con continuità $n+1$ volte poichè $f(x)$ è di classe $\mathcal{C}^{n+1}$) ammette almeno $n+2$ zeri distinti. Applicando il teorema di Rolle segue che $\Phi'(t;x)$ ammette almeno $n+1$ zeri distinti. Riapplicando lo stesso teorema segue che $\Phi''(t;x)$ ammette almeno n zeri distinti. Così proseguendo segue che

$$\exists \xi_x \in [a,b] \;\; \ni' \;\; \Phi^{(n+1)}(\xi_x;x) = 0.$$

Calcoliamo ora la derivata di ordine $n+1$ della funzione $\Phi(t;x)$, osservando innanzitutto che la derivata di tale ordine del polinomio $L_n(x)$ è identicamente nulla. Pertanto

$$\Phi^{(n+1)}(t;x) = f^{(n+1)}(t) - c(x)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\omega_{n+1}(t).$$

Calcoliamo la derivata di ordine $n+1$ del polinomio nodale. Osserviamo innanzitutto che

$$\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i) = t^{n+1} + p_n(t)$$

dove $p_n(t)$ è un polinomio di grado al più n. Quindi

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\omega_{n+1}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}t^{n+1}.$$

Poichè

$$\frac{d}{dt}t^{n+1} = (n+1)t^n$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}t^{n+1} = (n+1)nt^{n-1}$$

è facile dedurre che

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}t^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\omega_{n+1}(t) = (n+1)!.$$

Pertanto

$$\Phi^{(n+1)}(t;x) = f^{(n+1)}(t) - c(x)(n+1)!$$

e quindi

$$\Phi^{(n+1)}(\xi_x; x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(x)(n+1)! = 0$$

cioè

$$c(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

e in definitiva

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{5.7}$$

Esempio 5.1.1 *Supponiamo di voler calcolare il polinomio interpolante di Lagrange passante per i punti* $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,-1)$, $(3,2)$ *e* $(5,6)$. *Il grado di tale polinomio è* 4, *quindi definiamo i nodi*

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 5,$$

cui corrispondono le ordinate che indichiamo con y_i, $i = 0, \ldots, 4$*:*

$$y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = 6.$$

Scriviamo ora l'espressione del polinomio $L_4(x)$*:*

$$L_4(x) = l_{4,0}(x)y_0 + l_{4,1}(x)y_1 + l_{4,2}(x)y_2 + l_{4,3}(x)y_3 + l_{4,4}(x)y_4 \tag{5.8}$$

e calcoliamo i 5 *polinomi fondamentali di Lagrange:*

$$\begin{aligned} l_{4,0}(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-0)(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \\ &= \frac{1}{48}\ x(x-1)(x-3)(x-5) \\ l_{4,1}(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}{(0+1)(0-1)(0-3)(0-5)} = \\ &= -\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) \\ l_{4,2}(x) &= \frac{(x+1)(x-0)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-0)(1-3)(1-5)} = \\ &= \frac{1}{16}x(x+1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$l_{4,3}(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-5)} =$$

$$= -\frac{1}{48}x(x+1)(x-1)(x-5)$$

$$l_{4,4}(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-0)(5-1)(5-3)} =$$

$$= \frac{1}{240}x(x+1)(x-1)(x-3)$$

Sostituendo in (5.8) il valore della funzione nei nodi si ottiene l'espressione finale del polinomio interpolante:

$$L_4(x) = -l_{4,0}(x) + l_{4,1}(x) - l_{4,2}(x) + 2l_{4,3}(x) + 6l_{4,4}(x).$$

Se vogliamo calcolare il valore approssimato della funzione $f(x)$ in un'ascissa diversa dai nodi, per esempio $x = 2$ allora dobbiamo calcolare il valore del polinomio interpolante $L_4(2)$.
Nelle figure 5.1-5.5 sono riportati i grafici dei cinque polinomi fondamentali di Lagrange: gli asterischi evidenziano il valore assunto da tali polinomi nei nodi di interpolazione. Nella figura 5.6 è tracciato il grafico del polinomio interpolante di Lagrange, i cerchi evidenziano ancora una volta i punti di interpolazione.

5.2 Formule di Quadratura di Tipo Interpolatorio

Siano assegnati due valori a, b, con $a < b$, ed una funzione f integrabile sull'intervallo (a, b). Il problema che ci poniamo è quello di costruire degli algoritmi numerici che ci permettano di valutare, con errore misurabile, il numero

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Diversi sono i motivi che possono portare alla richiesta di un algoritmo numerico per questi problemi.
Per esempio pur essendo in grado di calcolare una primitiva della funzione f, questa risulta così complicata da preferire un approccio di tipo numerico.

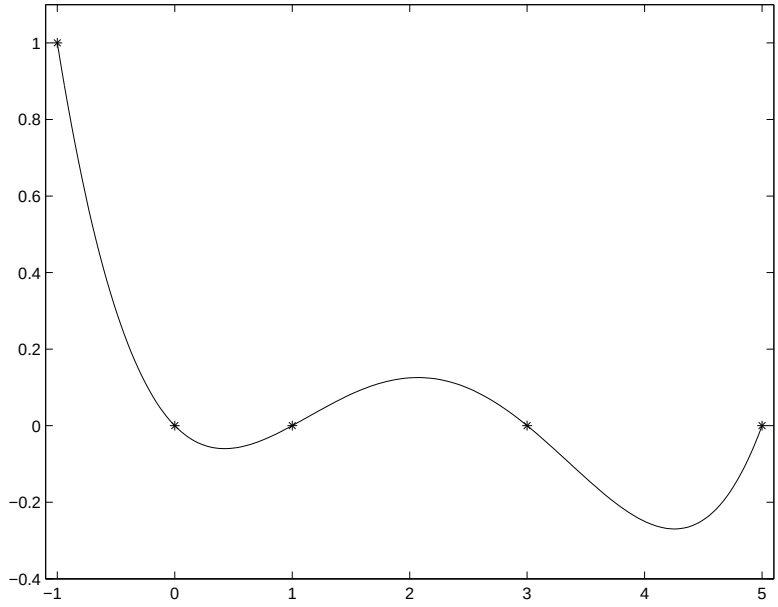


Figura 5.1: Grafico del polinomio $l_{40}(x)$.

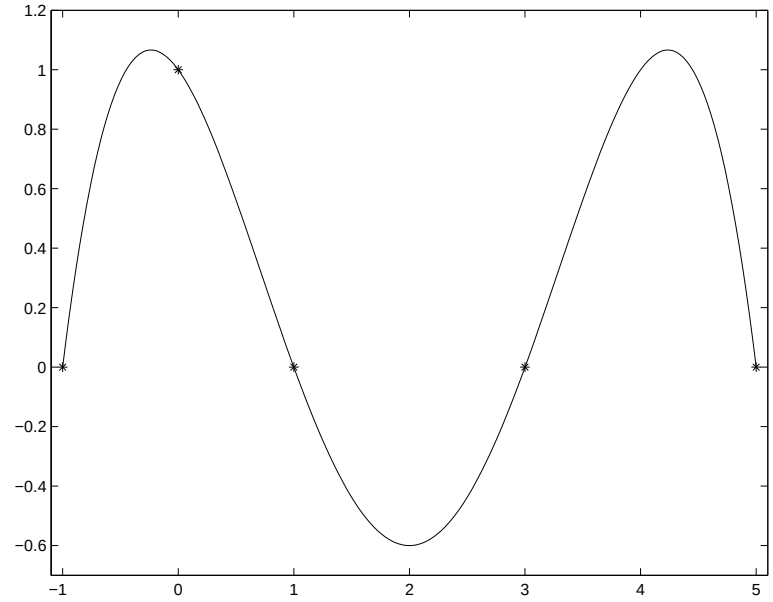


Figura 5.2: Grafico del polinomio $l_{41}(x)$.

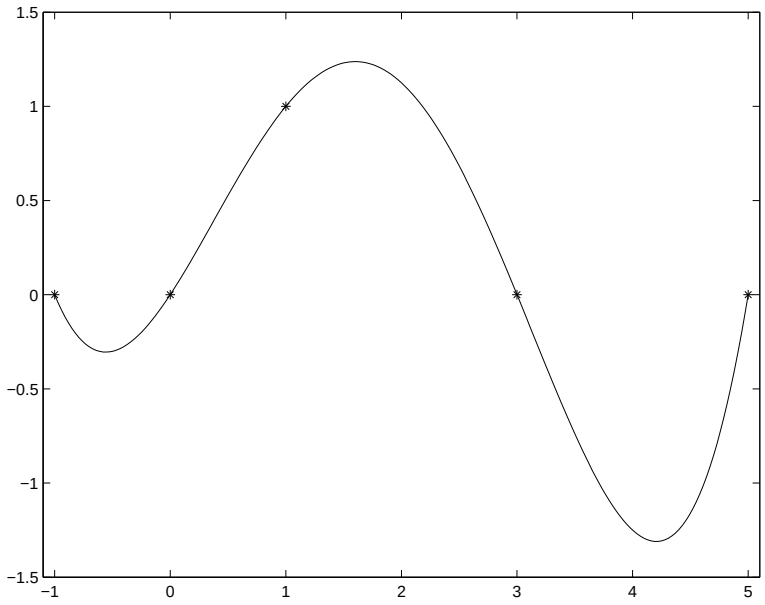


Figura 5.3: Grafico del polinomio $l_{42}(x)$.

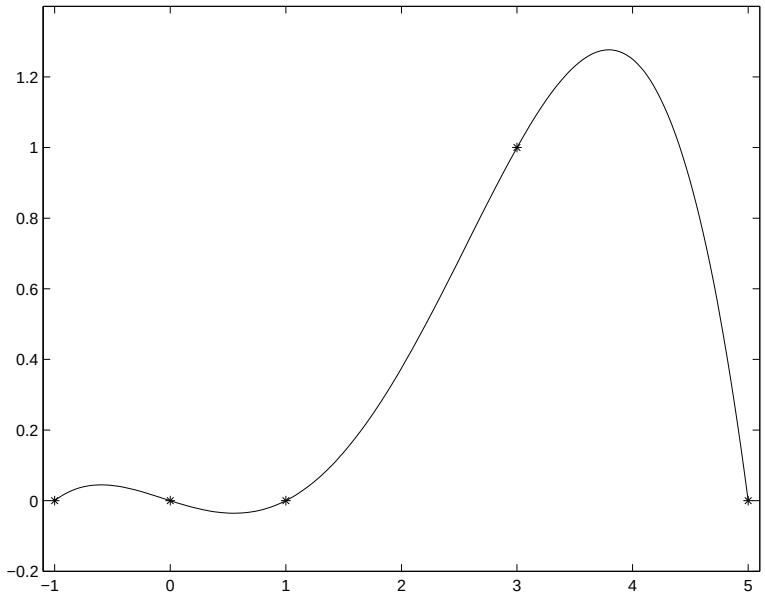


Figura 5.4: Grafico del polinomio $l_{43}(x)$.

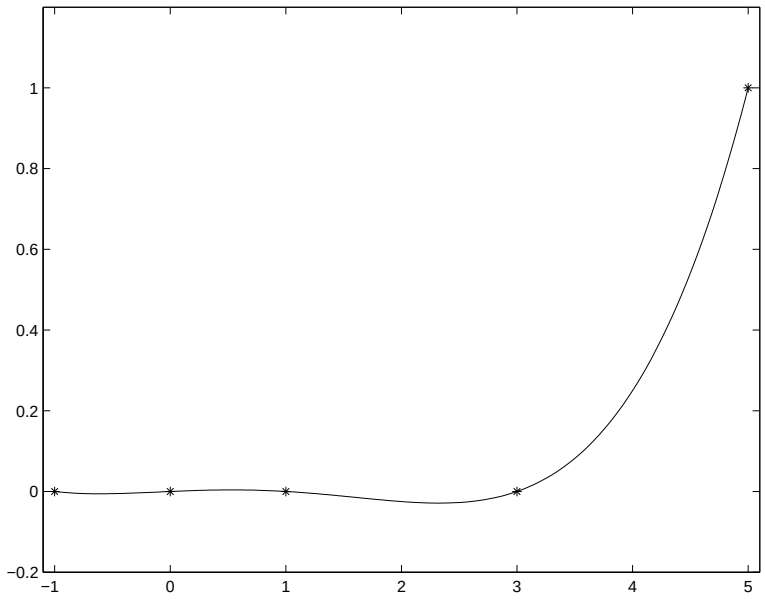


Figura 5.5: Grafico del polinomio $l_{44}(x)$.

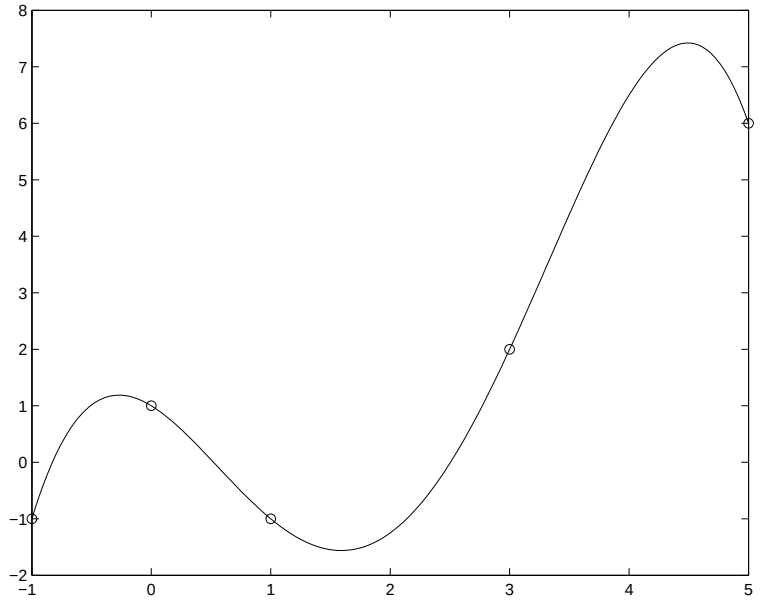


Figura 5.6: Grafico del polinomio interpolante di Lagrange $L_4(x)$.

Non è da trascurare poi il fatto che il coinvolgimento di funzioni, elementari e non, nella primitiva e la loro valutazione negli estremi a e b comporta comunque un'approssimazione dei risultati. Un'altra eventualità è che f sia nota solo in un numero finito di punti o comunque può essere valutata in ogni valore dell'argomento solo attraverso una routine. In questi casi l'approccio analitico non è neanche da prendere in considerazione.
Supponiamo dunque di conoscere la funzione $f(x)$ nei punti distinti $x_0, x_1, \ldots,$ x_n prefissati o scelti da noi, ed esaminiamo la costruzione di formule del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) \tag{5.9}$$

che approssimi realizzare $I(f)$.
Formule di tipo (5.9) si dicono di quadratura, i numeri reali $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $w_0, \ldots, w_n$ si chiamano rispettivamente nodi e pesi della formula di quadratura.
Il modo più semplice ed immediato per costruire formule di tipo (5.9) è quello di sostituire la funzione integranda $f(x)$ con il polinomio di Lagrange $L_n(x)$ interpolante $f(x)$ nei nodi x_i, $i = 0, \ldots, n$. Posto infatti

$$f(x) = L_n(x) + e(x)$$

dove $e(x)$ è la funzione errore, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b [L_n(x) + e(x)]dx = \\
&= \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b e(x)dx = \\
&= \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_{nk}(x) f(x_k)dx + \int_a^b e(x)dx = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b l_{nk}(x)dx \right) f(x_k) + \int_a^b e(x)dx.
\end{aligned}$$

Ponendo

$$w_k = \int_a^b l_{nk}(x)dx \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{5.10}$$

e

$$R_{n+1}(f) = \int_a^b e(x)dx \tag{5.11}$$

otteniamo

$$I(f) \simeq \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

con un errore stabilito dalla relazione (5.11). Le formule di quadratura con pesi definiti dalle formule (5.10) si dicono interpolatorie. La quantità $R_{n+1}(f)$ prende il nome di Resto della formula di quadratura. Un utile concetto per misurare il grado di accuratezza con cui una formula di quadratura, interpolatoria o meno, approssima un integrale è il seguente.

Definizione 5.2.1 *Una formula di quadratura ha grado di precisione q se fornisce il valore esatto dell'integrale quando la funzione integranda è un qualunque polinomio di grado al più q ed inoltre esiste un polinomio di grado $q+1$ tale che l'errore è diverso da zero.*

È evidente da questa definizione che ogni formula di tipo interpolatorio con nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ha grado di precisione almeno n.

5.3 Formule di Newton-Cotes

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli di ampiezza h, con

$$h = \frac{b-a}{n}$$

e definiamo i nodi

$$x_i = a + ih \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

La formula di quadratura interpolatoria costruita su tali nodi, cioè

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + R_{n+1}(f)$$

è detta Formula di Newton-Cotes.
Una proprietà di cui godono i pesi delle formule di Newton-Cotes è la cosiddetta proprietà di simmetria. Infatti poichè i nodi sono a due a due simmetrici

rispetto al punto medio c dell'intervallo $[a, b]$, cioè $c = (x_i + x_{n-i})/2$, per ogni i, tale proprietà si ripercuote sui pesi che infatti sono a due a due uguali, cioè $w_i = w_{n-i}$, per ogni i.
Vediamo ora due esempi di formule di Newton-Cotes.

5.3.1 Formula dei Trapezi

Siano $x_0 = a$, $x_1 = b$ e $h = b - a$.

$$T_2 = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_a^b l_{1,0}(x)dx = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx = \int_a^b \frac{x - b}{a - b}dx = \\ &= \frac{1}{a - b}\left[(x - b)^2\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Poichè i nodi scelti sono simmetrici rispetto al punto medio $c = (a + b)/2$ è

$$w_1 = w_0 = \frac{h}{2}.$$

Otteniamo dunque la formula

$$T_2 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right].$$

che viene detta Formula dei Trapezi. Per quanto concerne il resto abbiamo

$$R_2(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (x - a)(x - b)f''(\xi_x)dx.$$

Prima di vedere come tale espressione può essere manipolata dimostriamo il seguente teorema che è noto come teorema della media generalizzato.

Teorema 5.3.1 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funzioni continue con $g(x)$ a segno costante e $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Allora*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad \xi \in [a, b]. \ \square$$

Poichè la funzione $(x-a)(x-b)$ è a segno costante segue:

$$R_2(f) = \frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

posto $x = a + ht$ otteniamo

$$R_2(f) = \frac{1}{2}f''(\eta)h^3\int_0^1 t(t-1)dt = -\frac{1}{12}h^3 f''(\eta).$$

5.3.2 Formula di Simpson

Siano $x_0 = a$, $x_2 = b$ mentre poniamo $x_1 = c$, punto medio dell'intervallo $[a, b]$. Allora

$$S_3 = w_0 f(a) + w_1 f(c) + w_2 f(b).$$

Posto

$$h = \frac{b-a}{2}$$

abbiamo

$$w_0 = \int_a^b l_{2,0}(x)dx = \int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}dx.$$

Effettuando il cambio di variabile $x = c + ht$ è facile calcolare quest'ultimo integrale, infatti

$$x = a \;\Rightarrow\; a = c + ht \;\Rightarrow\; a - c = ht \;\Rightarrow\; -h = ht \;\Rightarrow\; t = -1$$

e

$$x = b \;\Rightarrow\; b = c + ht \;\Rightarrow\; b - c = ht \;\Rightarrow\; h = ht \;\Rightarrow\; t = 1.$$

Inoltre $a - c = -h$ e $a - b = -2h$ mentre

$$x-c = c+ht-c = ht, \qquad x-b = c+ht-b = c-b+ht = -h+ht = h(t-1),$$

ed il differenziale $dx = hdt$ cosicchè

$$w_0 = \int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}dx = \int_{-1}^1 \frac{hth(t-1)}{(-h)(-2h)}hdt =$$

$$= \frac{h}{2}\int_{-1}^1 (t^2-t)dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{h}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{h}{3}.$$

Per la simmetria è anche

$$w_2 = w_0 = \frac{h}{3}$$

mentre possiamo calcolare w_1 senza ricorrere alla definizione. Infatti possiamo notare che la formula deve fornire il valore esatto dell'integrale quando la funzione è costante nell'intervallo $[a, b]$, quindi possiamo imporre che, prendendo $f(x) = 1$ in $[a, b]$, sia

$$\int_a^b dx = b - a = \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + w_1 f(c)$$

da cui segue

$$w_1 = b - a - \frac{2}{3}h = 2h - \frac{2}{3}h = \frac{4}{3}h.$$

Dunque

$$S_3 = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right].$$

Questa formula prende il nome di Formula di Simpson. Per quanto riguarda l'errore si può dimostrare, e qui ne omettiamo la prova, che vale la seguente relazione

$$R_3(f) = -h^5 \frac{f^{(4)}(\sigma)}{90} \qquad \eta, \sigma \in (a, b),$$

che assicura che la formula ha grado di precisione 3.

5.4 Formule di Quadratura Composte

Come abbiamo già avuto modo di vedere le formule di quadratura interpolatorie vengono costruite approssimando su tutto l'intervallo di integrazione la funzione integranda con un unico polinomio, quello interpolante la funzione sui nodi scelti. Per formule convergenti la precisione desiderata si ottiene prendendo n sufficientemente grande. In tal modo comunque, per ogni fissato n, bisogna costruire la corrispondente formula di quadratura. Una strategia alternativa che ha il pregio di evitare la costruzione di una nuova formula di quadratura, e che spesso produce risultati più apprezzabili, è quella delle formule composte. Infatti scelta una formula di quadratura l'intervallo di integrazione (a, b) viene suddiviso in N sottointervalli di ampiezza h,

$$h = \frac{b - a}{N} \tag{5.12}$$

sicchè

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

dove i punti x_i sono:

$$x_i \quad = a + ih \qquad i = 0, \ldots, N \tag{5.13}$$

quindi la formula di quadratura viene applicata ad ognuno degli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$. Il grado di precisione della formula di quadratura composta coincide con il grado di precisione della formula da cui deriva. Descriviamo ora la Formula dei Trapezi Composta.

5.4.1 Formula dei Trapezi Composta

Per quanto visto in precedenza suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli, ognuno di ampiezza data da h, come in (5.12), e con i nodi x_i definiti in (5.13). Applichiamo quindi in ciascuno degli N intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ la formula dei trapezi. Otteniamo

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) - \frac{1}{12} h^3 f''(\eta_i) \right] \quad \eta_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

Scrivendo diversamente la stessa espressione

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_N) \right) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \frac{1}{12} h^3 \sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i) =$$

$$= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_N) \right) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \frac{1}{12} h^3 N f''(\eta)$$

dove $\eta \in (a, b)$. L'esistenza di tale punto η è garantito dal cosiddetto Teorema della media nel discreto applicato a $f''(x)$, che stabilisce che se $g(x)$ è una

funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e $\eta_i \in [a, b]$ $i = 1, N$, sono N punti distinti, allora esiste un punto $\eta \in (a, b)$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N} g(\eta_i) = Ng(\eta).$$

Dunque la formula dei trapezi composta è data da:

$$T_C(h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_N)\right) + h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$$

con resto

$$R_T = -\frac{1}{12}h^3 N f''(\eta) = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{N^3}Nf''(\eta) = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{N^2}f''(\eta).$$

Quest'ultima formula talvolta può essere utile per ottenere a priori una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in un numero di intervalli che permetta un errore non superiore ad una prefissata tolleranza. Infatti

$$|R_T| \leq \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{N^2}M, \qquad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Imponendo che $|R_T| \leq \varepsilon$, precisione prefissata, segue

$$N_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}. \tag{5.14}$$

Tuttavia questo numero spesso risulta una stima eccessiva a causa della maggiorazione della derivata seconda tramite M.

Capitolo 6

Il MATLAB

6.1 Introduzione al MATLAB

Il Matlab (acronimo delle parole inglesi *MATrix LABoratory*) è un software basato sulla manipolazione di matrici molto utilizzato nel campo della ricerca scientifica, non solo matematica, per la sua grande portabilità (infatti è disponibile sia per grandi workstation che per comuni personal computers), unita ad una notevole facilità d'uso e alle potenzialità di calcolo. Inoltre l'uso del Matlab è reso facile dalla presenza di un manuale dei comandi in linea, che può essere invocato tramite il comando `help`, e dalla presenza del comando `demo` che presenta numerosi e significativi esempi di applicazioni di tutte le funzioni Matlab. Nelle seguenti pagine faremo riferimento alle istruzioni presenti nelle ultime versioni del software.
Una volta lanciata l'esecuzione del programma compare il prompt del software

```
>>
```

il che significa che MatLab resta in attesa che venga effettuata una qualsiasi operazione (editare un programma, lanciare l'esecuzione di un file oppure eseguire un'istruzione digitata sulla riga di comando e così via).
Il comando `help`, come già detto, fornisce tutte le informazioni relative ad un particolare comando oppure una lista di tutti gli argomenti per i quali è presente un aiuto. La sintassi del comando è semplice:

```
>> help
```

oppure

```
>> help comando
```

Per esempio per sapere l'uso del comando `load`, che descriveremo in dettaglio nel seguito, è sufficiente scrivere

```
>> help load
```

Anche il comando `demo` ha una sintassi molto semplice:

```
>> demo
```

a questo punto compariranno sullo schermo alcuni menu e basterà scegliere, tramite il mouse, l'argomento del quale si vuole vedere una dimostrazione.
Il Matlab può essere considerato un interprete le cui istruzioni sono del tipo:

```
variabile = espressione
```

oppure

```
variabile
```

In quest'ultimo caso, quando cioè un'istruzione è costituita solo dal nome di una variabile viene interpretata come la visualizzazione del valore di tale variabile. Vediamo i seguenti esempi.

```
>> b=5;
>> b
ans =
   5
>>


>> b=5
b =
   5
>>
```

Nel primo caso il valore di output di `b` è stato attribuito alla variabile di comodo `ans` (abbreviazione per la parola inglese *answer*). Questo modo di procedere viene utilizzato anche quando si chiede di valutare un'espressione di tipo numerico senza l'ausilio di variabili.

```
>> 3+4
ans =
   7
>>
```

Ogni espressione introdotta viene interpretata e calcolata. Ogni istruzione può essere scritta anche su due righe purchè prima di andare a capo vengano scritti 3 punti $''\ldots''$. Più espressioni possono essere scritte sulla stessa riga purchè siano separate da una virgola o dal punto e virgola. Se una riga di un file Matlab inizia con % allora tale riga viene considerata come un commento. Il Matlab fa distinzione tra lettere minuscole e maiuscole, quindi se abbiamo definito una variabile `A` e facciamo riferimento a questa scrivendo `a` essa non viene riconosciuta.
Le frecce della tastiera consentono di richiamare e riutilizzare comandi scritti in precedenza; utilizzando infatti ripetutamente il tasto $\uparrow$ vengono visualizzate le linee di comando precedentemente scritte. Per tornare ad un'istruzione sorpassata basta premere il tasto $\downarrow$. Con i tasti $\longleftarrow$ e $\longrightarrow$ ci si sposta veso sinistra oppure verso destra sulla riga di comando su cui ci si trova.

6.2 Assegnazione di matrici

La prima cosa da imparare del Matlab è come manipolare le matrici che costituiscono la struttura fondamentale dei dati. Una matrice è una tabella di elementi caratterizzata da due dimensioni: il numero delle righe e quello delle colonne. I vettori sono matrici aventi una delle dimensioni uguali a 1. Infatti esistono due tipi di vettori: i *vettori riga* aventi dimensione $1 \times n$, e i *vettori colonna* aventi dimensione $n \times 1$. I dati scalari sono matrici di dimensione 1×1. Le matrici possono essere introdotte in diversi modi, per esempio possono essere assegnate esplicitamente, o caricate da file di dati esterni, o generate utilizzando funzioni predefinite.
Per esempio l'istruzione

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
```

assegna alla variabile `A` una matrice di tre righe e tre colonne. Gli elementi di una riga della matrice possono essere separate da virgole o dallo spazio, mentre le diverse righe sono separate da un punto e virgola. Se alla fine dell'assegnazione viene messo il punto e virgola allora la matrice non viene vi-

sualizzata sullo schermo. In generale se vogliamo assegnare ad `A` una matrice ad m righe ed n colonne la sintassi è la seguente:

```
>> A = [riga 1; riga 2; ...; riga m];
```

Per assegnare ad una variabile `x` un vettore riga si ha

```
>> x = [3 -4 5];
```

gli elementi possono anche essere separati da una virgola

```
>> x = [3,-4,5];
```

Per assegnare invece ad una variabile un vettore colonna basta separare gli elementi con un punto e virgola:

```
>> y = [1;-3;6];
```

La stessa matrice `A` dell'esempio visto in precedenza può essere assegnata anche a blocchi:

```
>> A = [ 1 2 3; 4 5 6];
>> b = [ 7 8 9];
>> A = [ A; b];
```

mentre in modo analogo si può anche aggiungere una colonna:

```
>> A = [-1 2 3; 0 5 6; -5 4 3];
>> x = [-7; 0; 9];
>> A = [ A, x];
```

Descriviamo ora alcune funzioni predefinite che forniscono in output determinate matrici.

```
>> A=rand(m,n)
```

costruisce una matrice $m \times n$ di elementi casuali uniformemente distribuiti tra 0 e 1;

```
>> A=zeros(m,n)
```

costruisce una matrice $m \times n$ di elementi nulli;

```
>> A=ones(m,n)
```

costruisce una matrice $m \times n$ di elementi tutti uguali a 1;

```
>> A=eye(m,n)
```

costruisce una matrice $m \times n$ i cui elementi sono uguali a 1 sulla diagonale principale e 0 altrove. Per le funzioni appena viste se uno dei due parametri è omesso allora la matrice costruita viene considerata quadrata.
Il dimensionamento delle matrici è automatico. Per esempio se si pone

```
>> B = [1 2 3; 4 5 6];
```

e successivamente

```
>> B = [1 0; 0 7];
```

il programma riconosce che la matrice `B` ha cambiato le dimensioni da 2×3 a 2×2.
Per identificare l'elemento della matrice che si trova al posto `j` nella riga `i` si usa la notazione `A(i,j)`.
Per esempio `A(4,2)` indica l'elemento che si trova nella quarta riga e in colonna 2. La numerazione delle righe e delle colonne parte sempre da 1 (quindi il primo elemento della matrice è sempre `A(1,1)`).
Per fare riferimento ad un singolo elemento di un vettore (sia riga che colonna) è sufficiente utilizzare un solo indice (quindi la notazione `x(i)` indica l'`i`-esima componente del vettore `x`).
Se si fa riferimento a un elemento di una matrice di dimensione $m \times n$ che non esiste allora il Matlab segnala l'errore con il seguente messaggio:
`Index exceeds matrix dimension`.
Se `C` è una matrice non ancora inizializzata allora l'istruzione

```
>> C(3,2)= 1
```

fornisce come risposta

```
C =
   0   0
   0   0
   0   1
```

cioè il programma assume come dimensioni per `C` dei numeri sufficientemente grandi affinchè l'assegnazione abbia senso. Se ora si pone

```
>> C(1,3)= 2
```

si ha:

```
C =
   0   0   2
   0   0   0
   0   1   0
```

In Matlab gli indici devono essere strettamente positivi mentre se si richiede un elemento di indice negativo oppure uguale a zero si ha sullo schermo il seguente messaggio di errore:
`Index into matrix is negative or zero`

6.2.1 Sottomatrici e notazione :

Vediamo ora alcuni esempi che illustrano l'uso di : per vettori e matrici. Le istruzioni

```
>> x=[1:5];
```

e

```
>> x=1:5;
```

sono equivalenti all'assegnazione diretta del vettore `x`:

```
>> x=[1 2 3 4 5];
```

Ciò vale anche per vettori di elementi reali. Infatti l'istruzione

```
>> x=[0.2:0.2:1.2];
```

equivale a scrivere

```
>> x=[0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2];
```

Inoltre è possibile anche l'uso di incrementi negativi:

```
>> x=[5:-1:1];
```

è equivalente a

```
>> x=[5 4 3 2 1];
```

L'istruzione

```
>> x=x(n:-1:1);
```

inverte gli elementi del vettore `x` di dimensione n. La notazione : può essere anche applicata a matrici. Infatti se `A` è una matrice abbiamo:

```
>> y=A(1:4,3);
```

assegna al vettore colonna `y` i primi 4 elementi della terza colonna della matrice `A`;

```
>> y=A(4,2:5);
```

assegna al vettore riga `y` gli elementi della quarta riga di `A` compresi tra il secondo e il quinto;

```
>> y=A(:,3);
```

assegna al vettore colonna `y` la terza colonna di `A`;

```
>> y=A(2,:);
```

assegna al vettore riga `y` la seconda riga di `A`;

```
>> B=A(1:4,:);
```

assegna alla matrice `B` le prime 4 righe di `A`;

```
>> B=A(:,2:6);
```

assegna alla matrice `B` le colonne di `A` il cui indice è compreso tra 2 e 6;

```
>> B=A(:,[2 4]);
```

assegna alla matrice `B` la seconda e la quarta colonna di `A`;

```
>> A(:,[2 4 5])=B(:,1:3);
```

sostituisce alle colonne 2, 4 e 5 della matrice `A` le prime 3 colonne della matrice `B`.

6.3 Operazioni su matrici e vettori

In Matlab sono definite le seguenti operazioni su matrici e vettori:

$+$	addizione
$-$	sottrazione
$*$	moltiplicazione
$\hat{}$	elevazione a potenza
$'$	trasposto
$/$	divisione
$(\ )$	specificano l'ordine di valutazione delle espressioni

Ovviamente queste operazioni possono essere applicate anche a scalari. Se le dimensioni delle matrici coinvolte non sono compatibili allora viene segnalato un errore eccetto nel caso di operazione tra uno scalare e una matrice. Per esempio se A è una matrice di qualsiasi dimensione allora l'istruzione

```
>> C = A+2;
```

assegna alla matrice C gli elementi di A incrementati di 2.
Nel caso del prodotto tra matrici è necessario prestare molta attenzione alle dimensioni delle matrici. Infatti ricordiamo che se $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ allora la matrice

$$C = A \cdot B, \qquad C \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

si definisce nel seguente modo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m \; j = 1, \ldots, n$$

ed è la matrice che viene calcolata scrivendo l'istruzione

```
>> C = A*B
```

In caso contrario se scriviamo

```
>> C = B*A
```

allora il programma segnala errore a meno che non sia $m = n$.
È importante notare che le operazioni $*, \hat{}$, e $/$ operano elemento per elemento se sono precedute da un punto:

`C=A.*B` $\Rightarrow$ $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$

`C=A./B` $\Rightarrow$ $c_{ij} = a_{ij}/b_{ij}$

`C=A.^B` $\Rightarrow$ $c_{ij} = a_{ij}^{b_{ij}}$

6.3.1 Costanti predefinite

Come la maggior parte dei linguaggi di programmazione il Matlab ha alcune costanti predefinite cioè delle variabili che hanno un proprio valore senza che esso venga esplicitamente assegnato:

`eps`	precisione di macchina ($\simeq 2.2 \cdot 10^{-16}$)
`pi`	π (cioe' 3.14159265358979)
`i`	unita' immaginaria ($\sqrt{-1}$)
`j`	unita' immaginaria ($\sqrt{-1}$)
`realmax`	il piu' grande numero floating point ($1.7976e+308$)
`realmin`	il piu' piccolo numero floating point ($2.2251e-308$)
`inf`	infinito (∞)
`NaN`	Not a Number.

La costante `inf` è ottenuta come risultato di una divisione per zero oppure il calcolo del logaritmo di zero o se il risultato è un overflow (per esempio `2*realmax`). La costante `NaN` invece è ottenuta come risultato di operazioni matematicamente non definite come $0/0$ oppure $\infty - \infty$.
Come accade per la maggior parte dei linguaggi di programmazione anche in Matlab è possibile definire variabili il cui nome è una costante predefinita, quindi per esempio è possibile usare la variabile `i` come indice intero.

6.3.2 Operatori relazionali e logici

I seguenti sono gli operatori relazionali

$<$	minore
$>$	maggiore
$<=$	minore o uguale
$>=$	maggiore o uguale
$==$	uguale
$\sim=$	diverso

Una relazione di tipo logico assume valore 0 o 1 a seconda del fatto se essa sia rispettivamente falsa o vera. Per esempio scrivendo

```
>> 3<5
```

otterremo

```
>> 3<5
ans =
   1
```

oppure scrivendo

```
>> 1>5
```

la risposta è

```
>> 1>5
ans =
   0
```

Quando un operatore relazionale è applicato a matrici di dimensioni uguali si ottiene come risultato una matrice i cui elementi sono 1 oppure 0. Vediamo il seguente esempio:

```
>> A=[2 1 ; 0 3];
>> B=[2 -1 ; -2 3];
>> A==B
ans =
   1 0
   0 1

>> A>B
ans =
   0 1
   1 0

>> A>=B
ans =
   1 1
   1 1
```

Gli operatori logici che il Matlab consente di utilizzare sono i seguenti:

&	AND
|	OR
$\sim$	NOT

6.4 Funzioni predefinite

In MatLab è possibile utilizzare un gran numero di funzioni predefinite in grado di semplificare notevolmente la scrittura di programmi. In questo paragafo elenchiamo soltanto quelle più utilizzate nell'ambito di programmi di calcolo. Tali funzioni sono state suddivise in tre gruppi: le funzioni scalari, quelle vettoriali e quelle matriciali.

6.4.1 Funzioni scalari

Le funzioni Matlab riportate di seguito sono praticamente quelle di tipo matematico che accettano come argomento di input un numero reale (o complesso), che sintatticamente deve essere scritto tra parentesi tonde subito dopo il nome della funzione (esempio: `cos(2*pi)`, oppure `log(x+1)`).

`sin`	seno
`cos`	coseno
`tan`	tangente
`asin`	arcoseno
`acos`	arcocoseno
`atan`	arcotangente
`sinh`	seno iperbolico
`cosh`	coseno iperbolico
`tanh`	tangente iperbolica
`asinh`	arcoseno iperbolico
`acosh`	arcocoseno iperbolico
`atanh`	arcotangente iperbolica
`exp`	esponenziale
`log`	logaritmo naturale
`log10`	logaritmo in base 10
`sqrt`	radice quadrata
`abs`	valore assoluto

`rem`	resto della divisione
`sign`	segno
`round`	arrotondamento
`floor`	parte intera inferiore
`ceil`	parte intera superiore

Tra queste funzioni appena nominate le ultime tre meritano un piccolo approfondimento; nella seguente tabella sono riportati i valori di tali funzioni per differenti numeri reali:

`x`	`round(x)`	`floor(x)`	`ceil(x)`
3.7	4	3	4
3.1	3	3	4
-4.7	-5	-5	-4
-4.3	-4	-5	-4

Osserviamo che `floor(x)` è sempre minore di `x` mentre `ceil(x)` è maggiore di `x`.
Le funzioni riportate in precedenza possono essere applicate anche a variabili di tipo vettore (o matrice), in questo si comportano come se fossero applicate a ciascun elemento del vettore (o della matrice). Per esempio se `x` è un vettore riga allora `abs(x)` è anch'esso un vettore riga le cui componenti sono i valori assoluti delle componenti del vettore `x`.

6.4.2 Funzioni vettoriali

Le seguenti funzioni Matlab operano principalmente su vettori (riga o colonna):

`max`	massimo elemento di un vettore
`min`	minimo elemento di un vettore
`sum`	somma degli elementi di un vettore
`prod`	prodotto degli elementi di un vettore
`sort`	ordinamento di un vettore
`length`	numero di elementi di un vettore
`fliplr`	inverte gli elementi di un vettore riga
`flipud`	inverte gli elementi di un vettore colonna

Le funzioni `max` e `min` possono fornire in uscita anche l'indice della componente massima (o minima) del vettore. La sintassi in questo caso è la seguente:

```
>> [massimo,k]=max(x);
>> [minimo,k]=min(x);
```

Le funzioni appena elencate possono essere applicate anche a variabili di tipo matrice, ma producono come risultato un vettore riga contenente i risultati della loro applicazione a ciascuna colonna. Per esempio scrivere

```
>> y=max(A);
```

significa assegnare al vettore (riga) `y` gli elementi massimi delle colonne della matrice `A`. Per ottenere il risultato della loro azione alle righe basta applicare la stessa funzione alla matrice trasposta `A'`. Volendo trovare il massimo elemento della matrice A si dovrebbe scrivere `max(max(A))`.

6.4.3 Funzioni di matrici

Le più utili funzioni di matrici sono le seguenti:

`eig`	autovalori e autovettori
`inv`	inversa
`det`	determinante
`size`	dimensioni
`norm`	norma
`cond`	numero di condizione in norma 2
`rank`	rango
`tril`	parte triangolare inferiore
`triu`	parte triangolare superiore
`diag`	fornisce in output un vettore colonna dove e' memorizzata la parte diagonale di una matrice. Se la funzione e' applicata invece ad un vettore allora in uscita avremo una matrice diagonale i cui elementi principali sono quelli del vettore di input.

Le funzioni Matlab possono avere uno o più argomenti di output. Per esempio `y = eig(A)`, o semplicemente `eig(A)`, produce un vettore colonna contenente gli autovalori di A mentre

```
>> [U,D] = eig(A);
```

produce una matrice U le cui colonne sono gli autovettori di A e una matrice diagonale D con gli autovalori di A sulla sua diagonale. Anche la funzione `size` ha due parametri di output:

```
>> [m,n] = size(A);
```

assegna a `m` ed `n` rispettivamente il numero di righe e di colonne della matrice `A`.
La funzione `norm` se viene applicata ad una matrice calcola la norma 2 della stessa matrice. È tuttavia possibile specificare anche altre norme. Per esempio

```
>> norm(A,'inf');
```

calcola la norma infinito di `A` mentre

```
>> norm(A,1);
```

calcola la norma 1 di `A`.

6.5 Le istruzioni for, while, if e switch

Il Matlab è dotato delle principali istruzioni che servono a renderlo un linguaggio strutturato. La più importante istruzione per la ripetizione in sequenza delle istruzioni è il `for`, che ha la seguente sintassi:

```
for var=val_0:step:val_1
    lista istruzioni
end
```

La variabile *var* assume come valore iniziale *val_0*, viene eseguita la lista di istruzioni che segue, poi è incrementata del valore *step*, vengono rieseguite le istruzioni che seguono e così via, finchè il suo valore non supera *val_1*. Il valore dello *step* può essere negativo, nel qual caso il valore di *val_0* deve essere logicamente superiore a *val_1*.
La sintassi per l'istruzione `while` è la seguente.

```
while espressione logica
    istruzioni
end
```

Le *istruzioni* vengono eseguite fintantochè l'*espressione logica* rimane vera.
La sintassi completa dell'istruzione `if` è la seguente:

```
if espressione logica
   istruzioni
elseif espressione logica
   istruzioni
else
   istruzioni
end
```

I rami `elseif` possono essere più di uno come anche essere assenti. Anche il ramo `else` può mancare. Vediamo ora alcuni esempi di come le istruzioni appena descritte possono essere applicate.
Se all'interno delle istruzioni che seguono il `for` o il `while` si verifica la necessità di interrompere il ciclo delle istruzioni allora ciò può essere fatto utilizzando l'istruzione `break`.
Ultima istruzione di questo tipo (e presente solo nell'ultima versione del programma) è l'istruzione `switch` che ha lo stesso ruolo e quasi la stessa sintassi dell'omonima istruzione in linguaggio C:

```
switch variabile
   case valore_0
      istruzioni
   case valore_1
      istruzioni
   case valore_2
      istruzioni
   otherwise
      istruzioni
end
```

che, in funzione del valore assunto dalla variabile, esegue o meno una serie di istruzioni. In particolare se nessuno dei valori previsti è assunto dalla variabile allora viene previsto un caso alternativo (`otherwise`) che li contempla tutti. Vediamo il seguente esempio:

```
switch rem(n,2)
   case 0
      disp('n e'' un numero pari')
   case 1
      disp('n e'' un numero dispari')
```

```
    otherwise
        disp('Caso impossibile')
end
```

6.6 Istruzioni per gestire il Workspace

Il comando

```
>> who
```

elenca le variabili presenti nell'area di lavoro, mentre il comando

```
>> whos
```

elenca, oltre al nome delle variabili, anche il tipo e l'occupazione di memoria. Una variabile può essere cancellata da tale area con il comando

```
>> clear nome variabile
```

mentre il comando

```
>> clear
```

cancella tutte le variabili presenti nell'area di lavoro.
Premendo contemporaneamente i tasti *Ctrl* e *c* si interrompe l'esecuzione di un file Matlab. L'istruzione

```
>> save
```

salva il contenuto dell'area di lavoro (cioè le variabili e il loro valore) nel file binario `matlab.mat`. Se invece si scrive

```
>> save nomefile
```

allora tutta l'area di lavoro viene salvata nel file `nomefile.mat`. Se invece si vogliono salvare solo alcune variabili e non tutta l'area di lavoro allora è possibile farlo specificando, oltre al nome del file, anche l'elenco di tali variabili. Per esempio

```
>> save nomefile A B x
```

salva nel file `nomefile.mat` solo il contenuto delle variabili `A, B` e `x`. Scrivendo

```
>> save nomefile A B x -ascii
```

allora il file `nomefile.mat` non ha il formato binario ma ascii, e questo è utile se si vuole verificare il contenuto del file.
Per ripristinare il contenuto dell'area di lavoro dal file `matlab.mat` il comando è

```
>> load
```

mentre è possibile anche in questo caso specificare il file da caricare. Facendo riferimento all'esempio del comando `save` allora scrivendo

```
>> load nomefile
```

ripristina le variabili e il loro valore che erano stati memorizzati nel file `nomefile.mat`.

6.7 M-files

Il Matlab può eseguire una sequenza di istruzioni memorizzate in un file. Questi file prendono il nome di *M-files* perchè la loro estensione è `.m`. Ci sono due tipi di M-files: gli *script files* e i *function files*.

Script files

Uno script file consiste in una sequenza di normali istruzioni Matlab. Se il file ha come nome `prova.m` allora basterà eseguire il comando

```
>> prova
```

per far sì che le istruzioni vengano eseguite. Le variabili di uno script file sono di tipo globale, per questo sono spesso utilizzati anche per assegnare dati a matrici di grosse dimensioni, in modo tale da evitare errori di input. Per esempio se in file `assegna.m` vi è la seguente assegnazione:

```
A=[0 -2 13 4; -5 3 10 -8; 10 -12 14 17; -1 4 5 6];
```

allora l'istruzione `assegna` servirà per definire la matrice `A`.

Function files

Permettono all'utente di definire funzioni che non sono standard. Le variabili definite nelle funzioni sono locali, anche se esistono delle istruzioni che permettono di operare su variabili globali. Vediamo il seguente esempio.

```
function a = randint(m,n)
% randint(m,n) Fornisce in output una matrice
% di dimensioni m×n di numeri casuali
% interi compresi tra 0 e 9.
a = floor(10*rand(m,n));
```

Tale funzione va scritta in un file chiamato `randint.m` (corrispondente al nome della funzione). La prima linea definisce il nome della funzione e gli argomenti di input e di output. Questa linea serve a distinguere i function files dagli script files. Quindi l'istruzione Matlab

```
>> c=randint(5,4);
```

assegna a c una matrice di elementi interi casuali di 5 righe e 4 colonne. Le variabili m, n e a sono interne alla funzione quindi il loro valore non modifica il valore di eventuali variabili globali aventi lo stesso nome. Se la funzione ammette più di un parametro di output allora la prima riga del function file deve essere modificata nel seguente modo:

```
function [var_0,var_1,var_2]= nomefunzione(inp_0,inp_1)
```

Vediamo ora di scrivere una funzione Matlab per calcolare il valore assunto da un polinomio per un certo valore x. Ricordiamo che assegnato un polinomio di grado n

$$p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + a_{n+1}x^n$$

la seguente *Regola di Horner* permette di valutare il polinomio minimizzando il numero di operazioni necessarie. Tale regola consiste nel riscrivere lo stesso polinomio in questo modo:

$$p(x) = a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_n + a_{n+1}x)\dots))).$$

In questo modo il numero di moltiplicazioni necessarie passa all'incirca da $O(n^2/2)$ a $O(n)$. Vediamo ora la funzione Matlab che implementa tale regola.

```
function y= horner(a,x,n)
% horner(a,x,n) Fornisce in output il valore
% di un polinomio di grado n nel punto x
% a vettore di n+1 elementi contenente i
%  coefficienti del polinomio
% x punto dove si vuol calcolare il polinomio
% n grado del polinomio
p=0;
for i=n+1:-1:1
   p=p*x+a(i);
end
y=p;
```

Per interrompere l'esecuzione di una funzione e tornare al programma chiamante si usa l'istruzione

```
return
```

6.8 Messaggi di errore, Istruzioni di Input

Stringhe di testo possono essere visualizzate sullo schermo mediante l'istruzione `disp`. Per esempio

```
disp('Messaggio sul video')
```

Se la stringa tra parentesi contiene un apice allora deve essere raddoppiato. La stessa istruzione può essere utilizzata anche per visualizzare il valore di una variabile: è sufficiente scrivere, al posto della stringa e senza apici, il nome della variabile.
I messaggi di errore possono essere visualizzati con l'istruzione `error`. Consideriamo il seguente esempio:

```
if a==0
   error('Divisione per zero')
else
   b=b/a;
end
```

l'istruzione `error` causa l'interruzione nell'esecuzione del file.
In un M-file è possibile introdurre dati di input in maniera interattiva mediante l'istruzione `input`. Per esempio quando l'istruzione

```
iter = input('Inserire il numero di iterate ')
```

viene eseguita allora il messaggio è visualizzato sullo schermo e il programma rimane in attesa che l'utente digiti un valore da tastiera e tale valore, di qualsiasi tipo esso sia, viene assegnato alla variabile `iter`.
Vediamo ora un modo per poter memorizzare in un file di ascii l'output di un M-file oppure di una sequenza di istruzioni Matlab. Infatti

```
>> diary nomefile
>> istruzioni
>> diary off
```

serve a memorizzare nel file *nomefile* tutte le istruzioni e l'output che è stato prodotto dopo la prima chiamata della funzione e prima della seconda.

6.8.1 Formato di output

In Matlab tutte le elaborazioni vengono effettuate in doppia precisione. Il formato con cui l'output compare sul video può però essere controllato mediante i seguenti comandi.

```
format short
```

È il formato utilizzato per default dal programma ed è di tipo fixed point con 4 cifre decimali;

```
format long
```

Tale formato è di tipo fixed point con 14 cifre decimali;

```
format short e
```

Tale formato è la notazione scientifica (esponenziale) con 4 cifre decimali;

```
format long e
```

Tale formato è la notazione scientifica (esponenziale) con 15 cifre decimali. Vediamo per esempio come i numeri $4/3$ e $1.2345e-6$ sono rappresentati nei formati che abbiamo appena descritto e negli altri disponibili:

```
format short            1.3333
format short e          1.3333e+000
format short g          1.3333
format long             1.33333333333333
format long e           1.333333333333333e+000
format long g           1.333333333333333
format rat              4/3


format short            0.0000
format short e          1.2345e-006
format short g          1.2345e-006
format long             0.00000123450000
format long e           1.234500000000000e-006
format long g           1.2345e-006
format rat              1/810045
```

Oltre ai formati appena visti il comando

```
format compact
```

serve a sopprimere le righe vuote e gli spazi dell'output scrivendo sullo schermo il maggior numero di informazioni possibile, in modo appunto compatto.

6.9 La grafica con il Matlab

Il Matlab dispone di numerose istruzioni per grafici bidimensionali e tridimensionali e anche di alcune funzioni per la creazione di animazioni. Il comando `plot` serve a disegnare curve nel piano xy. Infatti se `x` e `y` sono due vettori di uguale lunghezza allora il comando

```
>> plot(x,y)
```

traccia una curva spezzata che congiunge i punti `(x(i),y(i))`. Per esempio

```
>> x=-4:.01:4;
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
```

traccia il grafico della funzione seno nell'intervallo $[-4, 4]$.
L'istruzione `plot` ammette un parametro opzionale di tipo stringa (racchiuso tra apici) per definire il tipo e il colore del grafico. Infatti è possibile scegliere tra 4 tipi di linee, 5 di punti e 8 colori base. In particolare

`'-'`	linea continua
`'--'`	linea tratteggiata
`'-.'`	linea tratteggiata e a punti
`':'`	linea a punti
`'+'`	piu'
`'o'`	cerchio
`'x'`	croce
`'.'`	punto
`'*'`	asterisco
`'y'`	colore giallo
`'r'`	colore rosso
`'c'`	colore ciano
`'m'`	colore magenta
`'g'`	colore verde
`'w'`	colore bianco
`'b'`	colore blu
`'k'`	colore nero

Volendo tracciare per esempio un grafico con linea a puntini e di colore verde l'istruzione è:

```
>> plot(x,y,':g')
```

L'istruzione `plot` consente di tracciare più grafici contemporaneamente. Per esempio

```
>> x=-pi:pi/500:pi;
>> y=sin(x);
>> y1=sin(2*x);
>> y2=sin(3*x);
>> plot(x,y,'r',x,y1,'-.g',x,y2,'--b')
```

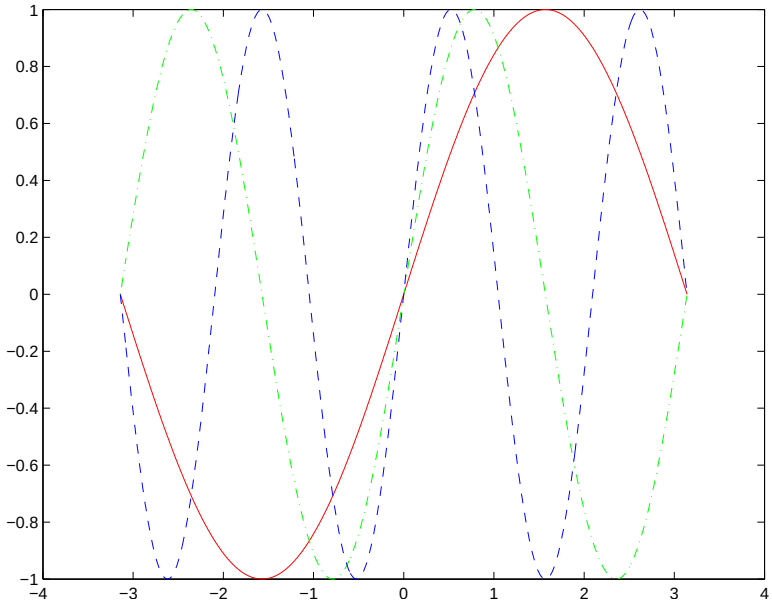


Figura 6.1:

traccia tre grafici nella stessa figura, il primo a tratto continuo (tratto di default) rosso, il secondo verde tratteggiato e a punti, il terzo tratteggiato e di colore blu. Nella Figura 6.1 è riportato il risultato di tale istruzione.
Vediamo ora le altre più importanti istruzioni grafiche:

```
>> title(stringa)
```

serve a dare un titolo al grafico che viene visualizzato al centro nella parte superiore della figura;

```
>> xlabel(stringa)
```

stampa una stringa al di sotto dell'asse delle ascisse;

```
>> ylabel(stringa)
```

stampa una stringa a destra dell'asse delle ordinate (orientata verso l'alto).
Per inserire un testo in una qualsiasi parte del grafico esiste il comando

```
>> text(x,y,'testo')
```

che posiziona la stringa di caratteri *testo* nel punto di coordinate (x, y) (`x` e `y` non devono essere vettori). Di tale comando ne esiste anche una versione che utilizza il mouse:

```
>> gtext('testo')
```

posiziona il testo nel punto selezionato all'interno del grafico schiacciando il pulsante sinistro del mouse.
Il grafico tracciato con il comando `plot` è scalato automaticamente, questo vuol dire che le coordinate della finestra grafica sono calcolate dal programma, tuttavia l'istruzione

```
>> axis([x_min x_max y_min y_max])
```

consente di ridefinire gli assi, e quindi le dimensioni della finestra del grafico corrente. Le istruzioni grafiche del Matlab permettono di tracciare curve in tre dimensioni, superfici, di creare delle animazioni e così via. Per approfondire le istruzioni che consentono queste operazioni si può richiedere l'`help` per le istruzioni `plot3`, `mesh` e `movie`.
Nel caso di una superficie, per tracciare il grafico si devono definire due vettori, uno per le ascisse, cioè `x`, uno per le ordinate, `y`, e una matrice `A` per memorizzare le quote, cioè tale che

```
A(j,i)=f(x(j),y(i))
```

Nella Figura 6.2 è tracciato come esempio il grafico della funzione

$$f(x, y) = x(10 - x) + y(10 - y), \qquad 0 \leq x, y \leq 10.$$

Le istruzioni per tracciare tale grafico sono le seguenti:

```
x=[0:0.1:10];
y=[0:0.1:10];
n=length(x);
for i=1:n
     for j=1:n
          A(j,i)=x(j)*(10-x(j))+y(i)*(10-y(i));
     end
end
mesh(x,y,A);
```

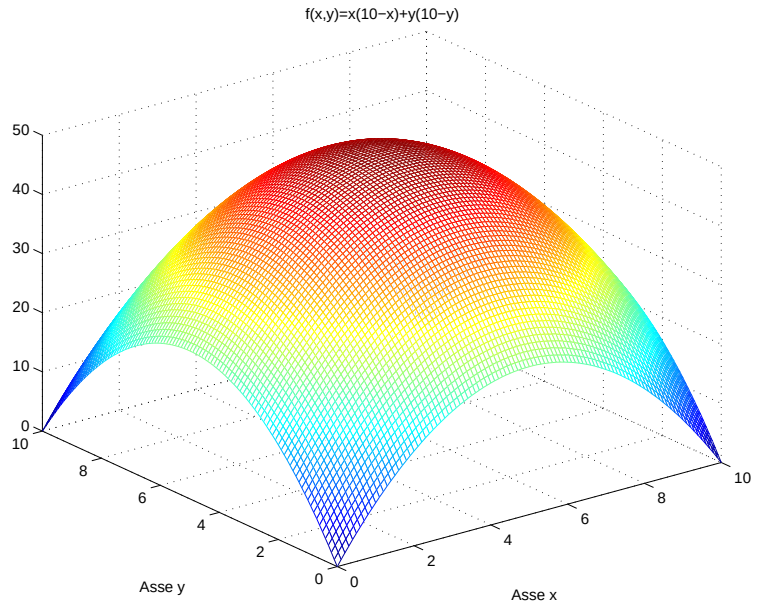


Figura 6.2:

```
xlabel('Asse x');
ylabel('Asse y');
title('f(x,y)=x(10-x)+y(10-y)');
```

6.10 Applicazioni al Calcolo Numerico

Terminiamo il capitolo dedicato al Matlab con l'implementazione di alcune routine di specifici argomenti del Calcolo Numerico, riguardanti in particolare argomenti di Algebra Lineare. La prima riguarda la risoluzione di un sistema triangolare superiore utilizzando il metodo di sostituzione all'indietro.

```
function x=indietro(A,b)
%
% Sintassi x=indietro(A,b)
%
% Risolve un sistema triangolare superiore utilizzando
% il metodo di sostituzione all'indietro
```

```
%
% Parametri di input:
% A = Matrice triangolare superiore
% b = Vettore colonna
%
% Parametri di output:
% x = Vettore soluzione
%
n=length(b);
x=zeros(n,1);
if abs(A(n,n))<eps
     error('La matrice A e'' singolare ');
end
x(n)=b(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
     x(k)=b(k);
     for i=k+1:n
          x(k)=x(k)-A(k,i)*x(i);
     end
     if abs(A(k,k))<eps
          error('La matrice A e'' singolare ');
     else
          x(k)=x(k)/A(k,k);
     end
end
```

La routine appena descritta risolve un sistema triangolare superiore. Osserviamo innanzitutto che se viene incontrato un elemento diagonale più piccolo, in modulo, della precisione di macchina allora l'algoritmo segnala un errore. Si può inoltre osservare che la routine potrebbe essere scritta in modo più compatto utilizzando la notazione : del Matlab. Infatti il ciclo descritto dalla variabile `i` si potrebbe sostituire con un'unica istruzione:

```
x(k)=b(k)-A(k,k+1:n)*x(k+1:n);
```

La seconda routine che descriviamo riguarda il metodo di eliminazione di Gauss senza strategie di pivoting per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

```
function x=gauss(A,b);
%
% Sintassi x=gauss(A,b)
%
% Risolve un sistema lineare utilizzando il
% metodo di eliminazione di Gauss
%
% Parametri di input:
% A = Matrice dei coefficienti
% b = Vettore dei termini noti
%
% Parametri di output:
% x = Vettore soluzione
%
[m,n]=size(A);
if m~=n
     error('Metodo non applicabile');
end
if length(b)~=n
     error('Metodo non applicabile');
end
for k=1:n
     if abs(A(k,k))<eps
          error('Elemento pivotale nullo ');
     end
     for i=k+1:n
          A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
          for j=k+1:n
               A(i,j)=A(i,j)-A(k,j)*A(i,k);
          end
          b(i)=b(i)-b(k)*A(i,k);
     end
end
x=indietro(A,b);
```

Possiamo osservare come la funzione che abbiamo descritto utilizzi la routine `indietro.m` per risolvere il sistema triangolare superiore ottenuto applicando il metodo di Gauss.

Un modo alternativo per implementare il metodo di Gauss è quello di applicarlo alla matrice `A=[A b]` di dimensione $n \times (n+1)$, inglobando il vettore dei termini noti nella matrice `A`, modificando il ciclo dell'indice `j` nel seguente modo:

```
j=k+1:n+1
```

ed evitando di esplicitare la modifica del vettore `b` ed applicando infine la routine `indietro.m` nel seguente modo:

```
x=indietro(A(:,1:n),A(:,n+1));
```

6.11 Octave

Il programma `Octave` è essenzialmente un emulatore del linguaggio di `Matlab`. `Octave` nacque presso l'Università del Texas nel 1988 come programma di calcolo per l'ingegneria chimica; il nome `Octave` è il nome del docente di uno dei corsi presso i quali John W. Eaton, il principale autore del programma, ne iniziò lo sviluppo nel 1992.
Le caratteristiche fondamentali di `Octave` sono due:

- è completamente gratuito e copiabile dal sito web `http://www.octave.org`;
- è 'software libero': il suo codice sorgente è disponibile a tutti e tutti possono modificarlo secondo le loro esigenze.

Entrambe le caratteristiche lo rendono molto interessante dal punto di vista didattico.

6.11.1 Alcune differenze

Per lanciare il programma `Octave` basta cliccare due volte sull'icona del programma. Per uscire dal programma digitare `quit` o `exit`. Lanciato il programma si entra in una sessione interattiva avente come prompt `>`. Come per il Matlab, il comando `help` fornisce informazioni sulla documentazione di supporto. In particolare, scrivendo il nome di un comando specifico dopo la parola `help` si visualizzano le principali informazioni relative a quel comando. Tutti i comandi Matlab descritti nei paragrafi di questo capitolo (assegnazione variabili, matrici, vettori; variabili predefinite realmin, realmax, eps, pi; comandi rand, triu, ones, ';', ':', plot, plot3, mesh, title, xlabel,

ylabel, hold on, hold off, i vari format, size, length, clear, who, whos, inline, feval, input, disp, save, load, diary, ...) funzionano anche in `Octave`. Nel linguaggio `Octave` il commento è preceduto dal carattere %, come in Matlab, o dal simbolo ♯. Analogamente per l'elevamento a potenza si può usare il comando `^`, come in Matlab, o $**$. Ad esempio per calcolare il cubo di 2 si possono usare indistintamente `2^3` e `2**3`.
A differenza del Matlab il programma `Octave` permette di fare assegnazioni multiple contemporaneamente. Ad esempio:
`> x=y=z=0`
assegna simultaneamente alle variabili x, y e z il valore zero.
Il programma `Octave` prevede operatori di *incremento*:

- pre incremento:
  `> ++x`
  incrementa la varibile x di uno e restituisce il nuovo valore. È equivalente a `> x = x+1`

- post incremento:
  `> x++`
  incrementa la varibile x di uno e restituisce il valore prima dell'incremento

- pre decremento:
  `> --x`
  decrementa la varibile x di uno e restituisce il nuovo valore. È equivalente a `> x = x-1`

- post decremento:
  `> x--`
  decrementa la varibile x di uno e restituisce il valore prima del decremento.

Per matrici e vettori gli operatori di incremento e decremento lavorano su ogni elemento dell'operando.
Le istruzioni `for`, `if`, `while` e `switch` funzionano come in Matlab tranne per il fatto che le istruzioni si chiudono con `endfor`, `endif`, `endwhile` e `endswitch`, rispettivamente e non con un generico `end`.
Un comando che differenzia l'`Octave` dal Matlab è il `do-until`. Esso è simile al `while` solo che questo esegue rapidamente lo statement fino a che la

condizione non è vera e il test della condizione è alla fine del ciclo, in modo da eseguire il corpo del ciclo almeno una volta.
L'espressione di do-until è:

```
do
istruzioni
until (condizione)
```

Ad esempio

```
> fib = ones (1,10);
> do
> i++;
> fib(i)=fib(i-1)+fib(i-2);
> until (i= =10)
```

genera il vettore `fib` che contiene i primi 10 elementi della sequenza di Fibonacci.

6.12 Programmazione

Come per il Matlab anche in `Octave` si distinguono i files *function* e quelli *script*.
Per aprire l'editor di testo si usa il comando
`> edit`.
Una volta creato il file esso viene salvato automaticamente con estensione `.m`; per richiamarlo dal terminale di `Octave` basta digitare il nome del file.
Il programma legge i programmi dalla propria 'cartella attuale'. Per sapere quale sia, si usi il comando `pwd`. In Windows, per cambiare tale cartella nella cartella 'Desktop' si usi il comando

```
cd "C:/Documents and Settings/.../Desktop",
```

dove ... rappresenta il percorso necessario a raggiungere la cartella Desktop relativa alla propria area del disco. In Linux la sintassi è identica, usando il percorso `/home/nomeutente/.../`.