Capitolo 1

Esercizi di Programmazione Lineare

1.1 Modelli matematici di ottimizzazione

1.1.1 Esercizi da svolgere

Esercizio 1. Un'azienda produttrice di automobili ha a disposizione tre stabilimenti (S_1, S_2, S_3) che devono soddisfare la domanda annuale di 4 punti di vendita (V_1, V_2, V_3, V_4) pari a 450, 650, 400 e 500 automobili, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di trasporto (espressi in euro) dagli stabilimenti ai punti di vendita:

	V_1	V_2	V_3	V_4
S_1	20	40	10	30
S_2	30	60	50	40
S_3	40	50	60	70

Formulare il problema come problema di ottimizzazione supponendo di voler minimizzare il costo complessivo del trasporto delle automobili ai punti di vendita, considerando che la capacità produttiva annuale dei tre stabilimenti è pari a 700, 500 e 800 automobili, rispettivamente.

Esercizio 2. Una casa editrice deve effettuare il trasporto di libri da 3 depositi (D_1, D_2, D_3) a 4 librerie (L_1, L_2, L_3, L_4). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto da ciascun deposito a ciascuna libreria, le quantità di libri disponibili nei depositi e quelle richieste dalle singole librerie:

	L_1	L_2	L_3	L_4	Disponibilità
D_1	1	2	1	1.5	60
D_2	0.5	2	0.8	0.5	100
D_3	1	0.5	1.5	0.5	40
Richieste	20	80	55	45	

Poichè i costi di trasporto sono a carico della case editrice, l'obiettivo è quello di minimizzare il costo complessivo del trasporto dai depositi alle librerie soddisfacendo i vincoli di richiesta e disponibilità. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 3. Un'azienda ospedaliera deve riorganizzare i turni del personale paramedico. Ogni infermiere, indipendentemente dalla collocazione all'interno della settimana, lavora 5 giorni consecutivi e poi ha diritto a due giorni di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza del seguente numero minimo di infermieri:

Giorno	Numero minimo
Lunedì	28
Martedì	18
Mercoledì	20
Giovedì	26
Venerdì	22
Sabato	13
Domenica	13

Ciascun infermiere viene retribuito in base al giorno della settimana in cui lavora. In particolare il costo che l'ospedale sostiene per retribuire un infermiere è di 50 euro al giorno (per i turni del lunedì, martedì, mercoledì, giovedì e venerdì), di 75 euro al giorno per i turni di sabato e di 85 euro al giorno per i turni di domenica. Ad esempio, un infermiere il cui turno comincia il giovedì, per i suoi 5 giorni lavorativi (dal giovedì al lunedì) riceve una retribuzione pari a euro 310 (ovvero $50 \times 3 + 75 + 85$). Obiettivo dell'azienda ospedaliera è quello di minimizzare i costi complessivi settimanali di retribuzione degli infermieri.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 4. Le specialità prodotte da una pasticceria sono la cassata, la pastiera e i cannoli siciliani. Per chilo di prodotto sono utilizzate le quantità di ingredienti (in grammi) riportate nella seguente tabella:

Ingrediente	Cassata	Cannoli	Pastiera
Ricotta	500	400	300
Zucchero	300	225	215
Farina	0	240	175
Canditi	150	30	50

La disponibilità giornaliera degli ingredienti è di 20 kg di ricotta, 15 kg di zucchero, 12 kg. di farina e 3 kg di canditi. I prezzi di vendita al pubblico dei tre dolci sono pari rispettivamente a 20 euro al chilo per la cassata, 12 euro al chilo per i cannoli e 15 euro al chilo per la pastiera. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto dei vincoli sulle risorse giornaliere, tenendo presente che la ricotta deve essere interamente consumata in giornata, e con l'obiettivo di massimizzare il ricavo settimanale derivante dalla vendita dei tre prodotti.

Esercizio 5. Un'azienda di abbigliamento deve decidere come utilizzare mensilmente tre diversi impianti (1, 2 e 3), ciascuno dei quali è in grado di produrre giacche e pantaloni. Ogni impianto ha un proprio costo (espresso in euro) e una propria capacità produttiva mensile, secondo le seguenti tabelle:

	Costo per impianto		
Impianto	1	2	3
Giacche	500	400	350
Pantaloni	450	240	300

	Capacità produttiva		
Impianto	1	2	3
Giacche	3.000	4.000	5.000
Pantaloni	5.000	2.000	3.000

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi e di soddisfare la domanda mensile di giacche e pantaloni, pari a 6 mila e 7 mila unità rispettivamente. Si tenga presente inoltre che una stessa tipologia di prodotto può essere ottenuta contemporaneamente da più di un impianto e che le capacità produttive di ciascun impianto sono indipendenti dal numero di tipologie di prodotti, per i quali esso viene utilizzato.

Esercizio 6. Il Ministero della Sanità ha in progetto la costruzione di ospedali ortopedici specializzati, che nel raggio di 200 km siano in grado di servire le seguenti città: Latina, Lecce, Matera, Napoli, Potenza, Salerno e Roma. Nel seguito, per ogni città, sono elencate quelle situate a una distanza inferiore ai 200 km:
1. Latina: Latina, Napoli, Roma;
2. Lecce: Lecce, Matera;
3. Matera: Lecce, Matera, Potenza;
4. Napoli: Latina, Napoli, Potenza, Salerno;
5. Potenza: Matera, Napoli, Potenza, Salerno;
6. Salerno: Napoli, Potenza, Salerno;
7. Roma: Latina, Roma.

Ad esempio, se un ospedale venisse costruito a Napoli, esso sarebbe in grado di servire anche le città di Latina, Potenza e Salerno, che si trovano a una distanza da Napoli inferiore a 200 km. Si vuole decidere in quale delle 7 città costruire gli ospedali, in maniera tale che ogni città abbia almeno un ospedale ad una distanza non superiore a 200 km e tenendo conto che in una stessa città non si può costruire più di un ospedale.
Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare il numero di ospedali da costruire.
(`Suggerimento:` Si definisca una variabile decisionale di tipo binario per ciascuna delle sette città, ovvero $x_i = 1$ se nella $i-$esima città viene costruito l'ospedale, $x_i = 0$ in caso contrario.)

Esercizio 7. Un'azienda manifatturiera, nel rivedere il proprio organico, deve assegnare 5 operai (O_1, O_2, O_3, O_4, O_5) a quattro diversi reparti (R_1, R_2, R_3, R_4). Nella seguente tabella sono riportati (in euro) i costi mensili di retribuzione dei 5 operai, in funzione del reparto a cui potrebbero essere assegnati:

	R_1	R_2	R_3	R_4
O_1	1200	1100	1050	1300
O_2	1500	1000	1100	1400
O_3	1000	1600	1100	1150
O_4	950	1300	1250	800
O_5	1100	900	1400	1300

Ad esempio se l'operaio O_1 venisse assegnato al reparto R_3, il suo stipendio mensile sarebbe di 1050 euro. Si vuole decidere come assegnare gli operai ai reparti, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi mensili di retribuzione e tenendo conto dei seguenti vincoli:
1) ogni operaio deve essere assegnato esattamente ad un solo reparto;
2) l'operaio O_2 può essere assegnato solo ai reparti R_1 o R_4;
3) ai reparti R_1, R_2 ed R_3 si deve assegnare esattamente un solo operaio, mentre al reparto R_4 si devono assegnare esattamente due operai.
Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 8. Un'azienda manifatturiera dispone di 4 macchine per produrre 4 diversi tipi di componenti, che poi, in fase di assemblaggio, daranno luogo al prodotto finito. È possibile attrezzare ogni macchina in modo che possa produrre qualsiasi tipo di componente; i tempi unitari di produzione (espressi in minuti) sono riportati nella seguente tabella:

	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4
Macchina 1	30	50	15	25
Macchina 2	40	25	40	60
Macchina 3	30	30	50	30
Macchina 4	10	20	80	30

Sapendo che, per ogni tipo di componente, bisogna produrre almeno 20 pezzi, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i tempi complessivi di produzione.

Esercizio 9. La direzione di un hotel vuole minimizzare le spese giornaliere complessive relative al personale. Nell'intera giornata sono previsti 6 turni, di 4 ore ciascuno; inoltre ciascun dipendente deve lavorare 8 ore consecutive. Per ogni turno è previsto un numero minimo di personale, secondo quanto riportato nella seguente tabella:

Turno	Orario	Fabbisogno minimo
1	$0-4$	40
2	$4-8$	60
3	$8-12$	80
4	$12-16$	140
5	$16-20$	100
6	$20-24$	110

La retribuzione dei dipendenti e di 10 euro all'ora per i turni diurni (3 e 4), 15 euro per i turni pomeridiani o serali (5 e 6) e di 25 euro all'ora per i turni notturni (1 e 2).
Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare le spese giornaliere di personale.

Esercizio 10. Un Ateneo deve programmare il piano di assunzioni ovvero il numero di concorsi da bandire per ciascuna delle tre fasce di docenza, professori ordinari, professori associati e ricercatori. Le risorse necessarie per bandire un concorso in una determinata fascia sono espresse in funzione di un'unità di misura detta punto organico, nel dettaglio un punto organico per un posto da professore ordinario, 0.7 punti organico per un posto da professore associato e 0.5 punti organico per un ricercatore. L'Ateneo intende bandire il numero massimo di concorsi sapendo di avere a disposizione 20 punti organico (che devono essere utilizzati per intero), che il numero di posti destinato ai ricercatori deve essere non inferiore alla somma dei posti banditi nelle altre fasce e che il numero di punti organico destinato ai professori ordinari non deve superare il 10% del budget a disposizione e che si deve bandire almeno un posto per ciascuna fascia di docenza.
Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 11. Un'azienda dolciaria produce tre tipi di dolci (A, B e C) a base di mandorle, nocciole e cioccolato. Le quantità di ingredienti (espressi in grammi per un chilo di dolce) sono riportate nella seguente tabella:

Dolce	Mandorle	Nocciole	Cioccolato
A	200	150	50
B	100	75	0
C	0	125	40

La disponibilità settimanale degli ingredienti è di 16 kg di mandorle, 20 kg di nocciole e 10 kg di cioccolato. Le quantità di mandorle, nocciole e cioccolato che non sono utilizzate per la produzione dei tre dolci vengono vendute al pubblico a un prezzo pari a 3, 5 e 6 euro/etto, rispettivamente. I prezzi di vendita al pubblico dei tre dolci (A, B e C) sono pari rispettivamente a 10, 25 e 14 euro al chilo. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto dei vincoli sulle risorse settimanali e con l'obiettivo di massimizzare il ricavo settimanale derivante dalla vendita dei tre tipi di dolce (A, B e C) e degli ingredienti rimasti inutilizzati nella produzione.

Esercizio 12. Un'azienda leader nel campo dell'elettronica deve organizzare una campagna pubblicitaria per il lancio di un nuovo cellulare. La campagna pubblicitaria è basata sull'uso della TV, della radio, di riviste settimanali e di alcune pagine web: in particolare, trasmettere uno spot pubblicitario in TV nel primo pomeriggio costa 800 euro, trasmettere uno spot pubblicitario in TV in prima serata costa 1.100 euro, trasmettere uno spot pubblicitario alla radio costa all'azienda 300 euro, mentre pubblicare una pagina di pubblicità su una qualsiasi rivista settimanale costa all'azienda 500 euro, mentre la pubblicità su Internet costa 250 euro. Nella seguente tabella sono riportate le stime del numero di potenziali acquirenti (espressi in migliaia e suddivisi per fascia di età, a partire da 15 anni) raggiungibili da ciascun tipo di messaggio pubblicitario:

	Fasce di età				
	$15-17$	$18-25$	$26-40$	$41-60$	>60
TV pomeriggio	200	150	100	120	180
TV prima serata	250	140	130	300	350
Radio	100	120	120	140	170
Rivista	80	100	110	180	200
Internet	400	400	300	100	5

L'azienda deve decidere come organizzare la campagna pubblicitaria, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di pubblicità e tenendo conto dei seguenti vincoli:
- il messaggio pubblicitario deve arrivare, per ciascuna fascia di età, ad almeno due milioni di potenziali acquirenti;
- la quantità di spot trasmessi alla radio non deve superare il 50% degli spot trasmessi in TV;

• la spesa complessiva sostenuta per la pubblicità su riviste non deve superare il 50% della spesa complessiva sostenuta per trasmettere gli spot in TV.
Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 13. Un agricoltore produce nel proprio terreno fragole, kiwi, arance e ciliegie. La frutta viene divisa in cassette e portata al mercato ortofrutticolo utilizzando un furgone che ha la capacità massima di 12 quintali. Nella seguente tabella sono riportati il peso (in chili) di ciascuna cassetta, il prezzo di vendita (euro/chilo) e il costo di produzione (euro/chilo) della frutta:

	Peso	Prezzo	Costo
Fragole	10	2	0.75
Kiwi	12	1.25	0.70
Arance	20	1	0.25
Ciliegie	14	1.50	0.30

L'agricoltore deve decidere il numero di cassette di frutta da trasportare al mercato con il furgone, con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo derivante dalla vendita della frutta (che viene venduta solo a cassette) e tenendo conto che, per avere un buon assortimento, devono essere trasportate almeno 4 cassette di fragole, 6 di kiwi, 8 di arance e 6 di ciliegie.
Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

Esercizio 14. Una compagnia petrolifera deve trasportare settimanalmente, via mare, 4 milioni di tonnellate di petrolio da una piattaforma petrolifera ad una raffineria costiera. Per il trasporto si possono utilizzare tre tipi di petroliera: una superpetroliera da 200000 tonnellate, una petroliera media da 125000 tonnellate e una piccola da 50000 tonnellate. Un viaggio con una superpetroliera costa 200000 euro, uno con una media 100000 euro, mentre una piccola costa 70000 euro per viaggio. Inoltre una superpetroliera ha un potenziale di inquinamento pari allo 0.5%, una media dello 0.25% e una piccola dello 0.1%. Si vuole determinare un piano di trasporto settimanale del petrolio dalla piattaforma alla raffineria considerando che ogni nave può effettuare solo un viaggio, minimizzando il costo complessivo e tenendo presente che, in base ad accordi con le organizzazioni ambientaliste, il numero di petroliere non può essere superiore a 30 e che il potenziale di inquinamento complessivo non deve superare le 100000 tonnellate.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

1.2 Il Metodo grafico

1.2.1 Esercizi da svolgere

Applicare il metodo grafico per risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare:

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 3x_1 + 4x_2 \\ \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 5x_1 + 7x_2 \\ \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & +x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & -3x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & \geq & 0 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max\ Z = -x_1 + x_2 \\ \begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & -2x_2 & \leq & 2 \\ & x_2 & \leq & 4 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 2x_1 + x_2 \\ \begin{array}{rrcr} -x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & -3x_2 & \leq & 3 \\ & x_2 & \leq & 6 \end{array} \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 2x_1 + x_2 \\ \begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & \geq & 6 \\ -x_1 & +x_2 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & -x_2 & \leq & 6 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\multicolumn{4}{l}{\min\ Z = 8x_1 + 3x_2} \\
-x_1 & +10x_2 & \leq & 40 \\
x_1 & & \leq & 8 \\
x_1 & -x_2 & \leq & 5 \\
4x_1 & +5x_2 & \geq & 10 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \geq 0.}
\end{array}$$

1.3 Il Metodo del simplesso

1.3.1 Esercizi svolti

Esercizio 1. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{llllcl}
\multicolumn{6}{l}{\max\ Z = 2x_1 + x_2 + x_3} \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & & \leq & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +x_3 & & \leq & 5 \\
x_1 & +x_2 & +4x_3 & & \leq & 10 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.}
\end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata

$$\begin{array}{lllllllcl}
\multicolumn{9}{l}{\max\ Z = 2x_1 + x_2 + x_3} \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +x_3 & & +x_5 & & & = & 5 \\
x_1 & +x_2 & +4x_3 & & & +x_6 & & = & 10 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.}
\end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{llllllllcl}
(0) & Z & -2x_1 & -x_2 & -x_3 & & & & = & 0 \\
(1) & & x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = & 6 \\
(2) & & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = & 5 \\
(3) & & x_1 & +x_2 & +4x_3 & & & +x_6 & = & 10
\end{array}$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-2	-1	-1	0	0	0	0
x_4	(1)	0	1	3	1	1	0	0	6
x_5	(2)	0	2	-1	1	0	1	0	5
x_6	(3)	0	1	1	4	0	0	1	10

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	-2	0	0	1	0	5
x_4	(1)	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_6	(3)	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{15}{2}$

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	7
x_2	(1)	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	3
x_6	(3)	0	0	0	$\frac{23}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	1	6

Soluzione ottima è $(3, 1, 0, 0, 0, 6)$, con $Z = 7$.

Esercizio 2. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{llll} \max\ Z = 3x_1 + x_2 + 6x_3 & & & \\ 2x_1 & & +x_3 & \leq 10 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & \leq 4 \\ 3x_1 & +x_2 & & \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & & \end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo il problema in forma aumentata

$$\begin{array}{lllllll} \max\ Z = 3x_1 + x_2 + 6x_3 & & & & & & \\ 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & & & = 10 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & & +x_5 & & = 4 \\ 3x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -3x_1 & -x_2 & -6x_3 & & & & = & 0 \\ (1) & & 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & & & = & 10 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & -2x_3 & & +x_5 & & = & 4 \\ (3) & & 3x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & = & 5 \end{array}$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-3	-1	-6	0	0	0	0
x_4	(1)	0	2	0	1	1	0	0	10
x_5	(2)	0	1	1	-2	0	1	0	4
x_6	(3)	0	3	1	0	0	0	1	5

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	9	-1	0	6	0	0	60
x_3	(1)	0	2	0	1	1	0	0	10
x_5	(2)	0	5	1	0	2	1	0	24
x_6	(3)	0	3	1	0	0	0	1	5

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	12	0	0	6	0	1	65
x_3	(1)	0	2	0	1	1	0	0	10
x_5	(2)	0	2	0	0	2	1	-1	19
x_2	(3)	0	3	1	0	0	0	1	5

Soluzione ottima è $(0,5,10,0,19,0)$, con $Z = 65$.

Esercizio 3. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{lllll} \max\ Z = 7x_1 + x_2 + 8x_3 & & & & \\ 3x_1 \ \ -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 6 \\ \qquad\ \ x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq & 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata

$$\begin{array}{lllllll} \max\ Z = 7x_1 + x_2 + 8x_3 & & & & & & \\ 3x_1 \ \ -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & = & 6 \\ \qquad\ \ x_2 & +3x_3 & +4x_4 & & +x_6 & = & 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{lllllllll} (0) & Z & -7x_1 & -x_2 & -8x_3 & & & & = 0 \\ (1) & & 3x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & = 6 \\ (2) & & & x_2 & +3x_3 & +4x_4 & & +x_6 & = 9 \end{array}$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-7	-1	-8	0	0	0	0
x_5	(1)	0	3	-1	1	1	1	0	6
x_6	(2)	0	0	1	3	4	0	1	9

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-7	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	24
x_5	(1)	0	3	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	3
x_3	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{13}{9}$	0	$\frac{89}{9}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{9}$	31
x_1	(1)	0	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	1
x_3	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Iterazione 3

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{47}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	44
x_1	(1)	0	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5
x_2	(2)	0	0	1	3	4	0	1	9

Soluzione ottima è $(5, 9, 0, 0, 0, 0)$, con $Z = 44$.

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso:

$$\begin{array}{lllll} \max\ Z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & & & & \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq\ 9 \\ 2x_1 & +5x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq\ 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata

$$\begin{array}{llllllll} \max\ Z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & & & & & & & \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & & = & 9 \\ 2x_1 & +5x_2 & -2x_3 & -x_4 & & +x_6 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. & & & & & & & \end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{lllllllll} (0) & Z & -5x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -4x_4 & & & = 0 \\ (1) & & 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +x_5 & & = 9 \\ (2) & & 2x_1 & +5x_2 & -2x_3 & -x_4 & & +x_6 & = 8 \end{array}$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-5	-2	-2	-4	0	0	0
x_5	(1)	0	3	1	-1	2	1	0	9
x_6	(2)	0	2	5	-2	-1	0	1	8

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	15
x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
x_6	(2)	0	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	2

Poichè non c'è nessuna variabile candidata ad uscire dalla base significa che la regione ammissibile e illimitata e quindi

$$Z = +\infty.$$

1.4 Il Metodo del simplesso a due fasi

1.4.1 Esercizi svolti

Esercizio 5. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso a due fasi:

$$\min\ Z = 3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq\ 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq\ 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & =\ 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Svolgimento. Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo una variabile slack, una variabile surplus e due variabili artificiali:

$$\begin{array}{lllllllll} \multicolumn{9}{l}{\min\ Z = 3x_1 + x_2 + x_3} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & +\overline{x}_7 & = & 6 \\ \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \overline{x}_6, \overline{x}_7 \geq 0.} \end{array}$$

Scriviamo ora i problemi che risolve il metodo del simplesso a due fasi:

$$\begin{array}{lllllllll} \multicolumn{9}{l}{\text{I Fase}} \\ \multicolumn{9}{l}{\min\ Z = \overline{x}_6 + \overline{x}_7} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & +\overline{x}_7 & = & 6 \\ \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \overline{x}_6, \overline{x}_7 \geq 0.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \multicolumn{7}{l}{\text{II Fase}} \\ \multicolumn{7}{l}{\min\ Z = 3x_1 + x_2 + x_3} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 6 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.} \end{array}$$

Poichè il problema è di minimo dobbiamo trasformarlo in un problema di massimo cambiando il segno ai due membri della funzione obiettivo in entrambi i problemi:

$$
\begin{array}{l}
\text{I Fase} \\
\max\ -Z = -\overline{x}_6 - \overline{x}_7 \\
\begin{array}{rrrrrrrcl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\
2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & +\overline{x}_7 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \overline{x}_6, \overline{x}_7 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{II Fase} \\
\max\ -Z = -3x_1 - x_2 - x_3 \\
\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 3 \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 4 \\
2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Le equazioni della I fase sono

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrcl}
(0) & -Z & & & & & & +\overline{x}_6 & +\overline{x}_7 & = & 0 \\
(1) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\
(2) & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\
(3) & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & \overline{x}_7 & = & 6.
\end{array}
$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le nuove equazioni

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrcl}
(0) & -Z & -2x_1 & -x_2 & -3x_3 & & +x_5 & & +\overline{x}_7 & = & -4 \\
(1) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\
(2) & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\
(3) & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & +\overline{x}_7 & = & 6
\end{array}
$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (3), ottenendo le equazioni finali per la I fase:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrcl}
(0) & -Z & -4x_1 & -4x_2 & -2x_3 & & +x_5 & & & = & -10 \\
(1) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = & 3 \\
(2) & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & & = & 4 \\
(3) & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & +\overline{x}_7 & = & 6.
\end{array}
$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{x}_6$	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	-4	-4	-2	0	1	0	0	-10
x_4	(1)	0	1	1	1	1	0	0	0	3
$\overline{x}_6$	(2)	0	2	1	1	0	-1	1	0	4
$\overline{x}_7$	(3)	0	2	3	1	0	0	0	1	6

Iterazione 1										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{x}_6$	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	0	-2	0	0	-1	2	0	-2
x_4	(1)	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_1	(2)	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
$\overline{x}_7$	(3)	0	0	2	0	0	1	-1	1	2

Iterazione 2										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{x}_6$	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_4	(1)	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Soluzione ottima della prima fase è $(3/2, 1, 0, 1/2, 0)$. Dal tableau finale della prima fase dobbiamo eliminare le colonne relative alle variabili artificiali, sostituire la funzione obiettivo e porre il sistema di equazioni in forma canonica. Il tableau relativo alle prime due operazioni è il seguente:

II Fase-Tablaeu preliminare

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	3	1	1	0	0	0
x_4	(1)	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

II Fase-Eliminazione coeff. di x_1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{2}$
x_4	(1)	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

II Fase-Eliminazione coeff. di x_2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{11}{2}$
x_4	(1)	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

II Fase-Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{11}{2}$
x_4	(1)	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	(2)	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

II Fase-Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	0	0	1	2	-5
x_3	(1)	0	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$	1
x_1	(2)	0	1	0	0	-1	-1	1
x_2	(3)	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Esercizio 6. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso a due fasi:

$$\begin{array}{llcl}
\max\ Z = x_1 + 5x_2 & & & \\
x_1 & -x_2 & \leq & 3 \\
5x_1 & -2x_2 & = & 8 \\
-x_1 & +3x_2 & \geq & 1 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & &
\end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo una variabile slack, una variabile surplus e due variabili artificiali:

$$\begin{array}{llllllcl}
\max\ Z = x_1 + 5x_2 & & & & & & & \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
5x_1 & -2x_2 & & +\overline{x}_4 & & & = & 8 \\
-x_1 & +3x_2 & & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 1 \\
x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6 \geq 0. & & & & & & &
\end{array}$$

Scriviamo ora i problemi che il metodo a due fasi deve risolvere:

I Fase

$$
\begin{array}{l}
\max\ Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_6 \\
\begin{array}{cccccccl}
x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
5x_1 & -2x_2 & & +\overline{x}_4 & & & = & 8 \\
-x_1 & +3x_2 & & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 1
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6 \geq 0.
\end{array}
$$

II Fase

$$
\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + 5x_2 \\
\begin{array}{cccccl}
x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 3 \\
5x_1 & -2x_2 & & & = & 8 \\
-x_1 & +3x_2 & & -x_5 & = & 1
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Le equazioni della I fase sono

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
(0) & Z & & & & +\overline{x}_4 & & +\overline{x}_6 & = & 0 \\
(1) & & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
(2) & & 5x_1 & -2x_2 & & +\overline{x}_4 & & & = & 8 \\
(3) & & -x_1 & +3x_2 & & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 1.
\end{array}
$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le nuove equazioni

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
(0) & Z & -5x_1 & +2x_2 & & & & +\overline{x}_6 & = & -8 \\
(1) & & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
(2) & & 5x_1 & -2x_2 & & +\overline{x}_4 & & & = & 8 \\
(3) & & -x_1 & +3x_2 & & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 1
\end{array}
$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (3), ottenendo le equazioni finali per la I fase:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
(0) & Z & -4x_1 & -x_2 & & & +x_5 & & = & -9 \\
(1) & & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 3 \\
(2) & & 5x_1 & -2x_2 & & +\overline{x}_4 & & & = & 8 \\
(3) & & -x_1 & +3x_2 & & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 1.
\end{array}
$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

I Fase-Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	1	-4	-1	0	0	1	0	-9
x_3	(1)	0	1	-1	1	0	0	0	3
$\overline{x}_4$	(2)	0	5	-2	0	1	0	0	8
$\overline{x}_6$	(3)	0	-1	3	0	0	-1	1	1

I Fase-Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{13}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{13}{5}$
x_3	(1)	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$
$\overline{x}_6$	(3)	0	0	$\frac{13}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{13}{5}$

I Fase-Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	0	1	0
x_3	(1)	0	0	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	2
x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

Terminata la I Fase del metodo del simplesso si devono eliminare le colonne relative alle variabili artificiale e deve essere sostituita la funzione obiettivo.

Tableau Finale I Fase con la funzione obiettivo della II Fase

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-5	0	0	0
x_3	(1)	0	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	2
x_2	(3)	0	0	1	0	$-\frac{5}{13}$	1

II Fase-Eliminazione coefficiente di x_1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	-5	0	$-\frac{2}{13}$	2
x_3	(1)	0	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	2
x_2	(3)	0	0	1	0	$-\frac{5}{13}$	1

II Fase-Eliminazione coefficiente di x_2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$-\frac{27}{13}$	7
x_3	(1)	0	0	0	1	$-\frac{3}{13}$	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$-\frac{2}{13}$	2
x_2	(3)	0	0	1	0	$-\frac{5}{13}$	1

A questo punto non è verificato il test di ottimalità in quanto esiste un coefficiente negativo nell'equazione (0), tuttavia nessuna variabile in base soddisfa il test del minimo rapporto perchè nella colonna relativa a x_5, variabile entrante in base, tutti i coefficienti sono negativi. Questa situazione si verifica quando il problema non ha soluzione, cioè la funzione obiettivo è illimitata (il valore di x_5, e quindi della funzione obiettivo, può crescere indefinitamente senza che alcuna altra variabile assuma valore zero).

Esercizio 7. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso a due fasi:

$$\begin{array}{lllll}
\multicolumn{5}{l}{\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3} \\
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & \geq & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & \geq & 6 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.}
\end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo due variabili surplus e due variabili artificiali:

$$\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{l}{\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3} \\
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, \overline{x}_5, \overline{x}_7 \geq 0.}
\end{array}$$

Scriviamo ora i problemi che risolve il metodo del simplesso a due fasi:

I Fase

$$\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{l}{\min\ Z = \overline{x}_5 + \overline{x}_7} \\
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, \overline{x}_5, \overline{x}_7 \geq 0.}
\end{array}$$

II Fase

$$\begin{array}{lllllll}
\multicolumn{7}{l}{\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3} \\
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & & = & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_6 & = & 6 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 \geq 0.}
\end{array}$$

Poichè il problema è di minimo dobbiamo trasformarlo in un problema di massimo cambiando il segno ai due membri della funzione obiettivo in entrambi i problemi:

I Fase

$$\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{l}{\max\ -Z = -\overline{x}_5 - \overline{x}_7} \\
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, \overline{x}_5, \overline{x}_7 \geq 0.}
\end{array}$$

II Fase

$$
\begin{array}{l}
\max\ -Z = -6x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\
\begin{array}{rrrrrcl}
-4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & & = & 2 \\
7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_6 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 \geq 0.
\end{array}
$$

Le equazioni della I fase sono

$$
\begin{array}{llrrrrrrrcl}
(0) & -Z & & & & & +\overline{x}_5 & & +\overline{x}_7 & = & 0 \\
(1) & & -4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
(2) & & 7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6.
\end{array}
$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni

$$
\begin{array}{llrrrrrrrcl}
(0) & -Z & +4x_1 & -3x_2 & -3x_3 & +x_4 & & & +\overline{x}_7 & = & -2 \\
(1) & & -4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
(2) & & 7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6
\end{array}
$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le equazioni finali per la I fase:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrcl}
(0) & -Z & -3x_1 & -4x_2 & -x_3 & +x_4 & & +x_6 & & = & -8 \\
(1) & & -4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & & = & 2 \\
(2) & & 7x_1 & +x_2 & -2x_3 & & & -x_6 & +\overline{x}_7 & = & 6.
\end{array}
$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	-3	-4	-1	1	0	1	0	-8
$\overline{x}_5$	(1)	0	-4	3	3	-1	1	0	0	2
$\overline{x}_7$	(2)	0	7	1	-2	0	0	-1	1	6

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{25}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{16}{3}$
x_2	(1)	0	$\boxed{-\frac{4}{3}}$	1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
$\overline{x}_7$	(2)	0	$\boxed{\frac{25}{3}}$	0	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{16}{3}$

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	$\overline{x}_7$	b_i
Z	(0)	-1	0	0	1	0	1	0	1	0
x_2	(1)	0	0	1	$\frac{13}{25}$	$-\frac{7}{25}$	$\frac{7}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{38}{25}$
x_1	(2)	0	1	0	$-\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{16}{25}$

Soluzione ottima della prima fase è $(16/25, 38/25, 0)$. Dal tableau finale della prima fase dobbiamo eliminare le colonne relative alle variabili artificiali, sostituire la funzione obiettivo e porre il sistema di equazioni in forma canonica. Il tableau relativo alle prime due operazioni è il seguente:

II Fase-Tablaeu preliminare

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	-1	6	3	4	0	0	0
x_2	(1)	0	0	1	$\frac{13}{25}$	$\frac{7}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{38}{25}$
x_1	(2)	0	1	0	$-\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{16}{25}$

II Fase-Eliminazione coeff. di x_2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	-1	6	0	$\frac{61}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{12}{25}$	$-\frac{114}{25}$
x_2	(1)	0	0	1	$\frac{13}{25}$	$\frac{7}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{38}{25}$
x_1	(2)	0	1	0	$-\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{16}{25}$

II Fase-Eliminazione coeff. di x_1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	-1	0	0	$\frac{23}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{42}{5}$
x_2	(1)	0	0	1	$\frac{13}{25}$	$-\frac{7}{25}$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{38}{25}$
x_1	(2)	0	1	0	$-\frac{9}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{3}{25}$	$\frac{16}{25}$

Poichè è verificato il test di ottimalità la BFS trovata trovata al termine della prima fase è soluzione ottima del problema. Il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima è $Z = 42/5$.

Esercizio 8. Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo del simplesso a due fasi:

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \begin{array}{cccll} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & \geq & 6 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Svolgimento. Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo una variabile surplus e due variabili artificiali:

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \begin{array}{cccccccl} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\ 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3, x_5, \overline{x}_4, \overline{x}_6 \geq 0. \end{array}$$

Scriviamo ora i problemi che risolve il metodo del simplesso a due fasi:

$$\begin{array}{l}
\text{I Fase} \\
\min\ Z = \overline{x}_4 + \overline{x}_6 \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\
3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_5, \overline{x}_4, \overline{x}_6 \geq 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{II Fase} \\
\min\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\begin{array}{cccccc}
x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = & 3 \\
3x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_5 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0.
\end{array}$$

Poichè il problema è di minimo dobbiamo trasformarlo in un problema di massimo cambiando il segno ai due membri della funzione obiettivo in entrambi i problemi:

$$\begin{array}{l}
\text{I Fase} \\
\max\ -Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_6 \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\
3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_5, \overline{x}_4, \overline{x}_6 \geq 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{II Fase} \\
\max\ -Z = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\
\begin{array}{cccccc}
x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = & 3 \\
3x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_5 & = & 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0.
\end{array}$$

Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0) & -Z & & & & +\overline{x}_4 & & +\overline{x}_6 & = & 0 \\
(1) & & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\
(2) & & 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6.
\end{array}$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0) & -Z & -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & & & +\overline{x}_6 & = & -3 \\
(1) & & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\
(2) & & 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6
\end{array}$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le equazioni finali per la I fase:

$$\begin{array}{lcccccccl}
(0) & -Z & -4x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = & -9 \\
(1) & & x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 3 \\
(2) & & 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 6.
\end{array}$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	-4	1	1	0	1	0	-9
$\overline{x}_4$	(1)	0	1	-2	2	1	0	0	3
$\overline{x}_6$	(2)	0	3	1	-3	0	-1	1	6

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{7}{3}$	-3	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
$\overline{x}_4$	(1)	0	0	$-\frac{7}{3}$	3	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_1	(2)	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
x_3	(1)	0	0	$-\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{4}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$

Soluzione ottima della prima fase è $(7/3, 0, 1/3)$. Dal tableau finale della prima fase dobbiamo eliminare le colonne relative alle variabili artificiali, sostituire la funzione obiettivo e porre il sistema di equazioni in forma canonica. Il tableau relativo alle prime due operazioni è il seguente:

II Fase-Tablaeu preliminare

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	3	2	4	0	0
x_2	(1)	0	0	$-\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$

II Fase-Eliminazione coeff. di x_1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{2}{3}$	-7
x_2	(1)	0	0	$-\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$

II Fase-Eliminazione coeff. di x_3

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{58}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{25}{3}$
x_2	(1)	0	0	$-\frac{7}{9}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
x_1	(2)	0	1	$-\frac{4}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$

Poichè è verificato il test di ottimalità la BFS trovata trovata al termine della prima fase è soluzione ottima del problema. Il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima è $Z = 25/3$.

1.4.2 Esercizi da svolgere

Applicare il metodo del simplesso a dure fasi per risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare.

Esercizio 1.

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leq & 6 \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 10 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Esercizio 2.

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \begin{array}{rrrcr} 4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = & 8 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Esercizio 3.

$$\begin{array}{l} \min\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 12 \\ 6x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 12 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Esercizio 4.

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 7x_1 & & -x_3 & \leq & 14 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Esercizio 5.

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 8 \\ x_1 & +4x_2 & +5x_3 & \leq & 20 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Capitolo 2

Problemi di Trasporto e Assegnamento

2.1 Il problema del trasporto

Esercizio 1. Applicare la Regola del Nord-Ovest ed i metodi di Russell e Vogel per determinare le BFS iniziali del problema del trasporto con 2 sorgenti, con offerta rispettivamente 80 e 40 e 3 destinazioni con domanda 25, 50 e 30 e con matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 40 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che è necessario introdurre una destinazione fittizia, $4D$, poichè

$$\sum_i s_i = 120 \neq \sum_j d_j = 105$$

che serva ad assorbire l'offerta eccedente pari a 15. I costi relativi a tale destinazione saranno posti tutti uguali a zero, quindi la matrice dei costi diviene:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 40 & 15 & 0 \\ 20 & 25 & 30 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{10}$ **25**	$\boxed{40}$ **50**	$\boxed{15}$ **5**	$\boxed{0}$	80	
2	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{30}$ **25**	$\boxed{0}$ **15**	40	
d_j	25	50	30	15	$Z = 3075$	
$\overline{v}_j$						

La BFS iniziale è:

$$(25, 50, 5, 0, 0, 0, 25, 25)$$

per la quale il valore della funzione obiettivo è $Z = 3075$.
Applichiamo ora il metodo di Russell, scrivendo il tableau:

	1	2	3	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{10}$ **−50**	$\boxed{40}$ **−40**	$\boxed{15}$ **−55**	$\boxed{0}$ **−40**	80	40
2	$\boxed{20}$ **−30**	$\boxed{25}$ **−45**	$\boxed{30}$ **−30**	$\boxed{0}$ **−30**	40	30
d_j	25	50	30	15		
$\overline{v}_j$	20	40	30	0		

Variabile in base è x_{13} che poniamo uguale a 30, in modo tale da cancellare la colonna 3.

	1	2	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{10}$ **−50**	$\boxed{40}$ **−40**	$\boxed{0}$ **−25**	50	40
2	$\boxed{20}$ **−25**	$\boxed{25}$ **−25**	$\boxed{0}$ **−25**	40	25
d_j	25	50	15		
$\overline{v}_j$	20	25	0		

Variabile in base è x_{11}, per cui poniamo

$$x_{11} = 25$$

e cancelliamo la colonna 1.

	2		4D		s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{10}$	$-\mathbf{10}$	$\boxed{0}$	$-\mathbf{20}$	25	10
2	$\boxed{20}$	$-\mathbf{10}$	$\boxed{0}$	$-\mathbf{20}$	40	20
d_j	50		15			
$\overline{v}_j$	20		0			

Le variabili con il coefficiente più piccolo sono x_{14} e x_{22}. Scegliamo la prima solo perchè ha un costo inferiore (la scelta comunque è arbitraria). Poniamo quindi

$$x_{14} = 15$$

cancelliamo la colonna 4D, cosicchè le due restanti variabili sono in base

$$x_{12} = 25, \qquad x_{22} = 40.$$

La BFS trovata con il metodo di Russell è

$$(25, 10, 30, 15, 0, 40, 0, 0)$$

in cui il valore della funzione obiettivo è

$$Z = 250 + 400 + 450 + 1000 = 2100.$$

Applichiamo ora il metodo di Vogel, la cui tabella iniziale è

		Destinazioni					
		1	2	3	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	10	40	15	0	80	10
	2	20	25	30	0	40	20
	d_j	25	50	30	15		
	Diff. Col.	10	15	15	0		

Poniamo

$$x_{24} = 15$$

e cancelliamo la colonna 4:

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	10	40	15	80	5
	2	20	25	30	25	5
	d_j	25	50	30		
	Diff. Col.	10	15	15		

Scegliamo la colonna 2 (la differenza massima è 15), poniamo

$$x_{22} = 25$$

e cancelliamo la riga 2. Le restanti tre variabili sono tutte in base

$$x_{11} = 10, \quad x_{12} = 25, \quad x_{13} = 30.$$

La BFS trovata con il metodo di Vogel è

$$(25, 25, 30, 0, 0, 25, 0, 15)$$

in cui

$$Z = 250 + 1000 + 450 + 625 = 2325.$$

Esercizio 2. Determinare la BFS iniziale per il problema del trasporto con 2 sorgenti, con offerta rispettivamente 60 e 40 e 4 destinazioni con domanda 25, 15, 28 e 32 e matrice dei costi

$$C = \left[\begin{array}{cccc} 20 & 40 & 20 & 10 \\ 30 & 20 & 60 & 10 \end{array} \right],$$

applicando la Regola del Nord-Ovest ed i metodi di Russell e Vogel.
Svolgimento. Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ 25	$\boxed{40}$ 15	$\boxed{20}$ 20	$\boxed{10}$	60	
2	$\boxed{30}$	$\boxed{20}$	$\boxed{60}$ 8	$\boxed{10}$ 32	40	
d_j	25	15	28	32	$Z = 2300$	
$\overline{v}_j$						

Applichiamo ora il metodo di Russell

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ -50	$\boxed{40}$ -40	$\boxed{20}$ -80	$\boxed{10}$ -40	60	40
2	$\boxed{30}$ -60	$\boxed{20}$ -80	$\boxed{60}$ -60	$\boxed{10}$ -60	40	60
d_j	25	15	28	32		
$\overline{v}_j$	30	40	60	10		

Poniamo $x_{13} = 28$ e cancelliamo la colonna 3.

	1	2	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ -50	$\boxed{40}$ -40	$\boxed{10}$ -40	12	40
2	$\boxed{30}$ -30	$\boxed{20}$ -50	$\boxed{10}$ -30	60	30
d_j	25	15	32		
$\overline{v}_j$	30	40	10		

Poniamo $x_{11} = 12$ e cancelliamo la riga 1. Le variabili restanti sono tutte in base:

$$x_{21} = 13, \quad x_{22} = 15, \quad x_{24} = 32.$$

La BFS trovata con il metodo di Russell è

$$(12, 0, 28, 0, 13, 15, 0, 32)$$

in cui

$$Z = 240 + 560 + 390 + 300 + 320 = 1810.$$

Applichiamo ora il metodo di Vogel:

		Destinazioni					
		1	2	3	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	40	20	10	60	10
	2	30	20	60	10	40	10
	d_j	25	15	28	32		
	Diff. Col.	10	20	40	0		

Poniamo $x_{13} = 28$ e cancelliamo la colonna 3:

		Destinazioni				
		1	2	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	40	10	32	10
	2	30	20	10	40	10
	d_j	25	15	32		
	Diff. Col.	10	20	0		

Poniamo $x_{22} = 15$ e cancelliamo la colonna 2:

		Destinazioni			
		1	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	10	32	10
	2	30	10	25	20
	d_j	25	32		
	Diff. Col.	10	0		

Poniamo $x_{24} = 15$ e cancelliamo la riga 2. Le restanti variabili sono in base:

$$x_{11} = 25, \qquad x_{14} = 7.$$

La BFS trovata con il metodo di Vogel è

$$(25, 0, 28, 7, 0, 15, 0, 15)$$

in cui

$$Z = 500 + 560 + 70 + 300 + 150 = 1580.$$

Esercizio 3. Si vuole determinare la BFS iniziale del problema del trasporto con tre sorgenti, con offerta rispettivamente 20, 60 e 30 e tre destinazioni con domanda 15, 50 e 10, con matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & - \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

applicando la Regola del Nord-Ovest ed i metodi di Russell e Vogel.
Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che

$$\sum_i s_i = 110, \qquad \sum_j d_j = 75,$$

quindi è necessario introdurre una destinazione fittizia, $4D$, che serva ad assorbire l'offerta eccedente pari a 35. I costi relativi a tale destinazione saranno posti tutti uguali a zero. Inoltre si deve mettere in evidenza che la sorgente 2 non deve inviare merce alla destinazione 3, pertanto dobbiamo introdurre una penalizzazione per la variabile x_{23} ponendo $c_{23} = M$. La matrice dei costi diviene pertanto la seguente:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & M & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	20	
2	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$ 45	$\boxed{M}$ 10	$\boxed{0}$ 5	60	
3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 30	30	
d_j	15	50	10	35	$Z = 300 + 10M$	
$\overline{v}_j$						

Applichiamo ora il metodo di Russell:

	1	2	3	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-2-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-4}$	20	4
2	$\boxed{1}$ $\mathbf{-3-M}$	$\boxed{5}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{M}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-M}$	40	M
3	$\boxed{1}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-4}$	30	4
d_j	15	50	10	35		
$\overline{v}_j$	4	5	M	0		

Il coefficiente della variabile x_{21} è il più piccolo (M è un numero positivo molto grande tuttavia $-3-M$ è inferiore a $-2-M$). Poniamo quindi

$$x_{21} = 15$$

e cancelliamo la colonna 1:

	2	3	$4D$	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{3}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-1-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-3}$	20	3
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{M}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-M}$	45	M
3	$\boxed{2}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-M}$	$\boxed{0}$ $\mathbf{-4}$	30	4
d_j	50	10	35		
$\overline{v}_j$	5	M	0		

Poniamo

$$x_{13} = 10$$

e cancelliamo la colonna 3:

	2	4D	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{0}$ -3	10	3
2	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{0}$ -5	45	5
3	$\boxed{2}$ -5	$\boxed{0}$ -2	30	2
d_j	50	35		
$\overline{v}_j$	5	0		

Poniamo $x_{24} = 35$ e cancelliamo la colonna 4D. Le tre restanti variabili sono in base

$$x_{12} = 10, \quad x_{22} = 10, \quad x_{32} = 30.$$

La BFS trovata con il metodo di Russell è

$$(0, 10, 10, 0, 15, 10, 0, 35, 0, 30, 0, 0)$$

in cui

$$Z = 30 + 20 + 15 + 50 + 60 = 175.$$

Applichiamo ora il metodo di Vogel:

		Destinazioni					
		1	2	3	$4D$	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	4	3	2	0	20	2
	2	1	5	M	0	60	1
	3	1	2	4	0	30	1
	d_j	15	50	10	35		
	Diff. Col.	0	1	2	0		

Ci sono due possibilità di scelta: la riga 1 (in cui il costo inferiore è associato alla variabile x_{14}) e la colonna 3 (il cui costo inferiore è associato alla variabile x_{13}). Tuttavia ponendo

$$x_{13} = 10$$

si cancella la colonna 3 dove è presente l'unico costo uguale a M.

		Destinazioni				
		1	2	$4D$	s_i	Differ. Righe
	1	4	3	0	10	3
Sorgenti	2	1	5	0	60	1
	3	1	2	0	30	1
	d_j	15	50	35		
	Diff. Col.	0	1	0		

Poniamo $x_{14} = 10$ e cancelliamo la riga 1:

		Destinazioni				
		1	2	$4D$	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	1	5	0	60	1
	3	1	2	0	30	1
	d_j	15	50	25		
	Diff. Col.	0	3	0		

Poniamo $x_{32} = 30$ e cancelliamo la riga 3. Le restanti variabili sono in base:

$$x_{21} = 15, \qquad x_{22} = 20, \qquad x_{24} = 25.$$

La BFS trovata con il metodo di Vogel è

$$(0, 0, 10, 10, 15, 20, 0, 25, 0, 30, 0, 0)$$

in cui

$$Z = 20 + 15 + 100 + 60 = 195.$$

Esercizio 4. Determinare la BFS iniziale del problema del trasporto con 3 nodi sorgente, ciascuno con offerta pari a 20 e 3 destinazioni con domanda 10, 15 e 35, e con matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

applicando la Regola del Nord-Ovest ed i metodi di Russell e Vogel.
Svolgimento.

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{1}$ **10**	$\boxed{3}$ **10**	$\boxed{2}$	20	
2	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$ **5**	$\boxed{1}$ **15**	20	
3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ **20**	20	
d_j	10	15	35	$Z = 135$	
$\overline{v}_j$					

Applichiamo il metodo di Russell:

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{1}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-4}$	20	3
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-7}$	20	5
3	$\boxed{1}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-3}$	20	3
d_j	10	15	35		
$\overline{v}_j$	5	4	3		

Poniamo

$$x_{11} = 10$$

e cancelliamo la colonna 1:

	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{3}$ $-\mathbf{4}$	$\boxed{2}$ $-\mathbf{4}$	10	3
2	$\boxed{4}$ $-\mathbf{4}$	$\boxed{1}$ $-\mathbf{6}$	20	4
3	$\boxed{2}$ $-\mathbf{5}$	$\boxed{3}$ $-\mathbf{3}$	20	3
d_j	15	35		
$\overline{v}_j$	4	3		

Poniamo

$$x_{23} = 20$$

e cancelliamo la riga 2:

	1	2	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{3}$ $-\mathbf{3}$	$\boxed{2}$ $-\mathbf{4}$	10	3
2	$\boxed{2}$ $-\mathbf{4}$	$\boxed{3}$ $-\mathbf{3}$	20	3
d_j	15	15		
$\overline{v}_j$	3	3		

Poniamo $x_{13} = 10$ e cancelliamo la riga 1. Le restanti variabili sono in base

$$x_{32} = 15, \quad x_{33} = 5.$$

La BFS trovata con il metodo di Russell è

$$(10, 0, 10, 0, 0, 20, 0, 15, 5)$$

in cui

$$Z = 10 + 20 + 20 + 30 + 15 = 95.$$

Applichiamo ora il metodo di Vogel:

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
	1	1	3	2	20	1
Sorgenti	2	5	4	1	20	3
	3	1	2	3	20	1
	d_j	10	15	35		
	Diff. Col.	0	1	1		

Poniamo $x_{23} = 20$ e cancelliamo la riga 2:

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	1	3	2	20	1
	3	1	2	3	20	1
	d_j	10	15	15		
	Diff. Col.	0	1	1		

Poniamo $x_{11} = 10$ e cancelliamo la colonna 1:

		Destinazioni			
		2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	3	2	10	1
	3	2	3	20	1
	d_j	15	15		
	Diff. Col.	1	1		

Poniamo $x_{13} = 10$ e cancelliamo la riga 1, le restanti variabili sono in base

$$x_{32} = 15, \quad x_{33} = 5.$$

La BFS trovata è la stessa trovata con il metodo di Russell.
Esercizio 5. Utilizzate il metodo di Russell per determinare la BFS iniziale del problema del trasporto con 3 origini, 4 destinazioni, definito dalla seguente matrice dei costi:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

con offerta pari rispettivamente a 30, 40 e 30 e domanda 20, 30, 40 e 10.
Svolgimento.

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-4}$	30	4
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-6}$	40	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-3}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-3}$	30	3
d_j	20	30	40	10		
$\overline{v}_j$	5	2	2	3		

Scegliamo $x_{24} = 10$ e cancelliamo la quarta colonna.

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-5}$	30	4
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-5}$	30	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-3}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-4}$	30	3
d_j	20	30	40		
$\overline{v}_j$	5	2	2		

Scegliamo $x_{22} = 30$ e cancelliamo la seconda riga.

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-4}$	30	4
2	$\boxed{3}$ $\mathbf{-4}$	$\boxed{2}$ $\mathbf{-3}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-3}$	30	3
d_j	20	0	40		
$\overline{v}_j$	4	2	1		

Scegliamo $x_{13} = 30$ e cancelliamo la prima riga, cosicchè le altre variabili in base sono quelle restanti, cioe $x_{31} = 20$, $x_{32} = 0$ e $x_{33} = 10$.
La BFS trovata applicando il metodo di Russell è

$$(0, 0, 30, 0, 0, 30, 0, 10, 20, 0, 10, 0).$$

Esercizio 6. Trovare la BFS iniziale del problema di trasporto definito dalla seguente matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

e con offerte pari rispettivamente a 10, 50 e 20 e domande 30, 40 e 10, utilizzando i metodi di Vogel e di Russell.
Svolgimento. Applicando il metodo di Vogel si ha la seguente situazione iniziale

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	1	6	5	10	4
	2	5	4	1	50	3
	3	3	3	4	20	0
	d_j	30	40	10		
	Diff. Col.	2	1	3		

Si sceglie come variabile in base x_{11}, si pone $x_{11} = 10$ e si cancella la prima riga.

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	5	4	1	50	3
	3	3	3	4	20	0
	d_j	20	40	10		
	Diff. Col.	2	1	3		

Si sceglie come variabile in base x_{23}, si pone $x_{23} = 10$ e si cancella la terza colonna.

		Destinazioni			
		1	2	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	5	4	40	1
	3	3	3	20	0
	d_j	20	40		
	Diff. Col.	2	1		

Si sceglie come variabile in base x_{31}, si pone $x_{31} = 20$ e si cancella la prima colonna.

		Destinazioni		
		2	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	4	40	–
	3	3	0	–
	d_j	40		
	Diff. Col.	–		

Le restanti variabili in base sono $x_{22} = 40$ e $x_{32} = 0$.
La BFS trovata con il metodo di Vogel è:

$$(10, 0, 0, 0, 40, 10, 20, 0, 0).$$

Per applicare il metodo di Russell scriviamo la consueta tabella:

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{1}$ $\mathbf{-10}$	$\boxed{6}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{5}$ $\mathbf{-6}$	10	6
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-9}$	50	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	20	4
d_j	30	40	10		
$\overline{v}_j$	5	6	5		

Scegliamo $x_{11} = 10$ e cancelliamo la prima riga.

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
2	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{1}$ -8	50	5
3	$\boxed{3}$ -6	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{4}$ -4	20	4
d_j	20	40	10		
$\overline{v}_j$	5	4	4		

Scegliamo $x_{23} = 10$ e cancelliamo la terza colonna.

	1	2	s_i	$\overline{u}_i$
2	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{4}$ -5	40	5
3	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{3}$ -4	20	3
d_j	20	40		
$\overline{v}_j$	5	4		

Scegliamo $x_{31} = 20$, cancelliamo la prima colonna, in modo tale che le variabili rimaste sono entrambe in base: $x_{22} = 40$ e $x_{32} = 0$.
La BFS trovata con il metodo di Russell è:

$$(10, 0, 0, 0, 40, 10, 20, 0, 0).$$

Osserviamo che i due metodi hanno fornito la stessa soluzione iniziale.
Esercizio 7. Trovare la BFS iniziale del problema di trasporto definito dalla seguente matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

e con offerte pari rispettivamente a 100, 110 e 90 e domande 95, 85 e 120, utilizzando i metodi di Vogel e di Russell.
Svolgimento. Applicando il metodo di Vogel si ha la seguente situazione iniziale

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	4	5	7	100	1
	2	4	4	5	110	0
	3	4	4	4	90	0
	d_j	95	85	120		
	Diff. Col.	0	0	1		

Si sceglie come variabile in base x_{33}, si pone $x_{33} = 90$ e si cancella la terza riga.

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	4	5	7	100	1
	2	4	4	5	110	0
	d_j	95	85	30		
	Diff. Col.	0	1	2		

Si sceglie come variabile in base x_{23}, si pone $x_{23} = 30$ e si cancella la terza colonna.

		Destinazioni			
		1	2	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	4	5	100	1
	2	4	4	80	0
	d_j	95	85		
	Diff. Col.	0	1		

Si sceglie come variabile in base x_{11}, si pone $x_{11} = 95$ e si cancella la prima colonna, quindi le restanti variabili in base sono $x_{12} = 5$ e $x_{22} = 80$.
La BFS trovata con il metodo di Vogel è:

$$(95, 5, 0, 0, 80, 30, 0, 0, 90).$$

Per applicare il metodo di Russell scriviamo la tabella:

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ $-\mathbf{7}$	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	$\boxed{7}$ $-\mathbf{7}$	100	7
2	$\boxed{4}$ $-\mathbf{7}$	$\boxed{4}$ $-\mathbf{6}$	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	110	5
3	$\boxed{4}$ $-\mathbf{4}$	$\boxed{4}$ $-\mathbf{5}$	$\boxed{4}$ $-\mathbf{7}$	90	4
d_j	95	85	120		
$\overline{v}_j$	4	5	7		

Scegliamo $x_{11} = 95$ e cancelliamo la prima colonna.

	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	$\boxed{7}$ $-\mathbf{7}$	5	7
2	$\boxed{4}$ $-\mathbf{6}$	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	110	5
3	$\boxed{4}$ $-\mathbf{5}$	$\boxed{4}$ $-\mathbf{7}$	90	4
d_j	85	120		
$\overline{v}_j$	5	7		

Scegliamo $x_{33} = 90$ e cancelliamo la terza riga.

	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	$\boxed{7}$ $-\mathbf{7}$	5	7
2	$\boxed{4}$ $-\mathbf{6}$	$\boxed{5}$ $-\mathbf{7}$	110	5
d_j	85	30		
$\overline{v}_j$	5	7		

Scegliamo $x_{23} = 30$, cancelliamo la terza colonna, in modo tale che le variabili rimaste sono entrambe in base: $x_{24} = 80$ e $x_{12} = 5$.
La BFS trovata con il metodo di Russell è:

$$(95, 5, 0, 0, 80, 30, 0, 0, 90).$$

Esercizio 8. Trovare la BFS iniziale del problema di trasporto definito dalla seguente matrice dei costi

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

e con offerte pari rispettivamente a 60, 70 e 20, e domande 50, 25, 35 e 40, utilizzando i metodi di Russell e di Vogel.
Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che non è necessario introdurre alcuna sorgente o destinazione fittizia. Scriviamo il tableau iniziale per l'applicazione del metodo di Russell:

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{3}$ -4	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{4}$ -4	60	4
2	$\boxed{2}$ -6	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{3}$ -6	$\boxed{3}$ -6	70	5
3	$\boxed{2}$ -5	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{4}$ -4	$\boxed{2}$ -6	20	4
d_j	50	25	35	40		
$\overline{v}_j$	3	5	4	4		

Poniamo $x_{21} = 50$, cancelliamo la colonna 1. Il tableau e diventato

	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{4}$ -4	60	4
2	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{3}$ -6	$\boxed{3}$ -6	20	5
3	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{4}$ -4	$\boxed{2}$ -6	20	4
d_j	25	35	40		
$\overline{v}_j$	5	4	4		

Poniamo $x_{34} = 20$, cancelliamo la riga 3. Il tableau e diventato

	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{4}$ -5	$\boxed{3}$ -4	$\boxed{4}$ -4	60	4
2	$\boxed{5}$ -5	$\boxed{3}$ -5	$\boxed{3}$ -6	20	5
d_j	25	35	20		
$\overline{v}_j$	5	3	4		

Poniamo $x_{24} = 20$, cancelliamo la riga 2, in modo tale che le tre variabili rimaste sono entrambe in base: $x_{12} = 25$, $x_{13} = 35$ e $x_{14} = 0$.
La BFS trovata e quindi la seguente

$$(0, 25, 35, 0, 50, 0, 0, 20, 0, 0, 0, 20).$$

2.2 Il problema di Assegnamento

Esercizio 9. Trovare l'assegnamento ottimo per il problema definito dalla seguente matrice dei costi, usando il metodo ungherese:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 & 7 \\ 9 & 7 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento.

8	8	5	7
9	7	3	8
9	8	4	8
6	6	5	6

Tabella iniziale

3	3	0	2
6	4	0	5
5	4	0	4
1	1	0	1

Si sottrae il minimo da ogni riga

2	2	0	1
5	3	0	4
4	3	0	3
0	0	0	0

Si sottrae il minimo da ogni colonna

2	2	0	1
5	3	0	4
4	3	0	3
0	0	0	0

Gli elementi uguali a zero cono coperti da due linee

1	1	0	0
4	2	0	3
3	2	0	2
0	0	1	0

Si sottrae 1 da tutti gli elementi non coperti
Si aggiunge 1 all'elemento coperto da due linee

1	1	0	0
4	2	0	3
3	2	0	2
0	0	1	0

Gli elementi uguali a zero cono coperti da tre linee

1	1	2	0
2	0	0	1
1	0	0	0
0	0	3	0

Si sottrae 2 da tutti gli elementi non coperti
Si aggiunge 2 agli elementi coperti da due linee

1	1	2	0
2	0	0	1
1	0	0	0
0	0	3	0

Gli elementi uguali a zero cono coperti da 4 linee
L'assegnamento ottimo è possibile

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\
2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0
\end{array}$$

Poniamo $x_{14} = 1$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\
2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{0} & 0 & 3 & 0
\end{array}$$

Poniamo $x_{41} = 1$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\
2 & \boxed{0} & 0 & 1 \\
1 & 0 & \boxed{0} & 0 \\
\boxed{0} & 0 & 3 & 0
\end{array}$$

Poniamo $x_{22} = 1$ e $x_{33} = 1$.

Il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima è

$$Z = 7 + 7 + 4 + 6 = 24.$$

Esercizio 10. Risolvere il problema di assegnamento definito dalla seguente matrice dei costi:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 & - \\ 3 & - & 4 & 4 & 2 \\ - & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Innanzitutto dobbiamo aggiungere una colonna alla matrice dei costi ed inserire il valore M per i costi non definiti:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 & M & 0 \\ 3 & M & 4 & 4 & 2 & 0 \\ M & 6 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

6	4	2	1	M	0
3	M	4	4	2	0
M	6	6	4	2	0
7	4	5	1	1	0
6	3	2	2	2	0
6	4	5	6	4	0

Tabella iniziale

3	1	0	0	M	0
0	M	2	3	1	0
M	3	4	3	1	0
4	1	3	0	0	0
3	0	0	1	1	0
3	1	3	5	3	0

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le colonne

Il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è 5, come si evince dalla seguente figura:

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & M & 0 \\
0 & M & 2 & 3 & 1 & 0 \\
M & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \\
4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

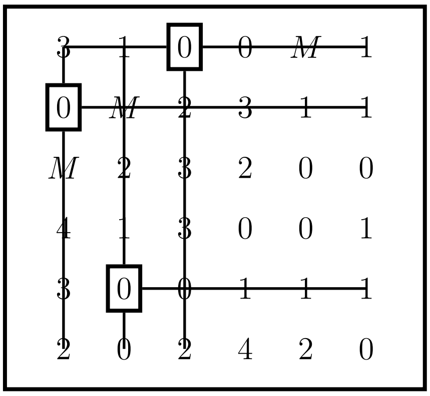
Eseguiamo quindi un'altra iterazione, sottraendo 1 dagli elementi non coperti e sommandolo agli elementi coperti da due linee:

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & M & 1 \\
0 & M & 2 & 3 & 1 & 1 \\
M & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

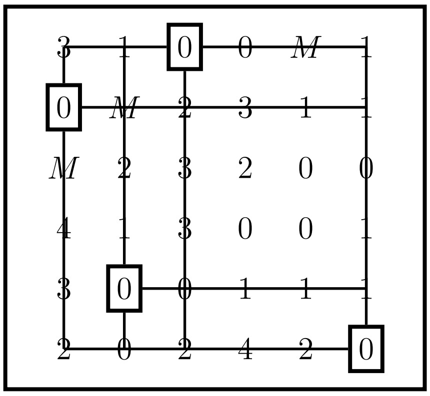
Ora è possibile effettuare l'assegnamento ottimo:

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
3 & 1 & 0 & 0 & M & 1 \\
\boxed{0} & M & 2 & 3 & 1 & 1 \\
M & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccccc|}
\hline
3 & 1 & \boxed{0} & 0 & M & 1 \\
\boxed{0} & M & 2 & 3 & 1 & 1 \\
M & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

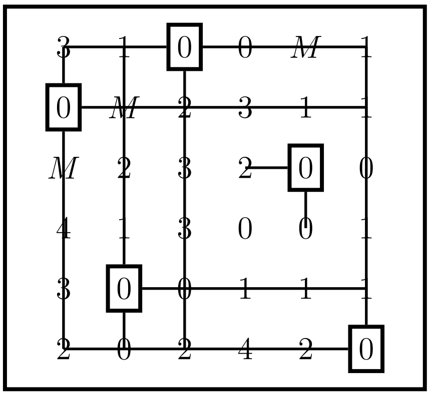
$x_{21} = 1$ $\qquad$ $x_{13} = 1$



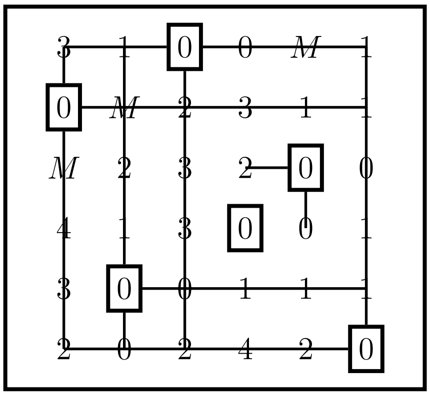
$x_{52} = 1$



$x_{66} = 1$



$x_{35} = 1$



$x_{44} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 3 + 2 + 3 + 2 + 1 = 11.$$

textbfEsercizio 11. Risolvere il problema di assegnamento con 5 task e 5 risorse definito dalla seguente matrice dei costi:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

5	4	6	5	4
3	7	4	6	3
5	2	3	2	3
6	4	4	3	2
7	3	2	3	3

Tabella iniziale

1	0	2	1	0
0	4	1	3	0
3	0	1	0	1
4	2	2	1	0
5	1	0	1	1

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le righe

Non si procede a togliere il minimo da ogni colonna in quanto tale valore è zero. Inoltre poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a cinque allora si può procedere all'assegnamento ottimo.

1	0	2	1	0
$\boxed{0}$	4	1	3	0
3	0	1	0	1
4	2	2	1	0
5	1	0	1	1

$x_{21} = 1$

1	0	2	1	0
$\boxed{0}$	4	1	3	0
3	0	1	0	1
4	2	2	1	0
5	1	$\boxed{0}$	1	1

$x_{53} = 1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{array}$$

$x_{45} = 1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \boxed{0} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{array}$$

$x_{12} = 1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \boxed{0} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{array}$$

$x_{34} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 13.$$

Esercizio 12. Risolvere il problema di assegnamento definito dalla seguente matrice dei costi:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & - & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & 8 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Innanzitutto dobbiamo aggiungere una colonna alla matrice dei costi ed inserire il valore M per i costi non definiti:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & M & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & 8 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

6	3	M	4	5	6
4	3	1	6	5	6
7	4	3	3	2	4
2	1	10	8	4	5
7	5	6	4	3	2
0	0	0	0	0	0

Tabella iniziale

3	0	M	1	2	3
3	2	0	5	4	5
5	2	1	1	0	1
1	0	9	7	3	4
5	3	4	2	1	0
0	0	0	0	0	0

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le righe

Non si procede a togliere il minimo da ogni colonna in quanto tale valore è zero. Inoltre poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a cinque, come risulta dalla seguente figura

3	0	M	1	2	3
3	2	0	5	4	5
5	2	1	1	0	1
1	0	9	7	3	4
5	3	4	2	1	0
0	0	0	0	0	0

allora è necessario procedere ad un'altra iterazione.

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a sei allora è possibile effettuare l'assegnamento ottimo.

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{56} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{35} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{23} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{12} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
\boxed{0} & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{41} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
\boxed{0} & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{64} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$$

Capitolo 3

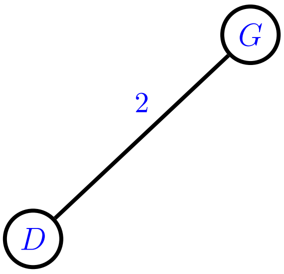
Esercizi di Ottimizzazione su Reti

3.1 Il problema di minimo albero ricoprente

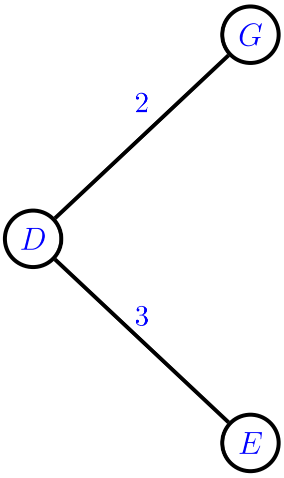
Esercizio 1. Sia assegnata una rete non orientata composta da 7 nodi individuati con lettere da A a G, tale che le distanze tra i questi sono riportate nella seguente tabella:

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	8	6	4	4	5
B			10	11	10	4	5
C				7	4	10	6
D					3	7	2
E						8	5
F							6

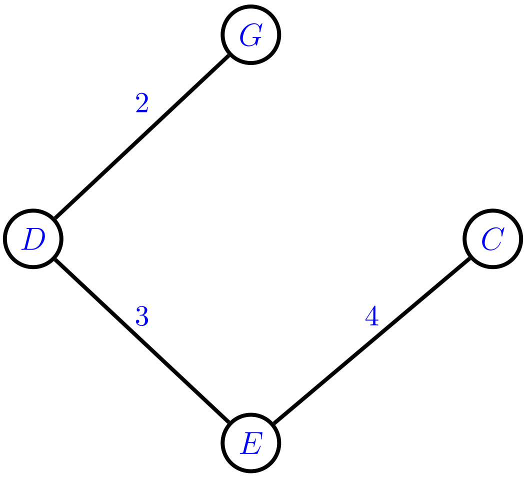
Determinare il minimo albero ricoprente.
Svolgimento. Per applicare l'algoritmo di Prim identifichiamo innanzitutto il collegamento più breve, ovvero DG, quindi questo è il primo arco dell'albero che stiamo cercando



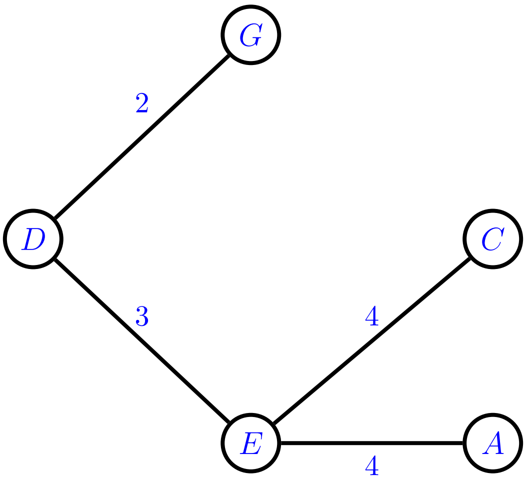
Il nodo più vicino a D o a G è in nodo E, quindi l'arco DE viene aggiunto all'albero.



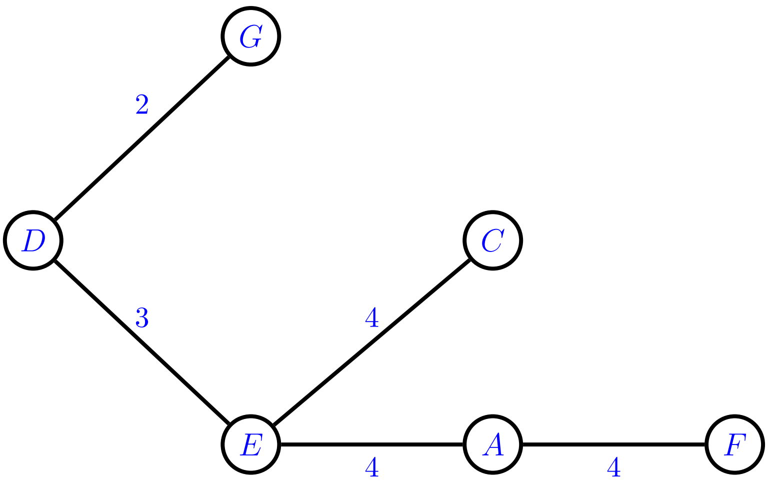
I nodi più vicini sono C e A, entrambi connessi a E, scegliamo l'arco EC.



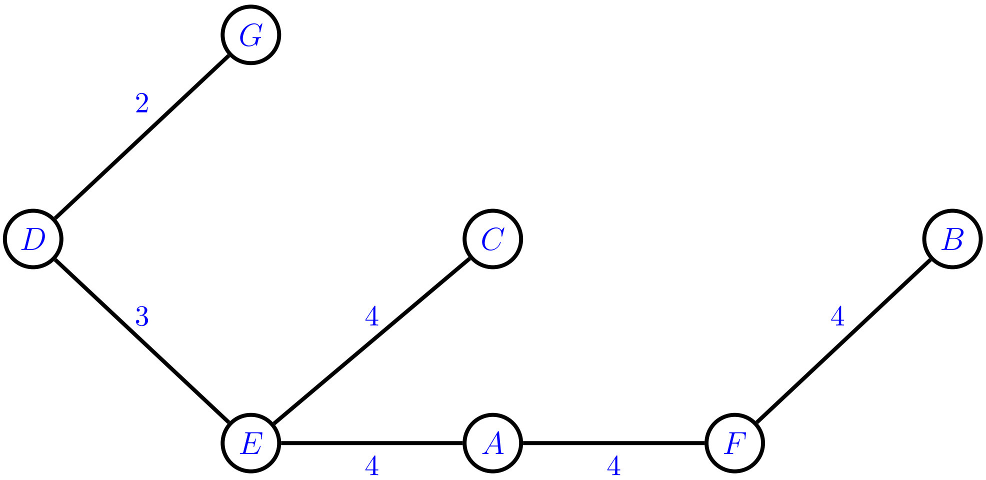
E adesso scegliamo l'arco EA:



Adesso si sceglie il nodo F, connesso al nodo A da un arco di lunghezza 4.

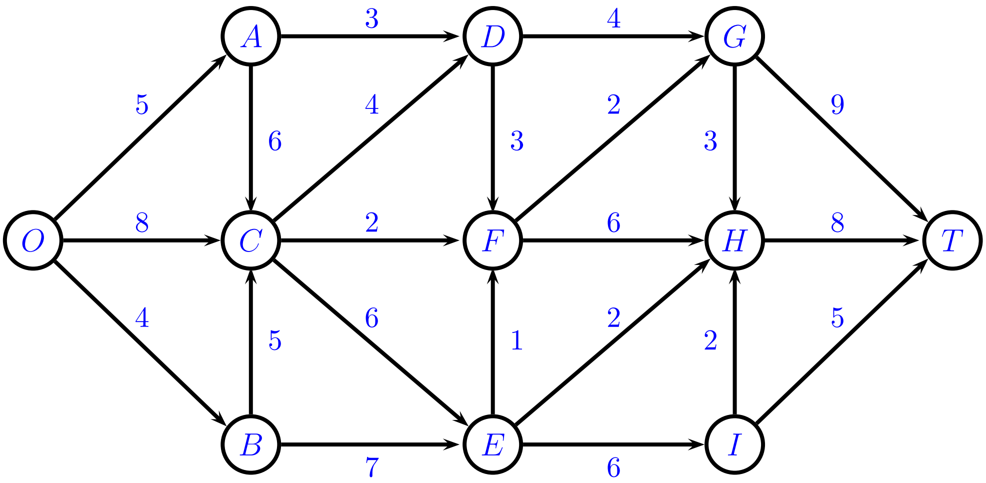


Resta il nodo B il cui collegamento più vicino è con il nodo F.



3.2 Il problema di cammino minimo

Esercizio 2. Determinare il cammino minimo della seguente rete che unisce i nodi O e T:



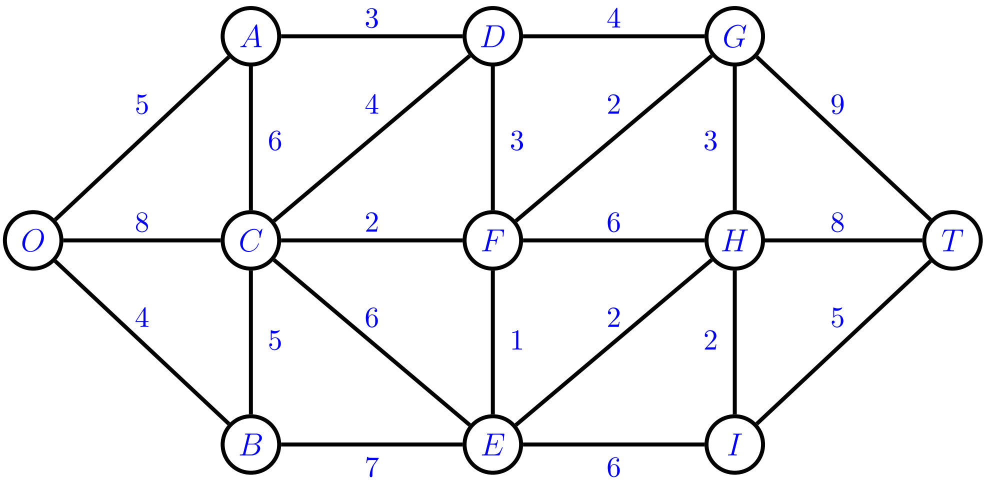
Svolgimento.

k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	B	4	B	4	OB
2	O B	A C	5 $4+5=9$	A	5	OA
3	O A B	C D C	8 $3+5=8$ $4+5=9$	C D	8	OC AD
4	B C D	E F F	$4+7=11$ $8+2=10$ $8+3=11$	F	10	CF
5	B C D F	E E G G	$4+7=11$ $8+6=14$ $8+4=12$ $10+2=12$	E	11	BE
6	D F E	G G H	$8+4=12$ $10+2=12$ $11+2=13$	G	12	DG FG
7	F E G	H H H	$10+6=16$ $11+2=13$ $12+3=15$	H	13	EH
8	E G H	I T T	$11+6=17$ $12+9=21$ $13+8=21$	I	17	EI
9	G H I	T T T	$12+9=21$ $13+8=21$ $17+5=22$	T	21	GT HT

Abbiamo trovato tre possibili cammini minimi di lunghezza 21:

$$O \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow G \longrightarrow T$$
$$O \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow T$$
$$O \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow T.$$

Esercizio 3. Determinare il cammino minimo della stessa rete dell'esercizio precedente supponendo che gli archi non siano orientati:



Svolgimento.

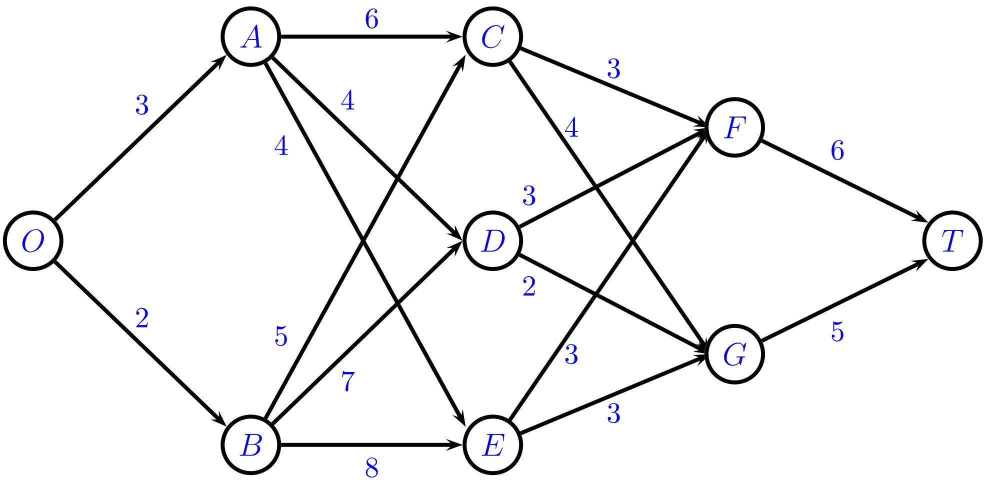
k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	B	4	B	4	OB
2	O B	A C	5 $4+5=9$	A	5	OA
3	O A B	C D C	8 $3+5=8$ $4+5=9$	C D	8	OC AD
4	B C D	E F F	$4+7=11$ $8+2=10$ $8+3=11$	F	10	CF
5	B C D F	E E G E	$4+7=11$ $8+6=14$ $8+4=12$ $10+1=11$	E	11	BE FE
6	D F E	G G H	$8+4=12$ $10+2=12$ $11+2=13$	G	12	DG FG
7	F E G	H H H	$10+6=16$ $11+2=13$ $12+3=15$	H	13	EH
8	E G H	I T I	$11+6=17$ $12+9=21$ $13+2=15$	I	15	HI
9	G H I	T T T	$12+9=21$ $13+8=21$ $15+5=20$	T	20	IT

Abbiamo trovato due possibili cammini minimi di lunghezza 20:

$$O \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow I \longrightarrow T$$
$$O \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow I \longrightarrow T$$

Rispetto all'esercizio precedente osserviamo che il cammino minimo ha lunghezza inferiore ma attraversa un numero di archi superiore.

Esercizio 4. Determinare il cammino minimo della seguente rete che unisce i nodi O e T:



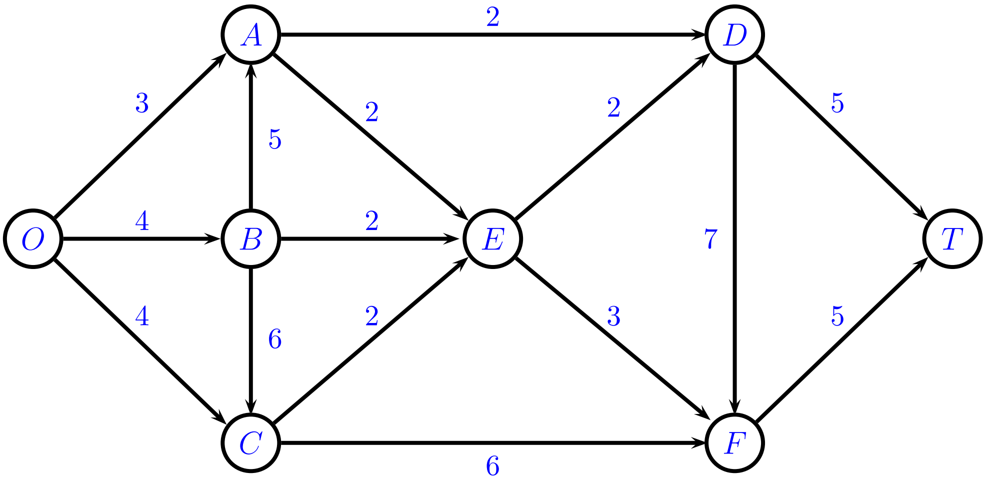
Svolgimento.

k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	B	2	B	2	OB
2	O B	A C	3 $2+5=7$	A	3	OA
3	A A B	D E C	$3+4=7$ $3+4=7$ $2+5=7$	D E C	7	AD AE BC
4	C D E E	F G F G	$7+3=10$ $7+2=9$ $7+3=10$ $7+3=10$	G	9	DG
5	C D E G	F F F T	$7+3=10$ $7+3=10$ $7+3=10$ $9+5=14$	F	10	CF DF EF
6	F G	T T	$10+6=16$ $9+5=14$	T	14	GT

Abbiamo trovato un unico cammino minimo di lunghezza 14:

$$O \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow G \longrightarrow T.$$

Esercizio 5. Determinare il cammino minimo della seguente rete che unisce i nodi O e T:



Svolgimento.

k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	A	3	A	3	OA
2	O	B	4	B	4	OB
		C	4	C	4	OC
	A	D	$3+2=5$			
		E	$3+2=5$			
3	A	D	$3+2=5$	D	5	AD
		E	$3+2=5$	E	5	AE
	B	E	$4+2=6$			
	C	E	$4+2=6$			
4	C	F	$4+6=10$	F	8	EF
	E	F	$5+3=8$			
	D	T	$5+5=10$			
5	D	T	$5+5=10$	T	10	DT
	F	T	$8+5=13$			

Abbiamo trovato un unico cammino minimo di lunghezza 10:

$$O \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow T.$$