

Capitolo 1

L'insieme dei numeri complessi

1.1 Introduzione ai numeri complessi

Definizione 1.1.1 *Assegnata una coppia ordinata (a, b) di numeri reali si definisce numero complesso l'espressione*

$$z = a + \iota b.$$

I numeri a e b sono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di z e sono indicati con i simboli

$$a = \Re z \qquad b = \Im z.$$

I numeri con parte immaginaria nulla possono essere identificati con i numeri reali e perciò si scrive semplicemente a e non $a + \iota 0$. I numeri con parte reale nulla sono detti *immaginari puri* e si scrivono semplicemente ιb invece che $0 + \iota b$; in particolare il numero $0 + \iota 1$ si indica semplicemente con ι ed è detto *unità immaginaria*.

Due numeri complessi $a + \iota b$ e $c + \iota d$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$. Nell'insieme dei numeri complessi si possono introdurre le operazioni di somma e di prodotto tramite la seguente definizione.

Definizione 1.1.2 *Dati due numeri complessi $a + \iota b$ e $c + \iota d$, la loro somma è il numero complesso*

$$(a + c) + \iota(b + d),$$

mentre il loro prodotto è il numero complesso

$$(ac - bd) + \iota(ad + bc).$$

La somma e il prodotto così definiti godono delle proprietà associativa e commutativa.

Osserviamo che, posto $z = a + ib$ e $0 = 0 + i0$, risulta

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + i0) = a + ib = z$$

per cui 0 ha le stesse proprietà formali dell'insieme dei reali, ovvero di essere *elemento neutro* per la somma. Per ogni numero complesso $z = a + ib$ è possibile definire l'*opposto* come

$$-z = -a - ib$$

tale che $z + (-z) = 0$. La *differenza* tra due numeri complessi si definisce come la somma dell'opposto, infatti

$$(a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - id) = a - c + i(b - d).$$

È facile vedere dalla definizione di prodotto che il numero complesso $1 + i0$ è *elemento neutro* per il prodotto.

Assegnato $z = a + ib$ si definisce *coniugato* di z il numero $\bar{z} = a - ib$, e che si può indicare anche con z^* . Inoltre se $z \neq 0$ si può definire il *reciproco* $1/z$ come il numero $x + iy$ tale che

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Deve essere

$$(a + ib)(x + iy) = 1 \Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}; y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Dunque

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

In pratica $1/z$ può essere ottenuto così

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

L'insieme dei numeri complessi munito delle operazioni di somma e prodotto è indicato con \mathbb{C} .

Osservazione. Dalla definizione di prodotto risulta

$$i^2 = i i = (0 + i1)(0 + i1) = -1.$$

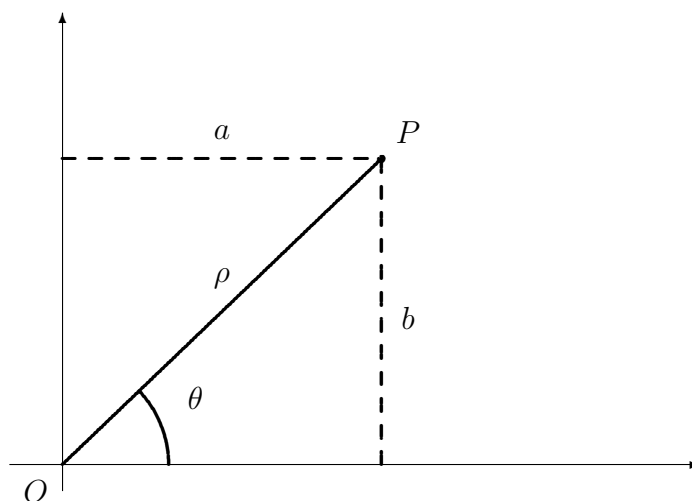


Figura 1.1:

Forma trigonometrica di un numero complesso

Un numero complesso $z = a + ib$ può essere rappresentato geometricamente nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 con il vettore di componenti (a, b) . Tale rappresentazione viene detta *forma trigonometrica* (vedere Figura 1.1).

Consideriamo il numero complesso $z = a + ib$ e il vettore \overrightarrow{OP} che lo rappresenta. Il vettore \overrightarrow{OP} può essere rappresentato o attraverso le componenti a, b oppure assegnando la lunghezza ρ e l'angolo θ formato con l'asse reale positivo intendendo come positivi tutti gli angoli ottenuti mediante rotazione in senso antiorario dal semiasse positivo alla semiretta che contiene \overrightarrow{OP} . Il numero reale non negativo ρ viene indicato con $|z|$ ed è detto *modulo di z* mentre l'angolo θ si chiama *argomento* e si indica con $\arg(z)$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $a = \Re z = |z| \cos(\arg(z))$;
2. $b = \Im z = |z| \sin(\arg(z))$;
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
4. $\sin \theta = b/\rho$;
5. $\cos \theta = a/\rho$;

$$6. \tan \theta = b/a.$$

In definitiva z può essere scritto in questo modo

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + \iota \sin(\arg(z))).$$

Osservazione. La rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non fornisce una corrispondenza biunivoca tra la coppia $(|z|, \arg(z))$ e i punti del piano complesso. L'origine del piano complesso corrisponde infatti alle (infinite) coppie della forma $(0, \theta)$ indipendentemente dal valore di θ . Se assumiamo $|z| \neq 0$ notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia $(|z|, \theta)$ che la coppia del tipo $(|z|, \theta + 2k\pi)$.

Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Il numero complesso $\bar{z} = z^*$, coniugato di $z = a + \iota b$, è legato alla parte reale, immaginaria e modulo di z dalle seguenti relazioni:

1. $\Re z = (z + z^*)/2$;
2. $\Im z = (z - z^*)/(2\iota)$;
3. $|z|^2 = z z^*$.

Inoltre

1. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;
2. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

Formula di De Moivre

Posto $z = \rho(\cos \theta + \iota \sin \theta)$ dalla formula del prodotto è facile dedurre che, per $n = 1, 2, \dots$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta).$$

Infatti per $n = 1$ la relazione è banalmente verificata. Assumendola vera per un certo n proviamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = z^n \rho(\cos \theta + \iota \sin \theta) = \\ &= \rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta) \rho(\cos \theta + \iota \sin \theta) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta + \iota(\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta)) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + \iota \sin(n+1)\theta). \end{aligned}$$

Radici n -esime di un numero complesso

Assegnato $w \in \mathbb{C}$ si vogliono determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w.$$

Tali numeri sono detti *radici n -esime di w* . Proviamo che ogni numero complesso ammette esattamente n radici distinte e diamo una formula per calcolarle. Posto

$$w = r(\cos \phi + \iota \sin \phi)$$

e

$$z = \rho(\cos \theta + \iota \sin \theta)$$

l'equazione $z^n = w$ si scrive

$$\rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta) = r(\cos \phi + \iota \sin \phi).$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per un multiplo di 2π abbiamo

$$\rho^n = r$$

e

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

ricavando allora

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

e

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Quest'ultima relazione fornisce dei valori distinti di θ in corrispondenza di $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. La radice che si ottiene per $k = 0$ è detta *radice primitiva* o *fondamentale*. Per $k = n$ si trova

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

che coincide con la radice primitiva. Situazioni analoghe valgono per $k > n$ e $k < 0$. Le radici n -esime di un numero complesso sono dunque n e sono ottenute dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

I punti P_0, \dots, P_{n-1} corrispondenti alle radici n -esime di w si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono i vertici di un poligono regolare a n lati.

Esempio 1.1.1 *Calcolare le radici quinte di 1.*

Applicando la formula si ha

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + \iota \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Esponenziale complesso

Sia z un numero complesso non nullo scritto nella forma trigonometrica

$$z = |z|(\cos \theta + \iota \sin \theta).$$

Evidentemente il numero complesso $w = z/|z|$ ha modulo unitario. Dunque un qualunque numero complesso non nullo può essere espresso come prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e un numero complesso di modulo 1,

$$z = |z|w, \quad |w| = 1.$$

Siano ora z_1 e z_2 due numeri complessi di modulo 1:

$$z_1 = \cos \theta + \iota \sin \theta \quad |z_1| = 1$$

$$z_2 = \cos \phi + \iota \sin \phi \quad |z_2| = 1.$$

Dalla definizione di prodotto si ha:

$$z_1 z_2 = \cos(\theta + \phi) + \iota \sin(\theta + \phi)$$

$$|z_1 z_2| = 1$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Notiamo che la moltiplicazione di z_1 e z_2 si traduce in una somma (quella degli argomenti) e in particolare per $\phi = -\theta$ si ha

$$z_1 z_2 = 1.$$

Questo comportamento è analogo a quello della funzione esponenziale reale. Infatti

$$e^a e^b = e^{a+b}, \quad e^a e^{-a} = 1.$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo 1 che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Ovviamente non si tratterà di esponenziali reali in quanto bisogna rappresentare numeri complessi. Queste considerazioni motivano, seppure in modo intuitivo, l'introduzione della *formula di Eulero*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + \iota \sin \theta$$

per la rappresentazione di numeri complessi di modulo 1. Sia ora z un generico numero complesso espresso nella forma $z = x + \iota y$. Considerando l'analogia formale con gli esponenziali reali imponiamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, cioè

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x e^{\iota y}.$$

Questa relazione, insieme alla formula di Eulero, pone la seguente definizione di *esponenziale di un numero complesso*:

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x (\cos y + \iota \sin y). \quad (1.1)$$

Da questa si deducono le seguenti proprietà:

1. $\Re e^z = e^x \cos y$;
2. $\Im e^z = e^x \sin y$;

$$3. |e^z| = e^x;$$

$$4. \operatorname{arg}(e^z) = y.$$

Utilizzando la (1.1) è facile provare che per l'esponenziale complesso valgono le stesse regole dell'esponenziale reale:

$$1. e^{z+w} = e^z e^w, \text{ per ogni } z, w \in \mathbb{C};$$

$$2. (e^z)^w = e^{zw}.$$

Non è possibile estendere al campo complesso la proprietà di stretta positività di cui gode l'esponenziale reale, però è possibile provare che

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Infatti se esiste un numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$ tale che $e^{z_0} = 0$ dovrebbe essere

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 = 0 \\ e^{x_0} \sin y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y_0 = 0 \\ \sin y_0 = 0 \end{cases}$$

e ciò è assurdo. La definizione di esponenziale complesso ha però una conseguenza imprevedibile se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Infatti per qualunque $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+iy+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)} = \\ &= e^x (\cos(y+2k\pi) + i \sin(y+2k\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z \end{aligned}$$

cioè la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi i$.

Alcune proprietà dei moduli e dell'argomento

La forma esponenziale complessa permette un'agevole dimostrazione di alcune proprietà del modulo e dell'argomento di un numero complesso. Siano infatti

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

allora

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

e dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{e} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Analogamente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

da cui

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{e} \quad \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

In particolare

$$|z_1 e^{i\alpha}| = |z_1|$$

e

$$\arg(z_1 e^{i\alpha}) = \arg(z_1) + \alpha \tag{1.2}$$

dunque la moltiplicazione di un numero complesso per l'esponenziale di un immaginario puro provoca una rotazione. Inoltre

$$|z_1 i| = |z_1 e^{i\pi/2}| = |z_1|$$

e

$$\arg(z_1 i) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2}$$

ovvero la moltiplicazione di un numero complesso per l'unità immaginaria provoca una rotazione di $\pi/2$.

Esempio 1.1.2 *Calcolare modulo e argomento del numero complesso*

$$z = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}} e^{i\pi/2}.$$

Sfruttando la proprietà (1.2) abbiamo

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \arg\left(\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2} \\ \arg\left(\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}\right) &= \arg\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3} \cdot 4}{4}\right) = -\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Inoltre

$$|z| = \left| \frac{1}{1 + \iota\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{\iota\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

Seni e coseni complessi

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ dalla formula di Eulero si ha:

$$e^{\iota\alpha} = \cos \alpha + \iota \sin \alpha$$

e

$$e^{-\iota\alpha} = \cos \alpha - \iota \sin \alpha.$$

Sommando e sottraendo queste due relazioni si ottengono rispettivamente:

$$\cos \alpha = \frac{e^{\iota\alpha} + e^{-\iota\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{e^{\iota\alpha} - e^{-\iota\alpha}}{2\iota}.$$

Poichè abbiamo dato significato all'esponenziale anche nel caso in cui α sia complesso possiamo facilmente estendere la definizione di seno e coseno a tutto il campo complesso nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota}.$$

Con tali definizioni non è difficile provare che molte proprietà delle funzioni trigonometriche, quali ad esempio le formule di addizione e sottrazione e le formule di duplicazione, continuano a valere. Le funzioni seno e coseno così definite sono funzioni periodiche di periodo 2π . Infatti

$$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{\iota(z+2k\pi)} + e^{-\iota(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.$$

Analoga dimostrazione vale per la funzione seno. Le funzioni seno e coseno complessi, a differenza di quelle reali, possono avere modulo maggiore di 1. Per esempio

$$\cos(2\iota) = \frac{e^{\iota(2\iota)} + e^{-\iota(2\iota)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2} > 2.$$

Seni e coseni iperbolici complessi

Fissato $t \in \mathbb{R}$ si definiscono seno e coseno iperbolico le funzioni

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

È naturale allora estendere al campo complesso questa definizione, ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Le funzioni appena definite risultano essere periodiche di periodo 2π . Infatti

$$\cosh(z + 2k\pi) = \frac{e^{z+2k\pi} + e^{-(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Tra funzioni iperboliche e funzioni circolari valgono le seguenti relazioni

$$1) \quad \sin(\iota z) = \frac{e^{\iota(z)} - e^{-\iota(z)}}{2\iota} = -\iota \frac{e^{-z} - e^z}{2} = \iota \sinh z$$

$$2) \quad \cos(\iota z) = \frac{e^{\iota(z)} + e^{-\iota(z)}}{2\iota} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z$$

$$3) \quad \sinh(\iota z) = \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2} = \iota \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota} = \iota \sin z$$

$$4) \quad \cosh(\iota z) = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.$$

Gli zeri delle funzioni iperboliche

Vogliamo determinare ora i valori $z \in \mathbb{C}$ che annullano le funzioni iperboliche.

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{2k\pi} \Rightarrow z = k\pi\iota.$$

Analogamente

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z = \iota \frac{\pi}{2} + k\pi\iota.$$

Osservazione. Se \tilde{z} è un numero complesso tale che $\sinh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 1) vista precedentemente deve essere

$$\iota \sin(\iota \tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\iota \tilde{z}) = 0$$

e ciò implica che $\iota \tilde{z}$ è zero della funzione seno. Dunque dalla definizione

$$\sin(z) = 0 \Rightarrow z = k\pi$$

infatti la funzione seno è una funzione dispari. Inoltre se \tilde{z} è un numero complesso tale che $\cosh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 2) deve essere

$$\cos(\iota \tilde{z}) = 0 \Rightarrow \cos(-\iota \tilde{z}) = 0$$

e dunque gli zeri sono

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

infatti la funzione coseno è pari.

Logaritmo di un numero complesso

Per $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sappiamo che la funzione logaritmo (reale) ha la seguente proprietà:

$$\log r e^\alpha = \log r + \log e^\alpha = \log r + \alpha \log e = \log r + \alpha.$$

Definiamo con abuso di notazione il logaritmo complesso in modo che questa proprietà venga conservata. Poniamo infatti per $z \neq 0$:

$$\log z = \log(|z|e^{\iota(\theta+2k\pi)}) = \log |z| + \iota \arg(z) + \iota 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si noti che la funzione logaritmo così definita è una funzione ad infiniti valori.

Esponenziale con base complessa

L'esponenziale complesso si definisce a partire dai logaritmi complessi. Per $z, w \in \mathbb{C}$ si pone:

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w(\log |z| + \iota \arg(z) + \iota 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \iota^\iota &= e^{\iota \log \iota} = e^{\iota(\log |\iota| + \iota \arg(\iota) + \iota 2k\pi)} = \\ &= e^{\iota(\pi/2 + \iota 2k\pi)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}. \end{aligned}$$

Capitolo 2

Teoria delle funzioni di variabile complessa

2.1 Funzioni complesse

Assegnato un sottoinsieme Ω dell'insieme dei numeri complessi, se ad ogni elemento z di Ω corrisponde uno o più valori di una variabile complessa w si dice che w è una funzione della variabile complessa z e si scrive

$$w = f(z).$$

Una funzione di variabile complessa si dice *ad un solo valore* se ad ogni valore di z corrisponde un solo valore di w ; in caso contrario la funzione si dice *a più valori*. In generale si può scrivere

$$w = f(z) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

dove $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione.

Esempio 2.1.1

$$\begin{aligned} w = z^2 &= (x + \iota y)^2 = x^2 - y^2 + \iota 2xy \\ u(x, y) &= x^2 - y^2 & v(x, y) &= 2xy. \end{aligned}$$

D'ora in poi si intenderà sempre $f(z)$ come funzione ad un valore.

2.1.1 Intorni e insiemi in \mathbb{C}

Definizione 2.1.1 Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ si dice intorno di z_0 l'insieme

$$I(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}.$$

Definizione 2.1.2 Un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto se per ogni $z_0 \in A$ esiste un intorno $I(z_0) \subset A$.

Definizione 2.1.3 Un insieme $A \subset \mathbb{C}$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Definizione 2.1.4 Fissato $\rho > 0$ si definisce intorno dell'infinito l'insieme

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}.$$

Definizione 2.1.5 Fissato $A \subseteq \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ allora z_0 si dice punto di accumulazione per A se per ogni intorno $I(z_0)$ esiste un punto $z_1 \in A$, con $z_1 \neq z_0$, tale che $z_1 \in I(z_0)$.

2.1.2 Limiti e continuità

Le definizioni di limite e di continuità di una funzione di variabile complessa sono formalmente identiche a quelle già note per funzioni di variabile reale. Così, per esempio, diremo che $f(z)$ ha limite $l \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0 e scriveremo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists' \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta : |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che f è continua in z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

2.1.3 Derivate

Se $f(z)$ in una regione del piano è ad un solo valore, la derivata di $f(z)$, indicata con $f'(z)$ o con

$$\frac{df(z)}{dz}$$

è definita da

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.1)$$

a condizione che tale limite esista e sia *indipendente* dal modo con cui Δz tende a 0. Se il limite (2.1) esiste per $z = z_0$ si dice che f è *derivabile in* z_0 . Se il limite (2.1) esiste per tutti gli z in un opportuno intorno di z_0 , cioè esiste un $\delta > 0$ tale che il limite esiste per ogni z tale che $|z - z_0| < \delta$, allora si dice che f è *analitica* in z_0 . Se il limite (2.1) esiste per tutti gli z di una regione \mathcal{R} contenuta in \mathbb{C} allora si dice che f è *analitica* in \mathcal{R} .

2.1.4 Equazioni di Cauchy-Riemann

Condizione necessaria affinché

$$w = f(z) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

sia analitica nella regione $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ è che

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Dimostrazione.

Poichè

$$f(z) = f(x + \iota y) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

si ha

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= f(x + \Delta x + \iota(y + \Delta y)) = \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + \iota v(x + \Delta x, y + \Delta y). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + \iota v(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - \iota v(x, y)}{\Delta x + \iota \Delta y}. \end{aligned}$$

In virtù dell'analiticità di f il limite in questione non dipende da come Δz tende a 0. Scegliendo $\Delta y = 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \iota \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \quad (2.2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Se invece scegliamo $\Delta x = 0$, allora

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\iota \Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \quad (2.3) \\ &= \frac{1}{\iota} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Poichè (2.2) e (2.3) coincidono risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\iota} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\iota \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

da cui le equazioni di Cauchy-Riemann. \square

Osservazione. Da (2.2) e (2.3) è anche evidente che

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} = -\iota \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Viceversa si può dimostrare che se le derivate parziali prime di u e v rispetto a x e y sono continue nella regione \mathcal{R} allora le equazioni di Cauchy-Riemann sono anche condizioni sufficienti per l'analiticità di $f(z)$ in \mathcal{R} .

Osservazione. Se le derivate parziali seconde di u e v rispetto a x e y sono continue, derivando le condizioni di Cauchy-Riemann si trova:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dunque la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica sulla regione \mathcal{R} soddisfano l'equazione di Laplace bidimensionale. Le funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace sono dette *funzioni armoniche*.

Esempio 2.1.2 *Dimostrare che $\frac{d\bar{z}}{dz}$, dove \bar{z} è il coniugato di z , non esiste in alcun punto.*

Per definizione

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x + iy}}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Affinchè la derivata esista questo limite deve esistere ed essere indipendente dal modo con cui Δz tende a 0; però scegliendo $\Delta x = 0$, abbiamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

mentre scegliendo $\Delta y = 0$ abbiamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Questi due possibili percorsi di avvicinamento a zero provano che il limite dipende dal modo con cui Δz tende a 0 per cui la derivata non esiste, cioè \bar{z} non è analitica in alcun punto.

Osservazione. Le funzioni di variabile complessa a valori reali sono un sottoinsieme delle funzione di variabile complessa a valori complessi. Ci si può chiedere quando funzioni del tipo:

$$f(z) = u(x, y) + i0$$

siano analitiche.

Per le condizioni di Cauchy-Riemann (essendo $v(x, y) = 0$) deve essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

cioè $u(x, y) = \text{costante}$. Perciò le funzioni reali di variabile complessa che non sono costanti sono esempi di funzioni non analitiche. Tra queste vi sono per esempio $|z|$, $\arg(z)$, $\Re z$, $\Im z$ e $z\bar{z}$.

Esempio 2.1.3 *Assegnata*

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

determinare $\frac{dw}{dz}$ ed indicare dove w è analitica.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \frac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)} = \\ &= \frac{2}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

a condizione che $z \neq 1$ e indipendentemente dal modo con cui Δz tende a 0. La funzione è analitica dappertutto tranne che in $z = 1$, dove la derivata non esiste.

2.1.5 Regole di derivazione

Le regole di derivazione e le derivate di funzioni elementari sono formalmente identiche a quelle di variabile reale. Infatti siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

aperto, due funzioni analitiche in Ω e ϕ analitica in un sottoinsieme I di \mathbb{C} tale che $\phi(I) \subset \Omega$. Allora:

1.
$$\frac{d}{dz}(\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha f'(z) + \beta g'(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
2.
$$\frac{d}{dz}f(z)g(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$
3.
$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \quad \text{se } g(z) \neq 0$$
4.
$$\frac{d}{dz}f(\phi(z)) = f'(\phi(z))\phi'(z).$$

2.1.6 Integrali di Linea

L'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} è privo di una relazione d'ordine quindi per definire l'integrale di una funzione $f(z)$ tra due numeri complessi z_1 e z_2 si deve necessariamente definire il concetto di curva nel piano complesso.

Una curva γ nel piano complesso è una funzione

$$z : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

che ad ogni $t \in [a, b]$ associa il numero complesso

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono due funzioni reali di variabile reale e rappresentano rispettivamente le parti reale ed immaginaria dei punti di γ .

Una curva si dice *regolare* nell'intervallo $[a, b]$ se le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ hanno derivate prime continue e non contemporaneamente nulle in tutti i punti dell'intervallo.

Una curva si dice *regolare a tratti* se l'intervallo $[a, b]$ può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli chiusi in cui la curva è regolare.

Una curva si dice *chiusa* se $z(a) = z(b)$.

Una curva si dice *semplice* se per ogni $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, risulta $z(t_1) \neq z(t_2)$.

Una curva chiusa e semplice si dice *curva di Jordan*.

L'integrale della funzione di variabile complessa $f(z)$ tra due punti del piano complesso z_1 e z_2 può essere definito come l'integrale lungo una curva

regolare (o regolare a tratti) γ che unisce i due punti:

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Tale integrale è detto *integrale di linea lungo la curva* γ . Se

$$z = x + iy, \quad dz = dx + i dy$$

allora l'integrale di linea può essere scritto come somma di integrali di forme differenziali

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f(x + iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy) = \\ &= \int_{\gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\gamma} (v(x, y)dx + u(x, y)dy). \end{aligned}$$

Se

$$\gamma : t \in [t_1, t_2] \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$$

allora

$$\int_{\gamma} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) = \int_{t_1}^{t_2} \left(u(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

e, analogamente

$$\int_{\gamma} (v(x, y)dx + u(x, y)dy) = \int_{t_1}^{t_2} \left(v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

In questo modo gli integrali di funzioni di variabile complessa sono calcolati in modo simile a quelli di variabile reale.

Gli integrali di linea hanno le seguenti proprietà:

1. $\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{-\gamma} f(z)dz$
2. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$
3. $\int_{\gamma} (af_1(z) + bf_2(z))dz = a \int_{\gamma} f_1(z)dz + b \int_{\gamma} f_2(z)dz$
4. $\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz.$

Se γ è una curva regolare (o regolare a tratti) il verso di percorrenza della curva parte dal punto iniziale e arriva al punto finale. Nel caso invece in cui la curva è semplice e chiusa allora l'integrale lungo γ è indicato con

$$\oint_{\gamma} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy)$$

ed il verso è positivo quando la curva è percorsa in modo tale che la parte interna si trovi alla propria sinistra.

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.1.1 (di Green nel piano) *Sia Γ una curva semplice e chiusa che delimita la regione \mathcal{R} . Supponiamo che $P(x, y)$, $Q(x, y)$ e le rispettive derivate parziali prime rispetto a x ed y siano continue in \mathcal{R} e su Γ . Allora*

$$\oint_{\Gamma} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad \square$$

Gli integrali di linea possono essere calcolati anche evitando di determinare la parte reale e quella immaginaria della funzione $f(z)$. Infatti assegnata la curva regolare (o regolare a tratti):

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

per calcolare l'integrale

$$\int_{\Gamma} f(z)dz$$

si può pensare di effettuare il cambio di variabile $z(t) = x(t) + iy(t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$, e calcolare l'integrale di variabile reale, ma con coefficienti complessi

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x(t) + iy(t))d(x(t) + iy(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))dt.$$

Consideriamo i seguenti esempi.

Esempio 2.1.4 Calcolare

$$\int_{\Gamma} (\Re z)^2 dz$$

lungo la curva Γ unisce l'origine al punto $2 + i$ secondo i seguenti percorsi:

- la bisettrice del primo e terzo quadrante tra l'origine e il punto $1 + i$ e poi lungo la retta parallela all'asse x fino al punto finale (curva Γ in Figura 2.1);
- lungo l'asse x fino al punto 2 e poi parallelamente all'asse y fino al punto finale, (curva γ in Figura 2.1);

Consideriamo prima il caso della curva Γ :

$$\int_{\Gamma} (\Re z)^2 dz = \int_{\Gamma_1} (\Re z)^2 dz + \int_{\Gamma_2} (\Re z)^2 dz.$$

Parametizziamo le due curve

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]; \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [1, 2].$$

Quindi lungo Γ_1 la sostituzione da fare è:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + it = t(1 + i) \\ (\Re z(t))^2 &= t^2 \\ z'(t) &= (1 + i)dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\int_{\Gamma_1} (\Re z)^2 dz = \int_0^1 t^2(1 + i)dt = \frac{1}{3}(1 + i).$$

Quindi lungo Γ_2 la sostituzione da fare è:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + it = t + i \\ (\Re z(t))^2 &= t^2 \\ z'(t) &= dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\int_{\Gamma_2} (\Re z)^2 dz = \int_1^2 t^2 dt = \frac{1}{3} [t^3]_1^2 = \frac{7}{3}.$$

L'integrale su Γ è la somma dei due integrali:

$$\int_{\Gamma} (\Re z)^2 dz = \frac{1}{3}(8 + i).$$

Il calcolo dell'integrale lungo la curva γ avviene in modo analogo.

$$\int_{\gamma} (\Re z)^2 dz = \int_{\gamma_1} (\Re z)^2 dz + \int_{\gamma_2} (\Re z)^2 dz.$$

Scriviamo innanzitutto la parametrizzazione delle curve γ_1 e γ_2 :

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2]; \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Quindi lungo γ_1 la sostituzione da fare è:

$$\begin{aligned} z(t) &= t \\ (\Re z(t))^2 &= t^2 \\ z'(t) &= dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} (\Re z)^2 dz = \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}.$$

Quindi lungo γ_2 la sostituzione da fare è:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 + it \\ (\Re z(t))^2 &= 4 \\ z'(t) &= idt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\int_{\gamma_2} (\Re z)^2 dz = \int_0^1 4t dt = 4\iota.$$

L'integrale su γ è la somma dei due integrali:

$$\int_{\gamma} (\Re z)^2 dz = \frac{8}{3} + 4\iota.$$

Esempio 2.1.5 Calcolare

$$\int_{\Gamma} z^2 dz$$

lungo le stesse curve dell'esempio precedente.

Lungo Γ_1 abbiamo:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + \iota t = t(1 + \iota) \\ z(t)^2 &= t^2(1 + \iota)^2 = 2\iota t^2 \\ z'(t) &= (1 + \iota) dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} z^2 dz &= \int_0^1 2\iota t^2(1 + \iota) dt = \\ &= 2\iota(1 + \iota) \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}(-1 + \iota). \end{aligned}$$

Lungo Γ_2 abbiamo:

$$\begin{aligned} z(t) &= t + \iota \\ z(t)^2 &= (t + \iota)^2 \\ z'(t) &= dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} z^2 dz &= \int_1^2 (t + \iota)^2 dt = \frac{1}{3} [(t + \iota)^3]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3}(2 + 11\iota + 2 - 2\iota) = \frac{1}{3}(4 + 9\iota). \end{aligned}$$

L'integrale su Γ è la somma dei due integrali:

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \frac{2}{3}(-1 + \iota) + \frac{1}{3}(4 + 9\iota) = \frac{1}{3}(2 + 11\iota).$$

Calcoliamo ora gli integrali lungo la curva γ . Lungo γ_1 la sostituzione da fare è:

$$z(t) = t, \quad z(t)^2 = t^2, \quad z'(t) = dt.$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} z^2 dz = \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}.$$

Quindi lungo γ_2 la sostituzione da fare è:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 + it \\ z(t)^2 &= (2 + it)^2 = 4 + 4it - t^2 \\ z'(t) &= i dt. \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z^2 dz &= \int_0^1 i(4 + 4it - t^2) dt = i \left[4t + 2it^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= i \left[4 + 2it^2 - \frac{1}{3} \right] = -2 + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

L'integrale su γ è la somma dei due integrali:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{8}{3} - 2 + \frac{11}{3}i = \frac{1}{3}(2 + 11i).$$

Osservazione. Gli esempi visti mostrano che vi sono funzioni (come $f(z) = \bar{z}$ oppure $f(z) = \Re z$) per le quali cambiando il cammino di integrazione che congiunge due assegnati punti in \mathbb{C} cambia il valore dell'integrale, mentre vi sono funzioni (come per esempio $f(z) = z^2$) per le quali sembra che il valore dell'integrale sia indipendente dal cammino di integrazione ma dipende esclusivamente dal punto di partenza e da quello di arrivo del cammino.

Teorema 2.1.2 (di Cauchy) *Sia $f(z)$ analitica nella regione \mathcal{R} interna ad una curva semplice e chiusa, ed analitica su C . Allora:*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

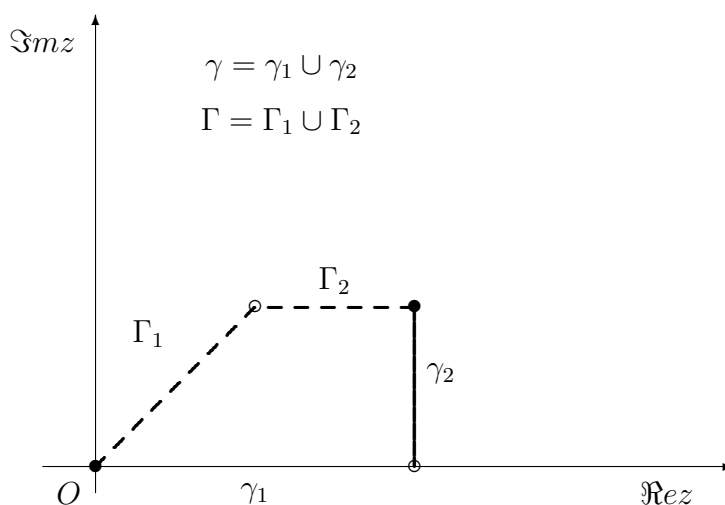


Figura 2.1:

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u(x, y) + \iota v(x, y))(dx + \iota dy) = \\ &= \oint_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + \iota \oint_C (v(x, y) dx + u(x, y) dy). \end{aligned}$$

Per il teorema di Green

$$\begin{aligned} \oint_C (u(x, y) dx - v(x, y) dy) &= \int \int_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \\ \iota \oint_C (v(x, y) dx + u(x, y) dy) &= \iota \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per l'analiticità di f nella regione \mathcal{R} delimitata da C

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pertanto gli integrali (2.4) sono nulli¹. \square

¹Si è fatta l'ipotesi che $f'(z)$ e le derivate parziali prime siano continue, anche se in verità tale restrizione può essere eliminata.

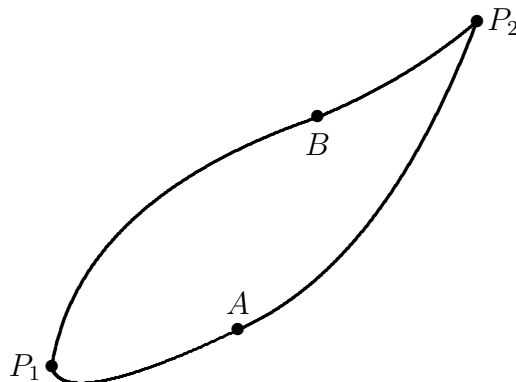


Figura 2.2:

Teorema 2.1.3 (Indipendenza dal cammino) Sia $f(z)$ una funzione analitica nella regione \mathcal{R} interna alla curva semplice e chiusa \mathcal{C} ed analitica su \mathcal{C} . Allora per ogni $P_1, P_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ l'integrale

$$\int_{P_1}^{P_2} f(z) dz$$

è indipendente dal percorso che unisce P_1 e P_2 .

Dimostrazione. Siano P_1AP_2 e P_1BP_2 due qualsiasi percorsi congiungenti P_1 e P_2 (come mostrato in figura 2.2). Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{P_1AP_2BP_1} f(z) dz = 0$$

ovvero

$$\int_{P_1AP_2} f(z) dz + \int_{P_2BP_1} f(z) dz = 0$$

$$\int_{P_1AP_2} f(z) dz = - \int_{P_2BP_1} f(z) dz = \int_{P_1BP_2} f(z) dz. \quad \square$$

Corollario 2.1.1 Se $f(z)$ è analitica all'interno e sul contorno di una regione delimitata da due linee chiuse C_1 e C_2 allora

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

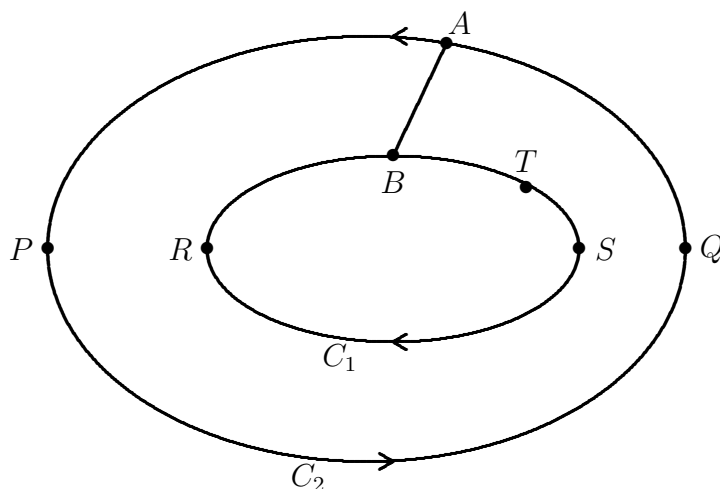


Figura 2.3:

Dimostrazione. Consideriamo due punti qualsiasi su C_2 e C_1 , ed indichiamoli con A e B (come mostrato in figura 2.3), e consideriamo il segmento congiungente questi due punti (il segmento AB viene detto *taglio trasversale*). In virtù del teorema di Cauchy (f è analitica nella regione compresa tra le due curve):

$$\oint_{APQABT SRBA} f(z)dz = 0.$$

Allora

$$\oint_{APQA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{BTSRB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0. \quad (2.5)$$

Ma

$$\int_{AB} f(z)dz = - \int_{BA} f(z)dz.$$

Quindi da (2.5):

$$- \oint_{APQA} f(z)dz = \oint_{AQPA} f(z)dz = \oint_{BTSRB} f(z)dz.$$

Cioè:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz. \quad \square$$

Osservazione. Si può notare che come ipotesi del teorema precedente non è richiesto che $f(z)$ sia analitica nell'interno di C_1 .

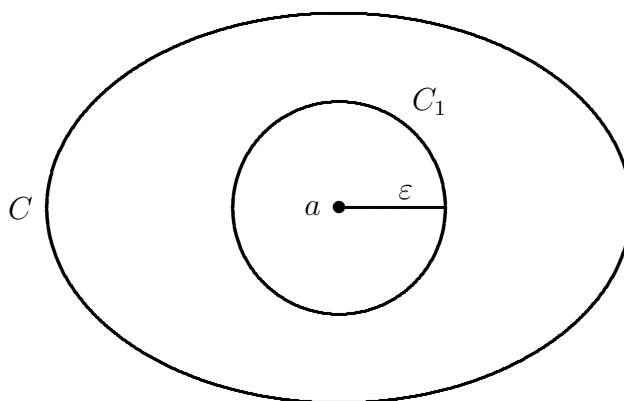


Figura 2.4:

Teorema 2.1.4 (Disuguaglianza ML)

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq M \int_{\Gamma} ds = ML$$

dove M è una limitazione superiore di $|f(z)|$ su Γ , cioè $|f(z)| \leq M \forall z \in \Gamma$, ed L è la lunghezza del percorso.

Esempio 2.1.6 a) Dimostrare che

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

dove C è una curva semplice chiusa che delimita una regione che ha $z = a$ come punto interno.

b) Valutare l'integrale per $n = 0, -1, -2, \dots$

a) Sia C_1 una circonferenza di raggio ε avente centro in $z = a$ (vedere figura 2.4). Poichè la funzione

$$\frac{1}{(z-a)^n}$$

è analitica all'interno e sul contorno della regione delimitata da C e C_1 risulta, applicando il corollario al teorema di Cauchy:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale poniamo

$$z - a = \varepsilon e^{i\theta}$$

da cui $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$. L'integrale vale allora:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^n e^{i\theta n}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta &= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \\ &= \left[\frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{se } n \neq 1. \end{aligned}$$

Se $n = 1$ l'integrale vale

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

- b) Per $n = 0, -1, -2, \dots$ la funzione integranda è rispettivamente $1, (z-a), (z-a)^2, \dots$, funzioni che risultano analitiche ovunque all'interno di C_1 compreso $z = a$. Quindi per il teorema di Cauchy l'integrale è nullo.

Teorema 2.1.5 (Formule integrali di Cauchy) Se $f(z)$ è analitica all'interno e sulla linea semplice e chiusa C (qualunque essa sia) ed a è un qualsiasi punto interno a C , allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dove C è percorsa in senso antiorario. Inoltre la derivata n -esima di $f(z)$ valutata in $z = a$ è data da

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

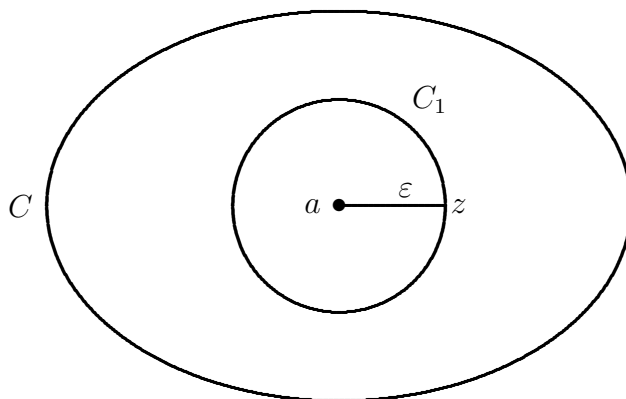


Figura 2.5:

Dimostrazione. Sia C_1 una circonferenza di raggio ε e centro $z = a$ interno a C . Per l'analiticità di f nella regione compresa tra C e C_1 risulta:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Posto $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$, l'integrale a secondo membro diventa

$$\iota \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Poichè f è analitica allora è anche continua perciò

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iota \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \iota \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi \iota f(a).$$

Da cui la prima formula integrale. La dimostrazione della seconda formula viene qui omessa. \square

Osservazione. Le formule integrali di Cauchy sono notevoli perchè affermano che se una funzione $f(z)$ è nota sulla linea chiusa \mathcal{C} , allora essa è nota anche all'interno di \mathcal{C} ed è possibile calcolare anche le derivate di ogni ordine di f in \mathcal{C} . Dunque se una funzione di variabile complessa ammette una derivata prima allora essa ammette derivate di qualunque ordine; ciò non è necessariamente vero per funzioni di variabile reale.

Esempio 2.1.7 Calcolare

a)

$$\oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz;$$

b)

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz;$$

dove C è la circonferenza di equazione $|z - 1| = 3$.

a) Poichè $z = \pi$ è interno alla circonferenza C è

$$\cos \pi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz = -1$$

e pertanto

$$\oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz = -2\pi i.$$

b) Notiamo innanzitutto che i punti $z = 0$ e $z = -1$ sono interni alla circonferenza C . Allora

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz &= \oint_C e^z \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right] dz = \\ &= \oint_C \frac{e^z}{z} dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz = \\ &= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

Esempio 2.1.8 Calcolare

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z - 1)^3} dz$$

dove C è una qualunque curva semplice chiusa che racchiude $z = 1$.
Per la formula integrale di Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Per $n = 2$, $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, $f''(1) = 10$, abbiamo

$$10 = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

ovvero

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = 10\pi i.$$

2.1.7 Punti singolari

Un punto singolare di una funzione $f(z)$ è un valore di z per il quale f non è analitica. Se $f(z)$ è analitica in tutta una regione tranne che in un suo punto interno $z = a$ allora si dice che $z = a$ è una *singolarità isolata* di $f(z)$.

Esistono tre tipi di singolarità isolata. Se la funzione $f(z)$ può essere scritta come

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z-a)^n}, \quad \Phi(a) \neq 0$$

dove $\Phi(z)$ è analitica in una regione che contiene $z = a$ ed n è un intero positivo, con $\Phi(a) \neq 0$, allora $f(z)$ ha in $z = a$ una singolarità isolata detta *polo di ordine n* . Se $n = 1$ il polo si dice *semplice*, se $n = 2$ si dice *doppio* e così via. In altri termini a è un polo se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty.$$

Definizione 2.1.6 Se z_0 è una singolarità per $f(z)$ ma

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

esiste ed è finito allora z_0 si dice *singolarità eliminabile*.

Definizione 2.1.7 Un punto isolato è detto *singolarità essenziale* se non è una *singolarità eliminabile* nè un *polo di ordine n (finito)*.

Esempio 2.1.9 La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^3(z+1)}$$

ha due singolarità: $z = 3$, polo triplo, e $z = -1$, polo semplice.

La funzione

$$f(z) = \frac{9z+4}{z^2+4} = \frac{9z+4}{(z-2i)(z+2i)}$$

ha due singolarità: $z = 2i$ e $z = -2i$, entrambe poli semplici.

La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. Infatti se calcoliamo il limite per z che tende a 0 lungo l'asse delle x positive abbiamo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Dunque $z = 0$ non può essere una singolarità eliminabile. Facciamo vedere che non può nemmeno essere un polo calcolando il limite per z che tende a 0 lungo l'asse delle x negative. Infatti

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

2.1.8 Serie di Taylor e serie di Laurent

Sia $f(z)$ analitica all'interno e su una circonferenza di centro $z = a$. Allora per ogni z interno alla circonferenza vale la seguente rappresentazione (serie di Taylor):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Nel campo delle funzioni di variabile complessa assumono un'importanza superiore le serie di Laurent. Siano C_1 e C_2 due circonferenze concentriche con centro in a e raggi r_1 ed r_2 rispettivamente, con $r_1 < r_2$. Se $a+h$ è un qualsiasi punto nella regione anulare delimitata da C_1 e C_2 ed $f(z)$ è analitica in detta regione allora si ha

$$f(a+h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h^n \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

dove C è una qualunque circonferenza centrata in a e contenuta nella corona circolare.

Dimostrazione. Siano A e B due generici punti rispettivamente su C_1 e C_2 . Consideriamo quindi il taglio trasversale AB (come è riportato in figura 2.6).

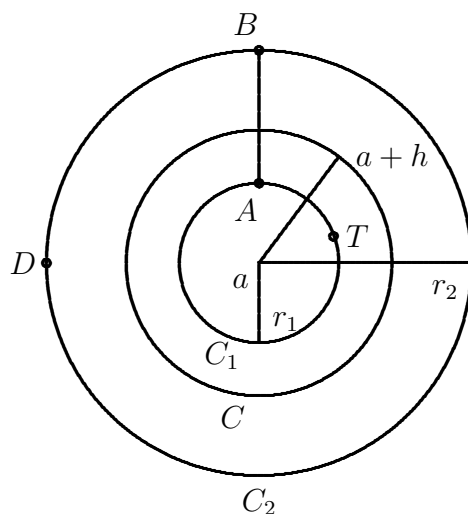


Figura 2.6:

Essendo f analitica nella corona circolare risulta, per la formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2 \cup BA \cup (-C_1) \cup AB} \frac{f(z)}{z - (a+h)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - (a+h)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - (a+h)} dz. \end{aligned}$$

Consideriamo ora $z - (a+h)$ con $z \in C_1$.

$$\begin{aligned} z - (a+h) &= (z-a) - h = -h \left[1 - \frac{z-a}{h} \right] \Rightarrow \\ \frac{1}{z-a-h} &= -\frac{1}{h} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{h}} = \\ &= -\frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^k} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{h}} \right] = \\ &= -\frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^k} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h - z + a} \frac{1}{h^n} \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale su C_1 abbiamo

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a-h} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^{k+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h-z+a} \frac{1}{h^{n+1}} \right] dz = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \right) \frac{1}{h^{k+1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) \frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}} \frac{1}{h-z+a} dz = \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \right) \frac{1}{h^{k+1}} + R_n
 \end{aligned}$$

dove

$$R_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{h} \right)^{n+1} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz.$$

Su C_1 si ha

$$\left| \frac{f(z)}{z-(a+h)} \right| \leq M; \quad \left| \frac{z-a}{h} \right| = \rho < 1.$$

Per la disuguaglianza ML:

$$|R_n| \leq M\rho^{n+1}r_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Conseguentemente

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \frac{1}{h^{k+1}}$$

quindi posto $n = -(k+1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \frac{1}{h^{k+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz h^n.$$

Si noti che poichè la funzione

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

è analitica in tutta la regione anulare compresa tra C_1 e C e sopra queste l'integrale su C_1 è lo stesso che su C . Per l'integrale su C_2 si procede in modo perfettamente analogo. \square

La parte

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n h^n$$

della serie di Laurent si chiama *parte principale* o *parte polare* mentre la parte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

si chiama *parte analitica*.

Nelle pagine precedenti abbiamo caratterizzato i diversi tipi di singolarità di una funzione attraverso la nozione di limite. È possibile stabilire il tipo di singolarità osservando la parte principale dello sviluppo di Laurent di una funzione. In pratica vale il seguente teorema.

Teorema 2.1.6 (Enunciato). *Sia z_0 una singolarità isolata per una funzione analitica $f(z)$ e sia $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ la parte principale della serie di Laurent per $f(z)$. Allora*

1. z_0 è una singolarità eliminabile se e solo se $a_{-m} = 0$ per ogni m ;
2. z_0 è un polo di ordine $n > 0$ se e solo se la parte principale è la somma finita:

$$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0};$$

3. z_0 è una singolarità essenziale se e solo se la parte principale ha infiniti termini non nulli. \square

2.1.9 Residui e Teorema dei Residui

Se $f(z)$ è analitica ovunque all'interno di una curva C_1 semplice e chiusa ad eccezione di $z = a$ che è un polo di ordine n allora f ha la rappresentazione:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (2.6)$$

con $a_{-n} \neq 0$. Proviamo allora che

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (2.7)$$

dove

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \quad (2.8)$$

e C è una qualunque circonferenza centrata in a e contenuta nella regione delimitata da C_1 . Inoltre a_{-1} è detto *residuo di $f(z)$ nel polo $z = a$* e si indica con $R(f, a)$.

Diamo qui un cenno della dimostrazione della (2.7). Integrando (2.6) su C segue:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} dz + \dots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a} dz + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \oint_C (z-a)^k dz.$$

Il risultato è immediata conseguenza dell'esempio 2.1.6.

Moltiplicando i membri di (2.6) per $(z-a)^n$ abbiamo

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots$$

Prendendo la derivata $(n-1)$ -esima di ambo i membri e passando al limite per $z \rightarrow a$ segue:

$$(n-1)! a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

Teorema 2.1.7 (dei Residui) *Se $f(z)$ è analitica all'interno e su una curva chiusa e semplice C ad eccezione di un numero finito di poli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ allora*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^m R(f, \alpha_i)$$

dove $R(f, \alpha_i)$ è il residuo di f in α_i .

Dimostrazione. Per $i = 1, \dots, m$, sia C_i una circonferenza di centro α_i e raggio r_i (parametrizzate al solito in senso antiorario), ognuna delle quali contenuta in C (vedere figura 2.7).

Considerando dei tagli trasversali tra C e ognuna delle C_i e tenendo conto del teorema di Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

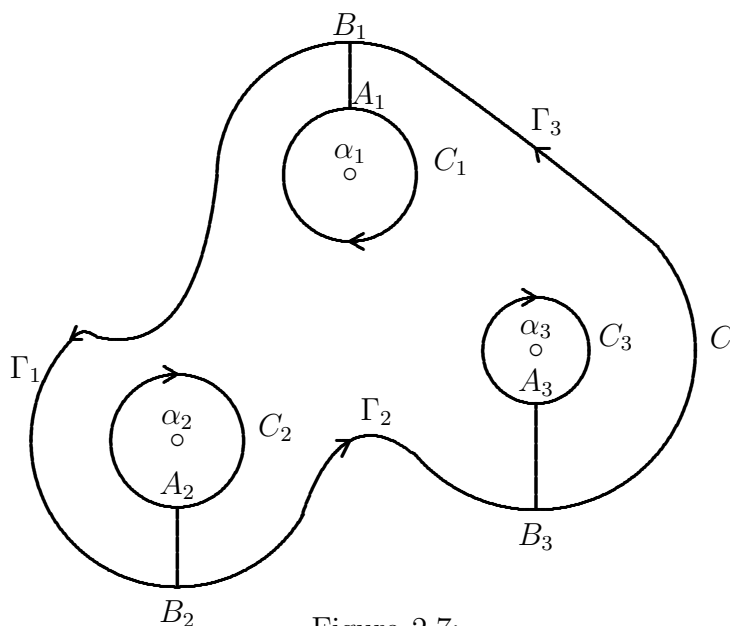


Figura 2.7:

dove

$$\Gamma = \Gamma_1 + B_2A_2 - C_2 - A_2B_2 + \Gamma_2 + B_3A_3 - C_3 - A_3B_3 + \\ + \Gamma_3 + B_1A_1 - C_1 - A_1B_1$$

e quindi

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z)dz.$$

Poichè per il polo \$\alpha_i\$ si ha

$$f(z) = \frac{a_{-m_i}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha_i} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,i}(z - \alpha_i)^k$$

Applicando la formula (2.7) segue:

$$\oint_{C_i} f(z)dz = 2\pi i R(f, \alpha_i)$$

e pertanto

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^m R(f, \alpha_i). \quad \square$$

Esempio 2.1.10 Calcolare il seguente integrale:

$$\oint_C \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2} dz,$$

dove C denota la circonferenza $\{x+iy \in \mathbb{C}; x^2+y^2-4x+3=0\}$ positivamente orientata.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che la circonferenza C ha centro nel punto di coordinate $(2,0)$ e raggio pari a 1. La funzione

$$f(z) = \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}$$

ha un unico polo doppio in $z=2$ che è interno a C , quindi l'integrale dell'esercizio è uguale a $2\pi i R(f,2)$. Calcoliamo quindi il residuo di $f(z)$ in $z=2$.

$$\begin{aligned} R(f(z), 2) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left((z-2)^2 \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} (z^2(2z-1)^2) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} [2z(2z-1)^2 + 4z^2(2z-1)] = 84. \end{aligned}$$

Quindi

$$\oint_C \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2} dz = 168\pi i.$$

Esempio 2.1.11 Calcolare il seguente integrale:

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

dove C è la curva:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)|^2 = 2\}$$

positivamente orientata.

Svolgimento. La curva C è la circonferenza di centro nel punto $1+i$ e raggio $\sqrt{2}$. I poli della funzione integranda sono

$z = 1$	polo doppio interno a C
$z = i$	polo semplice interno a C
$z = -i$	polo semplice esterno a C .

Pertanto

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz &= 2\pi\iota[R(f, \iota) + R(f, 1)]. \\ R(f, \iota) &= \lim_{z \rightarrow \iota} (z - \iota) \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{1}{(z + \iota)(z - 1)^2} = \frac{1}{4}. \\ R(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

In definitiva

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi\iota \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{\pi\iota}{2}.$$

Capitolo 3

La Trasformata di Laplace

3.1 Introduzione

Definizione 3.1.1 Sia $F(t)$ una funzione definita per $t > 0$. Si dice Trasformata di Laplace di $F(t)$, ed è indicata con $L[F(t)]$, la seguente

$$L[F(t)] = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad (3.1)$$

con s parametro reale.

La Trasformata di Laplace $L[F(t)]$ esiste se l'integrale in (3.1) esiste per qualche valore di s .

Definizione 3.1.2 Una funzione $F(t)$ è detta generalmente continua nell'intervallo $[a, b]$ se questo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua ed ammette limite destro e sinistro finiti.

Definizione 3.1.3 Se esistono due numeri reali γ, M , con $M > 0$, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \quad (|F(t)| < M e^{\gamma t}), \quad \text{per ogni } t \geq t_0$$

allora diremo che $F(t)$ è una funzione di ordine esponenziale γ per t che tende a $+\infty$.

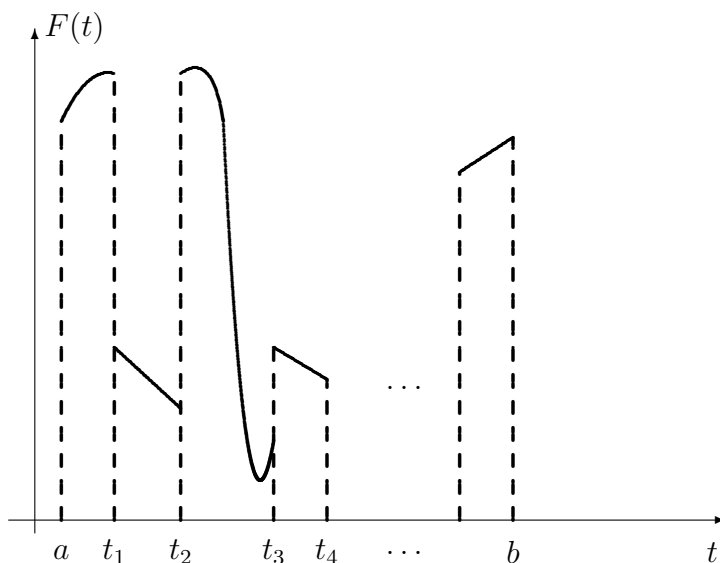


Figura 3.1: Esempio di funzione generalmente continua.

Esempio 3.1.1 La funzione $F(t) = t^2$ è di ordine esponenziale 2. Infatti

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2!} + \dots > 2t^2 \quad \forall t > 0.$$

Dunque

$$t^2 < \frac{1}{2}e^{2t} \quad \forall t > 0.$$

Esempio 3.1.2 La funzione $F(t) = e^{t^3}$ non è di ordine esponenziale. Infatti

$$|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$$

e questa quantità può essere resa maggiore di qualunque quantità assegnata, facendo crescere opportunamente t .

Vediamo ora le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Teorema 3.1.1 Se la funzione $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq t_0$ ed è di ordine esponenziale γ per $t > t_0$ allora la trasformata di Laplace

$$f(s) = L[F(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

esiste per ogni $s > \gamma$.

Dimostrazione. Fissato un qualunque $t_0 > 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} F(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Poichè $F(t)$ è generalmente continua su $[0, t_0]$ essa è ivi integrabile e dunque il primo integrale a secondo membro esiste. Per quanto concerne il secondo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} |F(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{(\gamma-s)t} dt = \frac{M}{\gamma-s} \int_0^{+\infty} (\gamma-s) e^{(\gamma-s)t} dt = \\ &= \frac{M}{s-\gamma} \end{aligned}$$

per $s > \gamma$. \square

Teorema 3.1.2 *Sia $F(t)$ tale che*

1.

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \pm\infty$$

2. $F(t)$ continua a tratti in ogni intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$, per qualche $t_0 > 0$;

3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^n F(t) = 0$$

per qualche $n \in]0, 1[$;

4. $F(t)$ è di ordine esponenziale γ per $t > t_1$,

allora $L[F(t)]$ esiste. \square

3.1.1 Proprietà delle Trasformate di Laplace

Assumiamo che per una assegnata funzione $F(t)$ valgano le ipotesi del teorema 3.1.1 allora per la trasformata di Laplace sono valide le seguenti proprietà.

1. *Proprietà di linearità:*

$$L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] = c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, s > \gamma.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(c_1F_1(t) + c_2F_2(t))dt = \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_2(t)dt = \\ &= c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)]. \quad \square \end{aligned}$$

2. *I^a Proprietà di traslazione:*

posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[e^{at}F(t)] = f(s - a), \quad \forall a \in \mathbb{R}, s > \gamma + a.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[e^{at}F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s - a). \quad \square \end{aligned}$$

3. *II^a Proprietà di traslazione:*

posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

e

$$G(t) = \begin{cases} F(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

risulta

$$L[G(t)] = e^{-as} f(s), \quad s > \gamma.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt = \\ &= \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t) dt = \\ &= \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} F(u) du = \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u) du = e^{-sa} f(s). \quad \square \end{aligned}$$

4. *Proprietà del cambio di scala:*

posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[F(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, \quad s > \gamma a.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[F(at)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{u}{a}} \frac{F(u)}{a} du = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}u} F(u) du = \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Vediamo ora le trasformate di Laplace di alcune funzioni fondamentali.

1.

$$L[1] = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[1] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p e^{-st} dt = \\ &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s) e^{-st} dt = \\ &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} [e^{-st}]_0^p = \frac{1}{s}, \quad s > 0; \end{aligned}$$

2.

$$L[t] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p e^{-st} t dt = \\ &= - \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s) t e^{-st} dt = \\ &= - \frac{1}{s} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p t \frac{d}{dt} (e^{-st}) dt = \\ &= - \frac{1}{s} \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ [te^{-st}]_0^p - \int_0^p e^{-st} dt \right\} = \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sp}}{s^2} - \frac{pe^{-sp}}{s} \right] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0; \end{aligned}$$

3. per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \quad (3.2)$$

Infatti basta osservare che $L[1] = 1/s$ ed applicare la I^a proprietà di traslazione;

4.

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0;$$

5.

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

Queste ultime due trasformate possono essere calcolate utilizzando la definizione di trasformata di Laplace, ma vediamo di trovare un modo alternativo.

Supponendo che la (3.2) sia vera anche per numeri complessi, possiamo scrivere

$$L[e^{\iota at}] = \frac{1}{s - \iota a} = \frac{s + \iota a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2} + \iota \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (3.3)$$

Applicando la proprietà di linearità si ha

$$\begin{aligned} L[e^{\iota at}] &= L[\cos at + \iota \sin at] = \\ &= L[\cos at] + \iota L[\sin at] = \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2} + \iota \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

quindi

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

6.

$$\begin{aligned} L[\sinh at] &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|; \\ L[\sinh at] &= L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2}L[e^{at}] - \frac{1}{2}L[e^{-at}] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a}\right] = \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|. \end{aligned}$$

7.

$$L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.$$

Analogamente al caso precedente, ricordando che

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione delle altre proprietà della trasformata di Laplace.

Esempio 3.1.3

$$L[e^{-t} \cos 2t] = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}.$$

Ricordando che

$$L[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

si ha

$$L[e^{-t} \cos 2t] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}.$$

Esempio 3.1.4

$$L[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Posto $f(s) = L[\sin t]$ si ha

$$L[\sin 3t] = \frac{1}{3} f\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Teorema 3.1.3 Se $L[F(t)] = f(s)$ allora

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s), \quad s > \gamma.$$

Dimostrazione. Poniamo, al solito,

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Allora, per induzione

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-st} F(t) dt = \\
 &= - \int_0^{+\infty} e^{-st} (tF(t)) dt = \\
 &= -L[tF(t)].
 \end{aligned}$$

Dunque

$$L[tF(t)] = -f'(s)$$

e la tesi è vera per $n = 1$. La dimostrazione si completa per induzione. Assunta vera la tesi per un fissato k dimostriamola per $k + 1$.

$$\begin{aligned}
 L[t^{k+1}F(t)] &= L[t(t^k F(t))] = \\
 &= -\frac{d}{ds} L[t^k F(t)] = \\
 &= -\frac{d}{ds} (-1)^k f^{(k)}(s) = \\
 &= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} f(s). \quad \square
 \end{aligned}$$

3.1.2 Trasformata di Laplace di derivate e funzioni periodiche

Teorema 3.1.4 *Sia $F(t)$ continua in $0 \leq t \leq t_0$, di ordine esponenziale γ per $t > t_0$, ed $F'(t)$ generalmente continua in $0 \leq t \leq t_0$. Posto*

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) \quad s > \gamma.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 L[F'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F'(t) dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p e^{-st} F'(t) dt = \\
 &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ [e^{-st} F(t)]_0^p + s \int_0^p e^{-st} F(t) dt \right\} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ e^{-sp} F(p) - F(0) + s \int_0^p e^{-st} F(t) dt \right\} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-sp} F(p) + \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(s \int_0^p e^{-st} F(t) dt - F(0) \right).
 \end{aligned}$$

Essendo F di ordine esponenziale il primo limite è nullo e dunque segue la tesi. \square

Osservazione 1. Se nelle ipotesi del precedente teorema $F(t)$ non è continua in $t = 0$ ma esiste il

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = F(0^+),$$

allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0^+).$$

Osservazione 2. Se $F(t)$ non è continua in $t = a$, allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) - e^{-as}(F(a^+) - F(a^-)).$$

Teorema 3.1.5 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se $F^{(k)}(t)$ è continua in $0 \leq t \leq t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$, per $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $F^{(n)}(t)$ è generalmente continua in $0 \leq t \leq t_0$, allora*

$$L[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} F^{(k-1)}(0).$$

Dimostrazione. (Per induzione). Per $n = 1$ la tesi è una diretta conseguenza del teorema 3.1.4. Supponiamo vera la tesi per k e dimostriamola per $k + 1$.

$$\begin{aligned}
 L[F^{(k+1)}(t)] &= L\left[\frac{d}{dt}F^{(k)}(t)\right] = \\
 &= sL[F^{(k)}(t)] - F^{(k)}(0) = \\
 &= s\left\{s^k f(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j}F^{(j-1)}(0)\right\} - F^{(k)}(0) = \\
 &= s^{k+1}f(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j+1}F^{(j-1)}(0) - F^{(k)}(0) = \\
 &= s^{k+1}f(s) - \sum_{j=1}^{k+1} s^{k-j+1}F^{(j-1)}(0). \quad \square
 \end{aligned}$$

Teorema 3.1.6 Sia $F(t)$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, cioè $F(t + T) = F(t)$ per ogni t . Allora

$$L[F(t)] = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \\
 &= \int_0^T e^{-st} F(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} F(t) dt + \dots = \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} F(t) dt = \quad (\text{posto } t = u + kT) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-s(u+kT)} F(u + kT) du = \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} \int_0^T e^{-su} F(u) du = \\
 &= \frac{\int_0^T e^{-su} F(u) du}{1 - e^{-sT}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.1.3 Trasformata di Laplace di integrali

Teorema 3.1.7 *Sia $L[F(t)] = f(s)$, allora*

$$L\left[\int_0^t F(u) du\right] = \frac{f(s)}{s}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$G(t) = \int_0^t F(u) du.$$

Osserviamo che $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. Passando alla trasformata di Laplace di ambo i membri segue:

$$L[G'(t)] = sL[G(t)] - G(0) = sL[G(t)] = f(s)$$

ovvero

$$L\left[\int_0^t F(u) du\right] = \frac{f(s)}{s}. \quad \square$$

Esempio 3.1.5

$$L\left[\int_0^t \sin 2u du\right] = \frac{L[\sin 2t]}{s} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$

Teorema 3.1.8 *Posto $L[F(t)] = f(s)$ ed $F(t)$ soddisfacente le ipotesi del teorema 3.1.1 si ha*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0.$$

Dimostrazione.

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$$

abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^p e^{-st} F(t) dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^p e^{-st} F(t) dt \right| &< \int_0^p e^{-st} e^{\gamma t} M dt = \\ &= M \int_0^p e^{-(s-\gamma)t} dt = \\ &= \frac{M}{\gamma - s} [e^{-(s-\gamma)t}]_0^p = \\ &= \frac{M}{\gamma - s} [e^{-(s-\gamma)p} - 1]. \end{aligned}$$

Passando al limite per $s, p \rightarrow +\infty$ si ha

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{M}{\gamma - s} [e^{-(s-\gamma)p} - 1] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{-M}{\gamma - s} = 0$$

e quindi segue la tesi. \square

3.1.4 Divisione per t

Teorema 3.1.9 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t}$$

esiste ed è finito allora

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} f(u)du.$$

Dimostrazione. Sia

$$G(t) = \frac{F(t)}{t}$$

ovvero

$$F(t) = tG(t);$$

passando alle trasformate di Laplace dei due membri ed applicando il teorema 3.1.3 segue

$$L[F(t)] = L[tG(t)] = -\frac{d}{ds}L[G(t)].$$

Posto $g(s) = L[G(t)]$, abbiamo

$$f(s) = -\frac{d}{ds}g(s).$$

Integrando membro a membro tra s e p e utilizzando il teorema 3.1.8 segue:

$$\int_s^p f(u)du = -\int_s^p \frac{d}{du}g(u)du = g(s) - g(p).$$

Da quest'ultima passando al limite per $p \rightarrow +\infty$ segue la tesi. \square

3.1.5 Applicazione delle trasformate di Laplace al calcolo di integrali

Se $f(s) = L[F(t)]$ allora

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

da cui

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{+\infty} F(t)dt.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt = f(0)$$

(purchè gli integrali in oggetto siano convergenti).

3.2 Antitrasformata di Laplace

Definizione 3.2.1 Se $\mathcal{N}(t)$ è una funzione di t tale che, per ogni $t > 0$, si ha

$$\int_0^t \mathcal{N}(u) du = 0$$

allora \mathcal{N} si dice Funzione Nulla.

Esempio 3.2.1 La funzione:

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione nulla.

In generale ogni funzione che abbia valore nullo in tutti i punti, eccetto in un insieme numerabile, è una funzione nulla. Evidentemente

$$L[\mathcal{N}(t)] = 0.$$

Definizione 3.2.2 Se $L[F(t)] = f(s)$ è la trasformata di Laplace di $F(t)$ allora $F(t)$ si dice Antitrasformata di Laplace di $f(s)$ (oppure Trasformata Inversa) e si scrive

$$F(t) = L^{-1}[f(s)].$$

L^{-1} è detto Operatore Trasformata Inversa di Laplace.

Evidentemente poichè la trasformata di Laplace di una funzione nulla è 0 ne consegue che

$$L[F(t) + \mathcal{N}(t)] = L[F(t)] + L[\mathcal{N}(t)] = L[F(t)]$$

e perciò possiamo concludere che in generale due diverse funzioni possono ammettere la stessa trasformata di Laplace.

Se si escludono le funzioni nulle è però possibile stabilire un risultato di unicità, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 (Teorema di Lerch). Se $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo $0 \leq t \leq t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$ allora l'Antitrasformata di Laplace di $f(s)$

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

è unica. \square

Nel seguito assumeremo sempre, salvo esplicita affermazione contraria, che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Lerch.

3.2.1 Proprietà dell'Antitrasformata di Laplace

1. *Proprietà di linearità:*

se $f_1(s)$ ed $f_2(s)$ sono le trasformate di Laplace di $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ rispettivamente, allora

$$\begin{aligned} L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] &= c_1 L^{-1}[f_1(s)] + c_2 L^{-1}[f_2(s)] = \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)] = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

conseguentemente

$$\begin{aligned} c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) &= L^{-1}[L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)]] = \\ &= L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]; \end{aligned}$$

ma, poichè $F_1(t) = L^{-1}[f_1(s)]$ e $F_2(t) = L^{-1}[f_2(s)]$ segue la tesi. \square

2. *I^a Proprietà di traslazione:*

posto

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

si ha

$$L^{-1}[f(s - a)] = e^{at} F(t).$$

Dimostrazione. Poichè

$$L[e^{at} F(t)] = f(s - a)$$

allora

$$L^{-1}[f(s - a)] = e^{at} F(t). \quad \square$$

In alternativa

$$\begin{aligned} f(s - a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt = \\ &= L[e^{at} F(t)]. \end{aligned}$$

Dunque

$$L^{-1}[f(s - a)] = e^{at} F(t). \quad \square$$

3. II^a Proprietà di traslazione:

posto

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

si ha

$$L^{-1}[e^{-as}f(s)] = G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

Dimostrazione. Da

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{-sa}f(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} F(t) dt = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-su} F(u-a) du = \\ &= \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

4. Proprietà del cambio di scala:

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

allora

$$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right).$$

Dimostrazione. Per la proprietà del cambio di scala delle trasformate di Laplace si ha:

$$L\left[F\left(\frac{t}{k}\right)\right] = kf(ks).$$

Allora

$$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right). \quad \square$$

5. *Antitrasformata di Laplace delle derivate:*

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

allora

$$L^{-1}[f^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n F(t).$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analogia proprietà delle trasformate di Laplace. \square

6. *Antitrasformata di Laplace di integrali:*

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

allora

$$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} f(u)du\right] = \frac{F(t)}{t}.$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analogia proprietà delle trasformate di Laplace.

7. *Prodotto per s:*

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

e $F(0) = 0$, allora

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t).$$

Se $F(0) \neq 0$ allora

$$L^{-1}[sf(s) - F(0)] = F'(t),$$

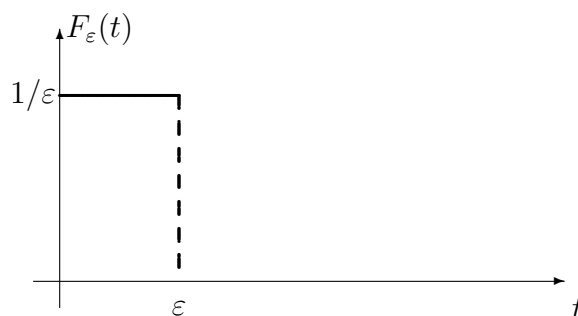
quindi

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + L^{-1}[F(0)].$$

Dobbiamo quindi determinare quale funzione ammette come trasformata una costante. Per questo definiamo la seguente funzione:

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

dove $\varepsilon > 0$. È chiaro che per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'altezza del rettangolo in figura

Figura 3.2: Grafico della funzione $F_\varepsilon(t)$.

3.2 cresce oltre ogni limite mentre la larghezza tende a 0, in modo tale però che l'area del rettangolo sia costantemente uguale a 1, cioè

$$\int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace di tale funzione.

$$\begin{aligned} L[F_\varepsilon(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F_\varepsilon(t) dt = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}. \end{aligned}$$

Quando ε tende a zero, la funzione $F_\varepsilon(t)$ tende ad una funzione, che viene indicata con $\delta(t)$, chiamata *delta di Dirac* o *funzione impulsiva unitaria*. La trasformata di Laplace della funzione $\delta(t)$ si ottiene calcolando il limite, per ε che tende a zero, della trasformata di $F_\varepsilon(t)$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[F_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = 1.$$

Per ottenere l'ultimo passaggio è sufficiente applicare il Teorema di de L'Hopital. In definitiva

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + F(0)\delta(t) \quad (3.4)$$

La funzione $\delta(t)$ gode delle seguenti proprietà:

(i)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

(ii)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)G(t)dt = G(0)$$

per ogni G funzione continua;

(iii)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t-a)G(t)dt = G(a)$$

per ogni G funzione ;

(iv)

$$L[\delta(t-a)] = e^{-as};$$

8. *Divisione per s :*

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

allora

$$L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t F(u)du.$$

Dimostrazione. Basta tener conto dell'analogia proprietà delle trasformate di Laplace. \square

9. *Proprietà di Convoluzione:*

se

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

e

$$L^{-1}[g(s)] = G(t)$$

allora

$$L^{-1}[f(s)g(s)] = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G.$$

$F * G$ è detta *Convoluzione* di F e G .

Dimostrazione. La tesi è dimostrata se si prova che

$$f(s)g(s) = L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right].$$

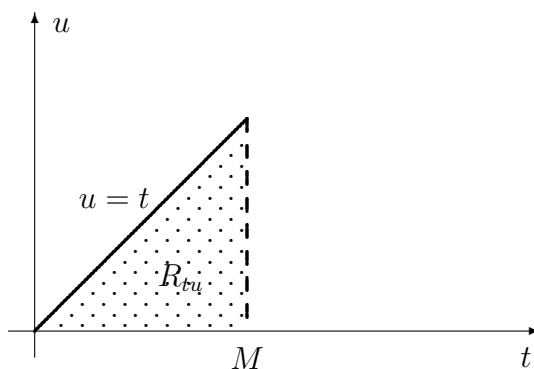


Figura 3.3:

Allora

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^t F(u)G(t-u)du \right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t F(u)G(t-u)du \right) dt = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-st} \left(\int_0^t F(u)G(t-u)du \right) dt = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_M &= \int_0^M e^{-st} \left(\int_0^t F(u)G(t-u)du \right) dt = \\ &= \int \int_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)du dt. \end{aligned}$$

ed R_{tu} è la zona indicata in figura 3.3.

Consideriamo ora il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} v = t - u & t = t(v, u) = v + u \\ u = u & u = (v, u) = u. \end{cases}$$

Cosicchè la regione R_{tu} è trasformata nella regione R_{vu} in figura 3.4.

Per un noto teorema sul cambiamento di variabile negli integrali doppi

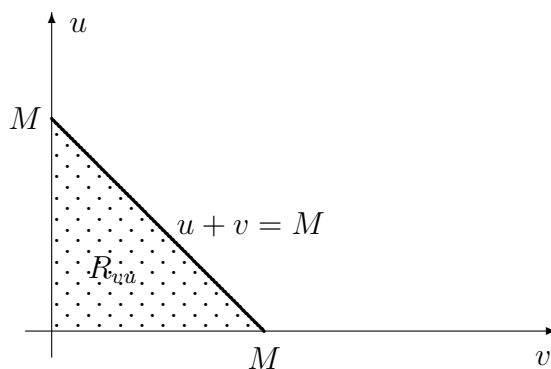


Figura 3.4:

si ha:

$$\begin{aligned} S_M &= \int \int_{R_{tu}} e^{-st} F(u) G(t-u) du dt = \\ &= \int \int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) J(u, v) du dv. \end{aligned}$$

dove

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$S_M = \int \int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv.$$

Dunque

$$S_M = \int_{v=0}^M \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv.$$

Definiamo ora la seguente funzione:

$$K(u, v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u) G(v) & u + v \leq M \\ 0 & u + v > M, \quad 0 \leq v \leq M. \end{cases}$$

In termini di questa funzione abbiamo

$$S_M = \int_{v=0}^M \int_{u=0}^M K(u, v) du dv.$$

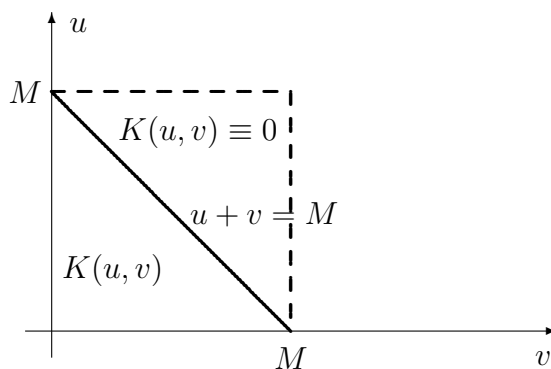


Figura 3.5:

Allora

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow +\infty} S_M &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{v=0}^M \int_{u=0}^M K(u, v) du dv = \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{v=0}^M \int_{u=0}^M e^{-s(u+v)} F(u) G(v) du dv = \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{u=0}^M e^{-su} F(u) du \int_{v=0}^M e^{-sv} G(v) dv = \\
 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} F(u) du \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-sv} G(v) dv \right) = \\
 &= f(s)g(s). \quad \square
 \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa, commutativa e distributiva.

3.3 Sviluppo in Frazioni Parziali

Ogni funzione razionale $\frac{P(s)}{Q(s)}$ con grado di P minore del grado di Q , può essere espressa come somma di funzioni razionali (dette *frazioni parziali*) del tipo:

$$\frac{A}{(as + b)^k} \quad \text{e} \quad \frac{As + B}{(as^2 + bs + c)^k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ne consegue che determinando l'antitrasformata di Laplace di ognuna di queste frazioni parziali, si può dare l'antitrasformata di una qualunque funzione razionale.

Esempio 3.3.1

$$\frac{2s - 5}{(3s - 4)(2s + 1)^3} = \frac{A}{3s - 4} + \frac{B}{(2s + 1)^3} + \frac{C}{(2s + 1)^2} + \frac{D}{2s + 1}.$$

Esempio 3.3.2

$$\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 2s + 4)^2(s - 5)} = \frac{As + B}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 4} + \frac{E}{s - 5}.$$

Le costanti che compaiono in entrambi gli esempi possono essere calcolate, per esempio, riducendo le frazioni allo stesso denominatore ed applicando poi il principio di identità dei polinomi. Si ottiene così un sistema di equazioni lineari nelle incognite A , B , C , D ed E .

Descriviamo ora un metodo abitualmente usato in un contesto applicativo quale il calcolo delle antitrasformate di Laplace, basato sulla nozione di residuo.

Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

con $z = \alpha + \iota\beta$. Ci proponiamo di scomporre $F(z)$ in una somma di termini che siano polinomi o funzioni razionali del tipo

$$\frac{A}{(z - z_0)^k}$$

oppure del tipo

$$\frac{B}{(z - \alpha_0)^2 + \beta_0^2} \quad \text{oppure} \quad \frac{Cz}{(z - \alpha_0)^2 + \beta_0^2}.$$

3.3.1 Poli semplici

Assumiamo che il denominatore di $F(z)$, $Q_m(z)$, che è un polinomio di grado m , si annulli negli m punti

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \quad \text{con } z_i \neq z_j, \forall i, j, i \neq j$$

e nei quali non si annulla il polinomio $P_n(z)$. È noto allora che $F(z)$ può essere così scomposta:

$$F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{z - z_k} \quad (3.5)$$

dove $D_{n-m}(z)$ è il *quoziente* di $P_n(z)$ e $Q_m(z)$. Uguagliando i coefficienti dei numeratori nella relazione (3.5) si ottiene un sistema di equazioni algebriche lineari che permettono di determinare i coefficienti A_k .

Esempio 3.3.3 Scomporre

$$F(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z + 2)(z - 1)}$$

in frazioni semplici.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{2z^2 + 1}{(z + 2)(z - 1)} &= D_0 + \frac{A}{z + 2} + \frac{B}{z - 1} = \\ &= \frac{D_0 z^2 + (D_0 + A + B)z + (-2D_0 - A + 2B)}{(z + 2)(z - 1)}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} D_0 &= 2 \\ D_0 + A + B &= 0 \\ -2D_0 - A + 2B &= 1 \end{aligned}$$

da cui risolvendo ricaviamo $D_0 = 2$, $A = -3$ e $B = 1$. Quindi in definitiva

$$F(z) = 2 + \frac{-3}{z + 2} + \frac{1}{z - 1}.$$

3.3.2 Scomposizione con la tecnica dei residui

Proviamo ora che le costanti A_k , $k = 1, \dots, m$, nella (3.5) possono essere ottenute con il calcolo di opportuni residui. Siano C_k , $k = 1, \dots, m$, circonferenze di centro rispettivamente z_k , $k = 1, \dots, m$, e raggio sufficientemente piccolo in modo da contenere una sola singolarità polare (come mostrato in figura 3.6).

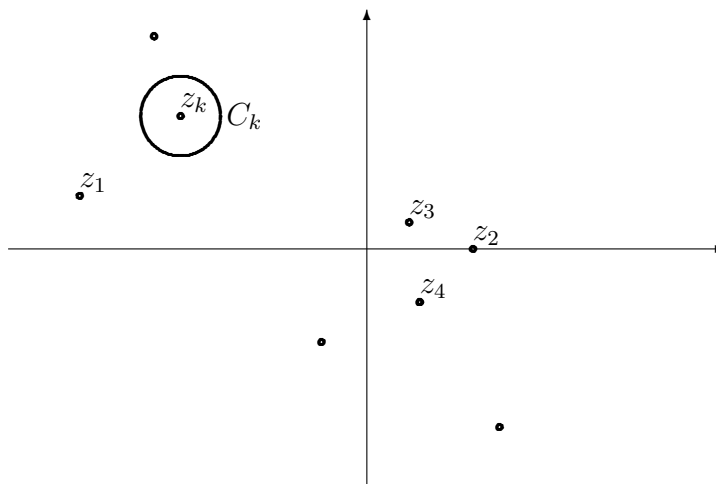


Figura 3.6:

$$\begin{aligned}
 R(F, z_k) &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} F(z) dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} \left[D_{n-m}(z) + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z - z_i} \right] dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi\iota} \left[\oint_{C_k} D_{n-m}(z) dz + \sum_{i=1}^m \oint_{C_k} \frac{A_i}{z - z_i} dz \right].
 \end{aligned}$$

Poichè $D_{n-m}(z)$ e tutte le frazioni $\frac{A_i}{z - z_i}$, per $i \neq k$, sono funzioni analitiche nel cerchio di bordo C_k per il teorema di Cauchy gli integrali di tali funzioni su C_k sono nulli e pertanto

$$R(F, z_k) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} \frac{A_k}{z - z_k} dz = \frac{1}{2\pi\iota} 2\pi\iota A_k = A_k.$$

Pertanto

$$\boxed{F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^m \frac{R(F, z_k)}{z - z_k}.} \tag{3.6}$$

Esempio 3.3.4 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione*

$$F(z) = \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z^2 - 4)(z^2 - 1)}.$$

La funzione ha come numeratore un polinomio di grado inferiore rispetto al denominatore, perciò $D_{n-m}(z) = 0$. Ora dalla (3.6):

$$F(z) = \frac{R(F, -2)}{z+2} + \frac{R(F, -1)}{z+1} + \frac{R(F, 0)}{z} + \frac{R(F, 1)}{z-1} + \frac{R(F, 2)}{z-2}.$$

$$R(F, -2) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z-2)(z+1)(z-1)} \right|_{z=-2} = 1$$

$$R(F, -1) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z+2)(z-2)(z-1)} \right|_{z=-1} = 2$$

$$R(F, 0) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{(z+2)(z-2)(z+1)(z-1)} \right|_{z=0} = 3$$

$$R(F, 1) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z-2)(z+2)(z+1)} \right|_{z=1} = 4$$

$$R(F, 2) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z+2)(z+1)(z-1)} \right|_{z=2} = 5.$$

Quindi

$$F(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z+1} + \frac{3}{z} + \frac{4}{z-1} + \frac{5}{z-2}.$$

3.3.3 Poli multipli

Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

ed assumiamo che $F(z)$ abbia un solo polo multiplo di molteplicità m in z_0 e $P_n(z_0) \neq 0$. Allora $F(z)$ può essere così scomposta

$$F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(z-z_0)^k} \quad (3.7)$$

dove $D_{n-m}(z)$ è presente solo se $n \geq m$; inoltre, per $k = 1, \dots, m$, le costanti al numeratore hanno la seguente espressione:

$$A_k = R[(z - z_0)^{k-1} F(z), z_0] = c_{-k} \quad (3.8)$$

dove $c_{-m}, c_{-(m-1)}, \dots, c_{-1}$ indicano i coefficienti di indice negativo dello sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 di $F(z)$:

$$F(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

Dimostriamo la (3.8).

Sia C una circonferenza di centro z_0 . Allora

$$\frac{1}{2\pi\iota} \oint_C F(z) dz = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C D_{n-m}(z) dz + \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(z - z_0)^k} dz.$$

In virtù dell'esempio 2.1.7 segue che tutti gli addendi a secondo membro sono nulli eccetto il primo sotto il segno di sommatoria. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi\iota} \oint_C F(z) dz = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \frac{A_1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi\iota} A_1 2\pi\iota = A_1. \quad (3.9)$$

Inoltre integrando lo sviluppo in serie di Laurent di $F(z)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C F(z) dz &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} dz + \dots + \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \frac{c_{-1}}{z - z_0} dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi\iota} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_C c_k (z - z_0)^k dz. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le relazioni (3.9) e (3.10) permettono di concludere che

$$A_1 = c_{-1} = R(F, z_0).$$

Per ottenere gli altri coefficienti A_2, \dots, A_m si integra su C non $F(z)$ ma la funzione

$$(z - z_0)^{k-1} F(z) \quad k = 2, \dots, m.$$

Esempio 3.3.5 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione razionale*

$$F(z) = \frac{z^5}{(z-1)^5}.$$

Si ha

$$F(z) = 1 + \frac{c_{-5}}{(z-1)^5} + \frac{c_{-4}}{(z-1)^4} + \frac{c_{-3}}{(z-1)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{c_{-1}}{z-1}$$

dove i coefficienti c_{-k} sono dati dalla formula (3.9). Quindi

$$c_{-1} = R(F(z), 1) = \frac{1}{4!} \left[\frac{d^4}{dz^4} z^5 \right]_{z=1} = 5,$$

$$c_{-2} = R((z-1)F(z), 1) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} z^5 \right]_{z=1} = 10,$$

$$c_{-3} = R((z-1)^2 F(z), 1) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} z^5 \right]_{z=1} = 10,$$

$$c_{-4} = R((z-1)^3 F(z), 1) = \left[\frac{d}{dz} z^5 \right]_{z=1} = 5,$$

$$c_{-5} = R((z-1)^4 F(z), 1) = [z^5]_{z=1} = 1.$$

In definitiva abbiamo

$$F(z) = 1 + \frac{1}{(z-1)^5} + \frac{5}{(z-1)^4} + \frac{10}{(z-1)^3} + \frac{10}{(z-1)^2} + \frac{5}{z-1}.$$

3.3.4 Poli complessi coniugati

Il caso dei poli semplici complessi coniugati rientra evidentemente nel caso più generale già visto per i poli semplici. Tuttavia una scomposizione ad hoc per questo caso può risultare molto utile. Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati. L'estensione poi al caso di più poli semplici complessi coniugati è abbastanza immediata.

Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

con $Q_m(z)$ avente una coppia di zeri semplici in $z_0 = \alpha + \iota\beta$ e $\bar{z}_0 = \alpha - \iota\beta$. Inoltre assumiamo che $P_n(z)$ e $Q_m(z)$ sono polinomi a coefficienti reali. Allora $F(z)$ ammette la seguente scomposizione:

$$F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + 2A \frac{z - \alpha}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} - 2B \frac{\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (3.11)$$

dove $D_{n-m}(z)$ è presente solo se $n \geq m = 2$, e dove

$$A = \Re e [R(F, z_0)] \quad (3.12)$$

e

$$B = \Im m [R(F, z_0)] \quad (3.13)$$

ovvero $A + \iota B = R(F, z_0)$.

Dalla decomposizione di F per poli semplici possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(z) &= D_{n-m}(z) + \frac{R(F, z_0)}{z - z_0} + \frac{R(F, \bar{z}_0)}{z - \bar{z}_0} = \\ &= D_{n-m}(z) + \frac{R(F, z_0)}{z - z_0} + \frac{\overline{R(F, z_0)}}{z - \bar{z}_0}. \end{aligned}$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$R(F, \bar{z}_0) = \overline{R(F, z_0)}.$$

Innanzitutto osserviamo che

$$Q_m(z) = R_{m-2}(z)(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$$

dove $R_{m-2}(z)$ è un polinomio di grado al più $m - 2$ (se $m \geq 2$) che non si annulla in z_0 (e quindi neanche in \bar{z}_0). Calcoliamo ora il residuo in z_0 :

$$\begin{aligned} R(F, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)F(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P_n(z)}{(z - \bar{z}_0)R_{m-2}(z)} = \frac{P_n(z_0)}{(z_0 - \bar{z}_0)R_{m-2}(z_0)} = \\ &= \frac{P_n(z_0)}{2\iota \Im m(z_0)R_{m-2}(z_0)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\overline{R(F, z_0)} = \frac{\overline{P_n(z_0)}}{-2\iota \Im m(z_0) \overline{R_{m-2}(z_0)}}.$$

Calcoliamo ora il residuo in \bar{z}_0 :

$$\begin{aligned} R(F, \bar{z}_0) &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}_0} (z - \bar{z}_0) F(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}_0} \frac{P_n(z)}{(z - z_0) R_{m-2}(z)} = \frac{P_n(\bar{z}_0)}{(\bar{z}_0 - z_0) R_{m-2}(\bar{z}_0)} = \\ &= \frac{P_n(\bar{z}_0)}{-2\iota \Im m(z_0) \overline{R_{m-2}(z_0)}}. \end{aligned}$$

Poichè $P_n(z)$ e $R_{m-2}(z)$ sono polinomi a coefficienti reali allora $P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)}$ e $R_{m-2}(\bar{z}_0) = \overline{R_{m-2}(z_0)}$, e quindi segue la tesi:

$$R(F, \bar{z}_0) = \overline{R(F, z_0)}.$$

Posto $A = \Re e[R(F, z_0)]$ e $B = \Im m[R(F, z_0)]$ abbiamo

$$\begin{aligned} F(z) &= D_{n-m}(z) + \frac{A + \iota B}{(z - \alpha) - \iota \beta} + \frac{A - \iota B}{(z - \alpha) + \iota \beta} = \\ &= D_{n-m}(z) + \frac{(A + \iota B)[(z - \alpha) + \iota \beta] + (A - \iota B)[(z - \alpha) - \iota \beta]}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= D_{n-m}(z) + \frac{A(z - \alpha) + \iota B(z - \alpha) + \iota A\beta - B\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} + \\ &\quad + \frac{A(z - \alpha) - \iota B(z - \alpha) - \iota A\beta - B\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= D_{n-m}(z) + \frac{2A(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2B\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Esempio 3.3.6 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione*

$$F(z) = \frac{10z - 22}{z^2 + 4z + 13}.$$

Il denominatore della funzione assegnata presenta due zeri complessi coniugati nei punti

$$z_1 = -2 + i3, \quad z_2 = -2 - i3.$$

Calcoliamo ora il residuo nel polo z_1 :

$$\begin{aligned} R(F(z), z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)F(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2+3i} \frac{10z - 22}{z + 2 + 3i} = \\ &= \left[\frac{10z - 22}{z + 2 + 3i} \right]_{z=-2+3i} = \\ &= \frac{-20 + 30i - 22}{6i} = \\ &= \frac{-42 + 30i}{6i} = 5 + 7i. \end{aligned}$$

Quindi in questo caso risulta:

$$\begin{aligned} F(z) &= 2A \frac{(z+2)}{(z+2)^2+9} - 2B \frac{3}{(z+2)^2+9} = \\ &= 10 \frac{(z+2)}{(z+2)^2+9} - 14 \frac{3}{(z+2)^2+9} \end{aligned}$$

Definizione 3.3.1 Per $n \in \mathbb{R}_+^*$ la funzione gamma, Γ , è definita in questo modo

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-1} du.$$

Si possono provare le seguenti proprietà:

1. per ogni $n \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e $\Gamma(1) = 1$;
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$;
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Dimostriamo ora che

$$L[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad n > -1, s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 L[t^n] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \quad (\text{posto } st = u) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} = \\
 &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du = \\
 &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

In particolare per $n = -1/2$:

$$L[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Quindi segue

$$(L[t^{k-1}])_{s-s_0} = \frac{\Gamma(k)}{(s-s_0)^k} = \frac{(k-1)!}{(s-s_0)^k}.$$

3.4 Applicazioni delle trasformate di Laplace

Applicazione alle equazioni differenziali

Esempio 3.4.1 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y''(t) + Y(t) = t \\ Y(0) = 1 \quad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale.

$$L[Y''(t) + Y(t)] = L[t],$$

posto $y(s) = L[Y(t)]$ risulta

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 1)y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

e, in definitiva:

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.$$

$$Y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \right] = t + \cos t - 3 \sin t.$$

Esempio 3.4.2 *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$Y^{(3)} - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t.$$

Poichè in questo caso le condizioni iniziali sono arbitrarie, poniamo

$$Y(0) = A, \quad Y'(0) = B, \quad Y''(0) = C$$

con A, B, C costanti arbitrarie. Passando alle trasformate di Laplace si ha:

$$L[Y^{(3)}] - 3L[Y''] + 3L[Y'] - L[Y] = L[t^2 e^t]$$

ovvero, detta $y(s)$ la trasformata di $Y(t)$:

$$(s^3 y(s) - As^2 - Bs - C) - 3(s^2 y(s) - As - B) +$$

$$+ 3(sy(s) - A) - y(s) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Isolando $y(s)$ segue

$$y(s) = \frac{As^2 + (B-3A)s - 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}.$$

Passando all'antitrasformata di Laplace si trova

$$Y(t) = \frac{c_1 t^2}{2} e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5}{60} e^t.$$

Esempio 3.4.3 *Risolvere il seguente problema ai limiti:*

$$\begin{cases} Y'' + 9Y = \cos 2t \\ Y(0) = 1 \quad Y(\pi/2) = -1. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto, ma interviene nelle trasformate delle derivate poniamo arbitrariamente $Y'(0) = C$. Allora

$$L[Y''] + 9L[Y] = L[\cos 2t] \quad \Leftrightarrow$$

$$s^2y(s) - sY(0) - C + 9y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s + C}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \\ &= \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{C}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)} - \frac{s}{5(s^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{C}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2) = -1$ segue $C = 12/5$ e quindi la soluzione richiesta è:

$$Y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t.$$

Esempio 3.4.4 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y'' + \omega^2 Y = F(t) \\ Y(0) = 1 \quad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$L[Y''] + \omega^2 L[Y] = L[F(t)] \quad \Leftrightarrow$$

$$(s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)) + \omega^2y(s) = f(s)$$

ovvero

$$y(s) = \frac{s - 2}{s^2 + \omega^2} + \frac{f(s)}{s^2 + \omega^2}.$$

In virtù del teorema di convoluzione abbiamo:

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1} \left[\frac{s-2}{s^2+\omega^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2} \right] = \\ &= \cos \omega t - \frac{2 \sin \omega t}{\omega} + F(t) * \frac{\sin \omega t}{\omega} = \\ &= \cos \omega t - \frac{2 \sin \omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^t F(u) \sin \omega(t-u) du. \end{aligned}$$

Esempio 3.4.5 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 6.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 3L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = 4L[t] + 12L[e^{-t}],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$\begin{aligned} s^2 y(s) - 6 - 3s y(s) + 2y(s) &= \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}, \\ y(s)(s^2 - 3s + 2) &= 6 + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} = \\ &= \frac{6s^3 + 18s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= 2 \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \\ &= 2 \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ha un polo doppio e tre poli semplici quindi ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$\frac{y(s)}{2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R(y(s), 0) \\ B &= R(sy(s), 0) \\ C &= R(y(s), -1) \\ D &= R(y(s), 1) \\ E &= R(y(s), 2) \end{aligned}$$

Effettuando i calcoli

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^3 - 2s^2 - s + 2} = \frac{3}{2} \\ B &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = 1 \\ C &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s-1)(s-2)} = 1 \\ D &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-2)} = -8 \\ E &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)} = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{16}{s-1} + \frac{11}{s-2}$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$Y(t) = 1 + 2t + 2e^{-t} - 16e^t + 11e^{2t}.$$

Esempio 3.4.6 Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale

$$Y''(t) - 4Y'(t) + 3Y(t) = F(t), \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 0,$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 4L[Y'(t)] + 3L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e $f(s) = L[F(t)]$, e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$\begin{aligned} s^2y(s) - s - 4sy(s) + 4 + 3y(s) &= f(s) \\ (s^2 - 4s + 3)y(s) &= s - 4 + f(s) \end{aligned}$$

quindi

$$y(s) = \frac{s - 4}{s^2 - 4s + 3} + \frac{f(s)}{s^2 - 4s + 3}.$$

Osserviamo che possiamo trasformare in fratti semplici il primo addendo a secondo membro, in quanto è indipendente da $F(t)$, per il secondo addendo possiamo scomporre in fratti la funzione che non dipende da $f(s)$ e per antitrasformare il risultato applichiamo il teorema di convoluzione. Quindi

$$y(s) = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s - 1} + f(s) \left[\frac{C}{s - 3} + \frac{D}{s - 1} \right].$$

Calcoliamo i coefficienti A, B, C , e D :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 3} (s - 3) \frac{s - 4}{(s - 1)(s - 3)} = -\frac{1}{2} \\ B &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \frac{s - 4}{(s - 1)(s - 3)} = \frac{3}{2} \\ C &= \lim_{s \rightarrow 3} (s - 3) \frac{1}{(s - 1)(s - 3)} = \frac{1}{2} \\ D &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \frac{1}{(s - 1)(s - 3)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{1}{2(s - 3)} + \frac{3}{2(s - 1)} + f(s) \left[\frac{1}{2(s - 3)} - \frac{1}{2(s - 1)} \right].$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$\begin{aligned} Y(t) &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + F(t) * e^{3t} + F(t) * e^t = \\ &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + \int_0^t F(u) * e^{3(t-u)} du + \int_0^t F(u) e^{t-u} du. \end{aligned}$$

Esempio 3.4.7 Utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale:

$$Y''(t) + 4Y(t) = F(t), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] + 4L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = L[F(t)]$$

$$s^2y(s) - 1 + 4y(s) = L[F(t)]$$

A questo punto si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione $F(t)$ applicando direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \\ &= \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

L'equazione algebrica diventa

$$(s^2 + 4)y(s) = 1 + \frac{1 - e^{-s}}{s} = \frac{s + 1 - e^{-s}}{s}.$$

da cui

$$y(s) = \frac{s + 1 - e^{-s}}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 4)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

e scomponiamo in fratti semplici $g(s)$, funzione che ammette un polo semplice $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm 2i$:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2C\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

dove

$$A = R(g(s), 0) = \frac{1}{4}$$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$ e inoltre

$$B + \iota C = R(g(s), 2\iota) = \lim_{s \rightarrow 2\iota} \frac{1}{s(s + 2\iota)} = -\frac{1}{8}.$$

In definitiva

$$g(s) = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)}$$

e quindi

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2 + 4)} - \frac{e^{-s}}{4s} + \frac{se^{-s}}{4(s^2 + 4)}.$$

L'antitrasformata delle due funzioni dove compare il fattore e^{-s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:

$$L^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{4s} \right] = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

e

$$L^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{4(s^2 + 4)} \right] = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos 2(t - 1) & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

La soluzione $Y(t)$ è quindi:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2(t - 1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

da cui semplificando ulteriormente:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 2(t - 1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti variabili

La trasformata di Laplace può essere utilizzata con profitto anche per risolvere alcune classi di equazioni differenziali a coefficienti variabili. In particolare essa è molto utile per risolvere equazioni differenziali i cui termini hanno la forma:

$$t^m Y^{(n)}(t).$$

Infatti in questo caso la trasformata di Laplace è data da

$$L[t^m Y^{(n)}(t)] = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} L[Y^{(n)}(t)].$$

Esempio 3.4.8 *Risolvere*

$$\begin{cases} tY'' + Y' + 4tY = 0 \\ Y(0) = 3 \quad Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$L[tY''] + L[Y'] + 4L[tY] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{d}{ds} (s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)) + sy(s) - Y(0) - 4\frac{d}{ds} y(s) = 0.$$

ovvero

$$\begin{aligned} (s^2 + 4) \frac{dy}{ds} + sy(s) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{s ds}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Integrando si ha

$$\log y + \frac{1}{2} \log(s^2 + 4) = C$$

cioè

$$y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 4}}.$$

Per determinare l'antitrasformata di $y(s)$, consultando la tabella delle trasformate si verifica che

$$Y(t) = C J_0(2t).¹$$

¹ $J_0(t)$ è la funzione di ordine zero definita da:

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

Imponendo la condizione $Y(0) = CJ_0(0) = 3$ segue $C = 3$; dunque

$$Y(t) = 3J_0(2t).$$

Esempio 3.4.9 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$\begin{cases} tY'' + 2Y' + tY = 0 \\ Y(0^+) = 1 \quad Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ogni termine,

$$-\frac{d}{ds}(s^2y(s) - sY(0^+) - Y'(0^+)) + 2(sy(s) - Y(0^+)) - \frac{d}{ds}y(s) = 0.$$

oppure

$$-s^2y'(s) - 2sy(s) + 1 + 2sy(s) - 2 - y'(s) = 0$$

cioè

$$-(s^2 + 1)y'(s) - 1 = 0; \quad y'(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}.$$

Integrando si ha

$$y(s) = -\arctan s + A.$$

Poichè per il teorema 3.1.8 $y(s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$ deve essere $A = \pi/2$.

Quindi

$$y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}.$$

Dalla tabella delle trasformate di Laplace risulta

$$Y(t) = L^{-1}\left[\arctan \frac{1}{s}\right] = \frac{\sin t}{t}.$$

Si noti che questa funzione soddisfa la condizione $Y(\pi) = 0$.

e risulta

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Sistemi di equazioni differenziali**Esempio 3.4.10** *Risolvere*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = 2X - 3Y \\ \frac{dY}{dt} = Y - 2X \\ X(0) = 8 \quad Y(0) = 3. \end{array} \right.$$

Passando alle trasformate di Laplace di ambo i membri abbiamo:

$$\left. \begin{array}{l} L\left[\frac{dX}{dt}\right] = 2L[X] - 3L[Y] \\ L\left[\frac{dY}{dt}\right] = L[Y] - 2L[X] \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$sx(s) - 8 = 2x(s) - 3y(s)$$

$$sy(s) - 3 = y(s) - 2x(s)$$

dove $x(s)$ e $y(s)$ sono le trasformate di Laplace di X e Y rispettivamente.
Equivalentemente

$$(s - 2)x(s) + 3y(s) = 8$$

$$2x(s) + (s - 1)y(s) = 3.$$

Risolvendo il sistema, per esempio con la regola di Cramer, si trova

$$x(s) = \frac{8s - 17}{(s + 1)(s - 4)} = \frac{5}{s + 1} + \frac{3}{s - 4}$$

$$y(s) = \frac{3s - 22}{(s + 1)(s - 4)} = \frac{5}{s + 1} - \frac{2}{s - 4}$$

e passando all'antitrasformata segue

$$\begin{aligned} X(t) &= L^{-1}[x(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right] = \\ &= 5e^{-t} + 3e^{4t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}\right] = \\ &= 5e^{-t} - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Esempio 3.4.11 Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} X'(t) - Z(t) = e^{-t} \\ Y'(t) + Z'(t) = 1 \\ -X(t) + Y'(t) = 0 \\ X(0) = -2 \quad Y(0) = Z(0) = 0. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema ponendo $x(s) = L[X(t)]$, $y(s) = L[Y(t)]$ e $z(s) = L[Z(t)]$:

$$\begin{cases} L[X'(t)] - L[Z(t)] = L[e^{-t}] \\ L[Y'(t)] + L[Z'(t)] = L[1] \\ -L[X(t)] + L[Y'(t)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) - z(s) = \frac{1}{s+1} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) = \frac{1}{s} \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) + 2 - z(s) = \frac{1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \frac{1}{s} \\ sy(s) - x(s) = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo $x(s)$ dalla terza equazione e sostituiamo la sua espressione nelle altre due:

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ s^2y(s) - z(s) = \frac{1}{s+1} - 2 = -\frac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ z(s) = s^2y(s) + \frac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + s^3y(s) + \frac{2s^2+s}{s+1} = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Ora consideriamo solo la terza equazione.

$$s(s^2+1)y(s) = -\frac{2s^2+s}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s(s+1)}$$

Da cui

$$y(s) = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s^2(s^2+1)(s+1)}$$

quindi i poli di $y(s)$ sono 0 (polo doppio), -1 e $\pm\iota$ pertanto ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2D(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2E\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R(y(s), 0) \\ B &= R(sy(s), 0) \\ C &= R(y(s), -1) \\ D + \iota E &= R(y(s), \iota) \end{aligned}$$

e inoltre $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Calcoliamo tali coefficienti

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{(s^2 + 1)(s + 1)} = 0$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{(s^2 + 1)(s + 1)} = 1$$

In modo analogo risulta $C = -1/2$, mentre

$$\begin{aligned} D + \iota E &= \lim_{s \rightarrow \iota} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{s^2(s + \iota)(s + 1)} = \\ &= \frac{1 + \iota + 1 + 2\iota}{-2\iota(\iota + 1)} = \\ &= -\frac{3\iota + 2}{2(\iota - 1)} = \frac{1}{4}(-1 + 5\iota). \end{aligned}$$

Quindi $D = -1/4$ ed $E = 5/4$, cosicchè risulta

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s + 1)} - \frac{s}{2(s^2 + 1)} - \frac{5}{2(s^2 + 1)}.$$

Pertanto

$$Y(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t.$$

Per calcolare $X(t)$ potremmo ripetere un procedimento analogo (lo studente può farlo per esercizio verificando alla fine che il risultato è lo stesso) oppure ricavare $X(t)$ dalla terza equazione del sistema di partenza poichè

$$X(t) = Y'(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{5}{2}\cos t$$

e quindi calcolare $Z(t)$ dalla prima equazione

$$Z(t) = X'(t) - e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t.$$

Esempio 3.4.12 Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} X'(t) + 2Y(t) = 2X(t) + e^t \\ Y'(t) - X(t) = -Y(t) - e^t \\ X(0) = -1 \quad Y(0) = 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema:

$$\begin{cases} L[X'(t)] + 2L[Y(t)] = 2L[X(t)] + L[e^t] \\ L[Y'(t)] - L[X(t)] = -L[Y(t)] - L[e^t]. \end{cases}$$

Poniamo, come al solito, $x(s) = L[X(t)]$ e $y(s) = L[Y(t)]$:

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) + 2y(s) = 2x(s) + \frac{1}{s-1} \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = -y(s) - \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 2y(s) = -1 + \frac{1}{s-1} = \frac{2-s}{s-1} \\ -x(s) + (s+1)y(s) = 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{s-2}{s-1} \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema lineare usiamo la regola di Cramer. Calcoliamo prima il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s-2)(s+1) + 2 = s^2 - s = s(s-1)$$

quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{2-s}{s-1} & 2 \\ \frac{s-2}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{s(s-1)} = \\ &= \frac{(s+1)(2-s) - 2(s-2)}{s(s-1)^2} = \frac{6-s-s^2}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{6-s-s^2}{(s-1)^2} = 6$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \frac{6 - s - s^2}{s} = -7$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{6 - s - s^2}{s} = 4.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{7}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per $y(s)$:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s-2 & \frac{2-s}{s-1} \\ -1 & \frac{s-2}{s-1} \end{vmatrix}}{s(s-1)} = \\ &= \frac{(s-2)^2 + (2-s)}{s(s-1)^2} = \frac{s^2 - 5s + 6}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 5s + 6}{(s-1)^2} = 6$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \frac{s^2 - 5s + 6}{s} = -5$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 5s + 6}{s} = 2.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

la soluzione del sistema di equazioni differenziali è

$$X(t) = 6 - 7e^t + 4te^t$$

$$Y(t) = 6 - 5e^t + 2te^t.$$

Applicazione alle equazioni integrali

Un'equazione integrale è un'equazione avente la forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u, t)Y(u)du$$

dove $F(t)$ e $K(u, t)$ sono date, a e b sono costanti note o funzioni di t e la funzione $Y(t)$ che compare sotto segno di integrale deve invece essere determinata. La funzione $K(u, t)$ è detta anche *nucleo* dell'equazione integrale. Se a e b sono delle costanti, l'equazione è detta anche *equazione integrale di Fredholm*. Se a è una costante, mentre $b = t$, l'equazione è detta *equazione integrale di Volterra*.

È possibile trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione integrale.

Un'equazione integrale particolarmente importante è la seguente

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du.$$

Quest'equazione, di *tipo convoluzione*, può essere scritta nella forma

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t).$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, assumendo che esistano $L[F(t)] = f(s)$ e $L[K(t)] = k(s)$, si ha

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \quad \text{o} \quad \boxed{y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)}}.$$

La soluzione può essere trovata applicando l'antitrasformata di Laplace. Prima di vedere alcuni esempi sulle equazioni integrali consideriamo il seguente esercizio che risulterà utile successivamente.

Esempio 3.4.13 *Dimostrare che*

$$\int_0^t \int_0^v F(u)dudv = \int_0^t (t-u)F(u)du.$$

Per il teorema di convoluzione, se $f(s) = L[F(t)]$, si ha

$$L \left[\int_0^t (t-u)F(u)du \right] = L[t]L[F(t)] = \frac{f(s)}{s^2}.$$

Allora

$$\int_0^t (t-u)F(u)du = L^{-1} \left[\frac{f(s)}{s^2} \right] = \int_0^t \int_0^v F(u)du dv.$$

Esempio 3.4.14 *Trasformare l'equazione differenziale*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4 \sin t,$$

$$Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -2$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1. Poniamo $Y''(t) = V(t)$. Allora usando la formula dell'esempio 3.4.13 e le condizioni $Y'(0) = -2$ e $Y(0) = 1$,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)du - 2,$$

$$Y(t) = \int_0^t (t-u)V(u)du - 2t + 1.$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$V(t) - 3 \int_0^t V(u)du + 6 + 2 \int_0^t (t-u)V(u)du - 4t + 2 = 4 \sin t$$

da cui si ha

$$V(t) = 4 \sin t + 4t - 8 + \int_0^t [3 - 2(t-u)]V(u)du.$$

Procedimento 2. Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale assegnata, si ha

$$\int_0^t [Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)] du = \int_0^t 4 \sin u du$$

oppure

$$Y'(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2 \int_0^t Y(u)du = 4 - 4 \cos t.$$

Sostituendo le condizioni iniziali assegnate questa diventa

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2 \int_0^t Y(u) du = -1 - 4 \cos t.$$

Integrando nuovamente tra 0 e t , come prima, si ha

$$Y(t) - Y(0) - 3 \int_0^t Y(u) du + 2 \int_0^t (t-u)Y(u) du = -t - 4 \sin t.$$

oppure

$$Y(t) + \int_0^t [2(t-u) - 3]Y(u) du = 1 - t - 4 \sin t.$$

Esempio 3.4.15 *Trasformare l'equazione differenziale*

$$Y''(t) + (1-t)Y'(t) + e^{-t}Y(t) = t^3 - 5t,$$

$$Y(0) = -3, \quad Y'(0) = 4$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1. Posto $Y''(t) = V(t)$ e sfruttando le condizioni iniziali $Y(0) = -3$ e $Y'(0) = 4$, si ha, come nell'esempio 3.4.14,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u) du + 4,$$

$$Y(t) = \int_0^t (t-u)V(u) du + 4t - 3.$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned} V(t) + (1-t) \int_0^t V(u) du + 4(1-t) + \\ + e^{-t} \int_0^t (t-u)V(u) du + 4te^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t \end{aligned}$$

che può essere scritta nella forma

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4te^{-t} + \int_0^t [t - 1 - e^{-t}(t-u)]V(u) du.$$

Procedimento 2. Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale assegnata, si ha

$$\int_0^t Y''(u)du + \int_0^t (1-u)Y'(u)du + \\ + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \int_0^t (u^3 - 5u)du.$$

Integrando per parti nel secondo integrale, si ha

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{ (1-u)Y(u) \Big|_0^t + \int_0^t Y(u)du \right\} + \\ + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

cioè

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u)du + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

oppure

$$Y'(t) + (1-t)Y(t) + \int_0^t Y(u)du + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1.$$

Un' ulteriore integrazione tra 0 e t fornisce

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)Y(u)du + \int_0^t (t-u)Y(u)du + \\ + \int_0^t (t-u)e^{-u}Y(u)du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t$$

che può essere scritta nella forma

$$Y(t) + \int_0^t [1+t-2u+(t-u)e^{-u}] Y(u)du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3.$$

Esempio 3.4.16 *Risolvere l'equazione integrale*

$$Y(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-u)Y(u)du.$$

L'equazione integrale può essere scritta nella forma

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t.$$

Applicando la trasformata di Laplace e il teorema di convoluzione, posto $y(s) = L[Y(t)]$, si ha

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{y(s)}{s^2 + 1}$$

risolvendo

$$y(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}\right] = \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = \\ &= t^2 + \frac{1}{12}t^4. \end{aligned}$$

Esempio 3.4.17 Risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^t Y(t-u)Y(u)du = 16 \sin 4t \quad (3.14)$$

L'equazione può essere scritta nella forma

$$Y(t) * Y(t) = 16 \sin 4t.$$

Prendendo la trasformata di Laplace si ha, per $y(s) = L[Y(t)]$,

$$(y(s))^2 = \frac{64}{s^2 + 16}$$

oppure

$$y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2 + 16}}.$$

Allora

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \pm 8J_0(4t)$$

dove $J_0(t)$ è la funzione di Bessel di ordine zero che abbiamo già visto a pagina 82. Così

$$Y(t) = 8J_0(4t)$$

e

$$Y(t) = -8J_0(4t)$$

sono entrambe soluzioni dell'equazione integrale (3.14).

Esempio 3.4.18 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = \cosh 2t + \int_0^t (t-u)Y(u)du.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo, al solito, $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[\cosh 2t] + L\left[\int_0^t (t-u)Y(u)du\right]$$

Il secondo addendo a secondo membro è proprio il prodotto di convoluzione tra le funzioni $G(t) = t$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate delle funzioni t e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{s}{s^2 - 4} + \frac{y(s)}{s^2}$$

quindi

$$y(s) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2 - 4}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^3}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)}.$$

I poli di $y(s)$ sono ± 1 e ± 2 pertanto $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3}{(s+2)(s^2-1)} = \frac{2}{3}.$$

Si può infine agevolmente verificare che $D = C$ quindi

$$y(s) = -\frac{1}{6(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} + \frac{2}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+2)}.$$

Quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

Esempio 3.4.19 Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale

$$Y'(t) = \int_0^t \cos(t-u)Y(u)du$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] = L \left[\int_0^t \cos(t-u)Y(u)du \right]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 = \frac{sy(s)}{s^2 + 1}$$

$$sy(s) \left(1 - \frac{1}{s^2 + 1} \right) = 1$$

$$y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3}.$$

In questo caso la scomposizione in fratti semplici è immediata

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

e anche la soluzione si trova semplicemente

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

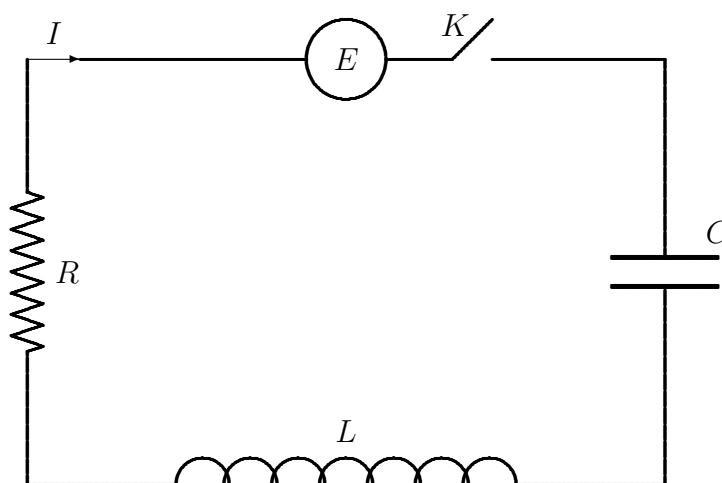


Figura 3.7:

Applicazioni ai circuiti elettrici

Un circuito elettrico semplice (vedere figura 3.7) è formato dai seguenti elementi, collegati in serie con un interruttore K :

1. un generatore che fornisce una forza elettromotrice f.e.m. E (misurata in *Volt*);
2. un resistore avente resistenza R (misurata in *Ohm*);
3. un induttore avente induttanza L (misurata in *Henry*);
4. un condensatore avente capacità C (misurata in *Farad*).

Quando si chiude il circuito, una carica Q (misurata in *Coulomb*) si trasferisce alle armature del condensatore. Il flusso di tale carica è definito da

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

ed è detto *corrente* (misurata in *Ampere* se il tempo è misurato in secondi).

Un importante problema da risolvere in questi circuiti è determinare la carica del condensatore e la corrente in funzione del tempo. A tal fine si introduce la caduta di potenziale (o di tensione) attraverso gli elementi del circuito:

a) caduta di potenziale attraverso un resistore:

$$RI = R \frac{dQ}{dt};$$

b) caduta di potenziale attraverso un induttore:

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2};$$

c) caduta di potenziale attraverso un condensatore:

$$\frac{Q}{C}$$

d) Caduta di potenziale attraverso un generatore:

$$-E.$$

Valgono le seguenti *Leggi di Kirchhoff*:

1. la somma algebrica delle correnti che fluiscono verso un nodo qualunque (per esempio A nella figura 3.8) è sempre uguale a zero;
2. la somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un qualsiasi circuito chiuso (per esempio $ABDFGHA$ nella figura 3.8) è sempre uguale a zero.

Tenendo conto delle relazioni a), b), c) e d) e della seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito in figura risulta:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} - E = 0$$

ovvero

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E.$$

Esempio 3.4.20 *Un induttore di 2 henry, un resistore di 16 ohm ed un condensatore di 0.02 farad sono collegati in serie con una f.e.m. di E volt, come mostrato in figura 3.9. Per $t = 0$ la carica del condensatore e la corrente nel circuito sono nulle. Determinare la carica e la corrente in ogni istante $t > 0$ se*

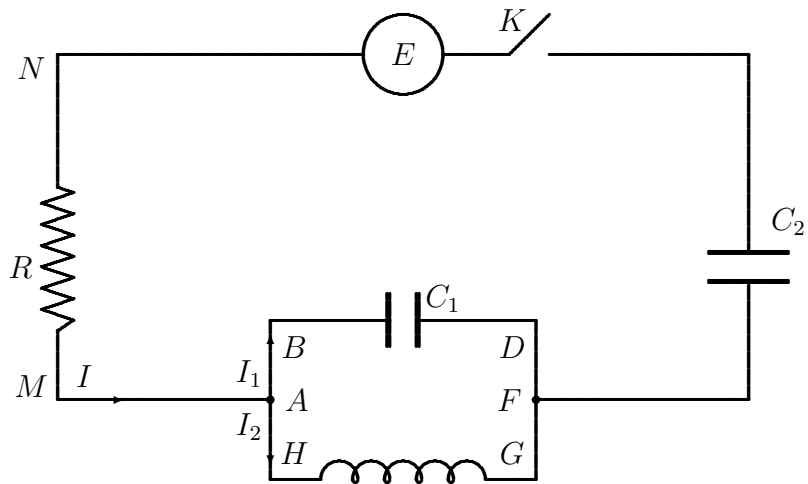


Figura 3.8:

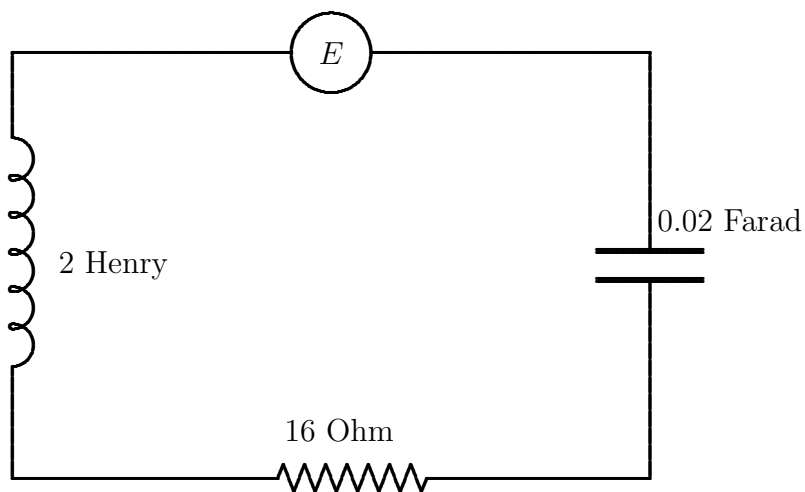


Figura 3.9:

a) $E = 300$ volt;

b) $E = 100 \sin 3t$ volt.

Applicando la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere

$$2 \frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0.02} = E.$$

ovvero, tenendo conto che $I = dQ/dt$:

$$2 \frac{d^2Q}{dt^2} + 16 \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.02} = E. \quad (3.15)$$

Le condizioni iniziali sono:

$$Q(0) = 0 \quad I(0) = Q'(0) = 0. \quad (3.16)$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri di (3.15) segue:

$$2L \left[\frac{d^2Q}{dt^2} \right] + 16L \left[\frac{dQ}{dt} \right] + \frac{1}{0.02}L[Q] = L[E]. \quad (3.17)$$

a) L'equazione (3.17) si scrive

$$(s^2q(s) - sQ(0) - Q'(0)) + 8(sq(s) - Q(0)) + 25q(s) = \frac{150}{s}.$$

Isolando $q(s)$ e tenendo conto delle condizioni iniziali (3.16) si ha:

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6s + 48}{s^2 + 8s + 25} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4) + 24}{(s + 4)^2 + 9} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s + 4)}{(s + 4)^2 + 9} - \frac{24}{(s + 4)^2 + 9}. \end{aligned}$$

Allora

$$Q(t) = 6 - 6e^{-4t} \cos 3t - 8e^{-4t} \sin 3t$$

$$I(t) = Q'(t) = 50e^{-4t} \sin 3t;$$

b) Se $E = 100 \sin 3t$ la (3.17) diventa

$$(s^2 + 8s + 25)q(s) = \frac{150}{s^2 + 9}$$

e

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)} = \\ &= \frac{75}{26} \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{75}{52} \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{75}{26} \frac{1}{(s + 4)^2 + 9} + \\ &\quad + \frac{75}{52} \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 9}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{25}{26} \sin 3t - \frac{75}{52} \sin 3t + \frac{25}{26} e^{-4t} \sin 3t + \frac{75}{52} e^{-4t} \cos 3t = \\ &= \frac{25}{52} (2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t} (3 \cos 3t + 2 \sin 3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(t) &= Q'(t) = \frac{25}{52} (2 \cos 3t + 3 \sin 3t) + \\ &\quad - \frac{25}{52} e^{-4t} (7 \sin 3t - 6 \cos 3t). \end{aligned}$$

Esempio 3.4.21 *Assegnata la rete in Figura 3.10 determinare la corrente nei vari rami assumendo nulle le correnti iniziali.*

Percorriamo i circuiti chiusi $KLMNK$ e $JKNPJ$ in senso orario. Percorrendo questi circuiti consideriamo le cadute di tensione positive quando si va contro corrente. Un aumento di tensione è considerato come una caduta di tensione negativa. Se I è la corrente nel circuito $NPJKN$ questa si divide, nel nodo K , in I_1 e I_2 in modo tale che $I = I_1 + I_2$ (prima legge di Kirchhoff). Applichiamo ora la seconda legge di Kirchhoff ai circuiti $KLMNK$ e $JKNPJ$, ottenendo rispettivamente:

$$\begin{cases} -10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \\ 30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0 \end{cases}$$

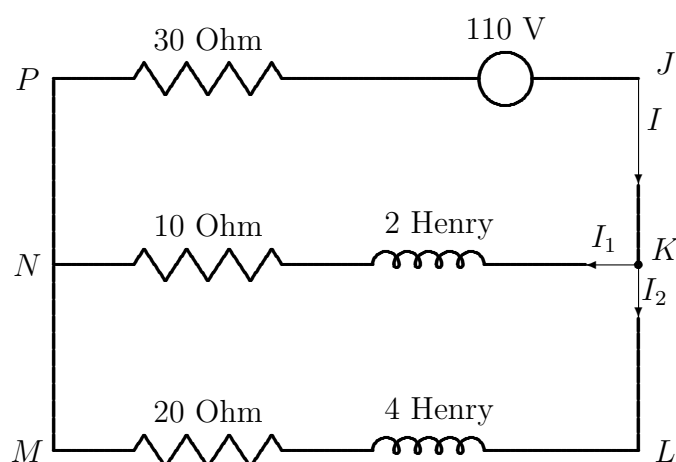


Figura 3.10:

ovvero

$$\begin{cases} -5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0 \\ \frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55 \end{cases}$$

con condizioni iniziali $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Passando alle trasformate di Laplace e usando le condizioni iniziali segue:

$$-5i_1 - (si_1 - I_1(0)) + 2(si_2 - I_2(0)) + 10i_2 = 0$$

$$(si_1 - I_1(0)) + 20i_1 + 15i_2 = \frac{55}{s}$$

meglio

$$(s + 5)i_1 - (2s + 10)i_2 = 0$$

$$(s + 20)i_1 + 15i_2 = \frac{55}{s}$$

da cui

$$i_1 = 2i_2$$

$$i_2 = \frac{55}{s(2s + 55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s + 55} \quad \Rightarrow$$

$$I_2 = 1 - e^{-55t/2}$$

$$I_1 = 2 - 2e^{-55t/2}$$

$$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}.$$

Capitolo 4

La Trasformata di Fourier

4.1 Serie di Fourier

È ben noto che un buon numero di funzioni sia rappresentabile, in maniera più o meno complicata, in serie di potenze. Comunque questo non è il solo modo per sviluppare in serie funzioni di variabile reale. Un modo alternativo è l'espressione di una funzione come somma di seni e coseni. Tali serie prendono il nome di *serie di Fourier*. Un punto di forza di tali sviluppi in serie è che, a differenza delle serie di Taylor, essi esistono anche se le funzioni presentano punti di discontinuità e non sono differenziabili in qualche punto del dominio. Inoltre le funzioni trigonometriche sono facilmente differenziabili ed integrabili. Può meravigliare il fatto che una qualsiasi funzione possa essere sviluppata, in un determinato intervallo, come somma di funzioni pari e dispari, tuttavia consideriamo che se $F(x)$ può essere scritta nel seguente modo:

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x) + F(x) - F(-x)]$$

Posto

$$P(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]; \quad D(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

risulta $F(x) = P(x) + D(x)$ con $P(x)$ funzione pari e $D(x)$ funzione dispari. Per iniziare lo studio delle serie di Fourier introduciamo le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni di variabile reale per poter essere sviluppabili in serie. Tali condizioni sono dette *condizioni di Dirichlet* e sono sufficienti per la convergenza della serie di Fourier.

Si dice che la funzione $F(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet se:

1. $F(x)$ è definita nell'intervallo $c < x < c + 2l$;
2. $F(x)$ e $F'(x)$ sono generalmente continue per $c < x < c + 2l$;
3. $F(x)$ è periodica di periodo $2l$, cioè $F(x + 2l) = F(x)$.

Spesso le condizioni di Dirichlet sono formulate in modo alternativo, ma perfettamente equivalente, richiedendo che la funzione $F(x)$ sia periodica, continua tranne che in un numero finito di punti, che abbia un numero finito di punti di massimo e di minimo e che la funzione sia integrabile in un periodo. Se la funzione $F(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $[c, c + 2l]$ allora in ogni punto x di continuità di F vale la seguente uguaglianza,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.1)$$

dove le costanti a_0 , a_n e b_n sono detti *coefficienti di Fourier* e sono uguali a

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) dx, \quad (4.2)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Se x invece è un ogni punto di discontinuità si ha

$$\frac{1}{2} (F(x + 0) + F(x - 0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.5)$$

dove $F(x + 0)$ e $F(x - 0)$ indicano rispettivamente i limiti destro e sinistro nella discontinuità. Infatti il limite destro della funzione $f(x)$ si indica spesso con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \varepsilon > 0.$$

Analogamente il limite sinistro di $f(x)$ si indica con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = f(x - 0), \quad \varepsilon > 0.$$

Il fatto che $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon > 0$ si indica talvolta per brevità con $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Quindi ad esempio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x - \varepsilon) = f(x - 0).$$

La serie (4.1), o (4.5), con i coefficienti definiti da (4.2), (4.3) e (4.4), si chiama *serie di Fourier di $F(x)$* . In molti casi risulta $c = 0$ o, meglio $c = -l$, cosicchè le formule dei coefficienti della serie diventano

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx, \quad (4.6)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Prima di dimostrare quanto appena affermato consideriamo ora alcuni risultati preliminari.

Lemma 4.1.1 *Se $k \in \mathbb{N}^*$ allora*

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0.$$

Dimostrazione. Poichè la funzione seno è dispari l'integrale tra $-l$ ed l è sicuramente nullo. Supponiamo ora $k \in \mathbb{N}^*$ e calcoliamo il secondo integrale

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{l}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^l = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 4.1.2 *Risulta, per $m, n \in \mathbb{N}^*$:*

a)

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

c)

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad m = n = 0.$$

d)

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2l, \quad m = n = 0.$$

Dimostrazione. a) Richiamiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.9)$$

e

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.10)$$

Sommando e sottraendo (4.9) a (4.10) seguono rispettivamente

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Per $m \neq n$ la a) può essere riscritta

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ & = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0 \end{aligned}$$

per il lemma 4.1.1. Analogamente, sempre per $m \neq n$:

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ & = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Se $m = n$ allora ricordiamo innanzitutto che

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

quindi

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[1 + \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

e analogamente

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

b) Dalle relazioni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.11)$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (4.12)$$

segue

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Allora per $m \neq n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\sin \frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \right] dx$$

e il risultato è una conseguenza del lemma 4.1.1. Se invece $m = n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{2m\pi x}{l} dx = 0.$$

La dimostrazione dei punti c) e d) segue direttamente dal calcolo diretto degli integrali. \square

Teorema 4.1.1 *Se la serie*

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

converge uniformemente a $F(x)$ nell'intervallo $(-l, l)$ allora, per $n = 1, 2, \dots$

$\alpha)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

 $\beta)$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

 $\gamma)$

$$A = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

Dimostrazione. $\alpha)$ Per ipotesi

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (4.13)$$

Moltiplicando ambo i membri per $\cos \frac{m\pi x}{l}$ e integrando tra $-l$ ed l si ha:

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx = \int_{-l}^l \left[A + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (4.14)$$

Tenuto conto che, per il lemma 4.1.2,

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$$

e

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

la relazione (4.14) diventa

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= a_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

β) Moltiplicando la relazione (4.14) per $\sin \frac{m\pi x}{l}$, integrando tra $-l$ e l ed applicando le relazioni già viste abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= b_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

γ) Integriamo ora la relazione (4.13) tra $-l$ ed l , e tenendo conto del lemma 4.1.1 otteniamo

$$\int_{-l}^l F(x) dx = 2Al \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

Ponendo $m = 0$ nel risultato α) si ha:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx; \quad A = \frac{a_0}{2}. \quad \square$$

Osservazione. I risultati ora ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione sono sostituiti da c e $c + 2l$. Osserviamo anche esplicitamente che l'ipotesi di convergenza uniforme è intervenuta nell'integrazione termine a termine della serie.

4.1.1 Forma complessa della serie di Fourier

In forma complessa la serie di Fourier (4.1) e i suoi coefficienti possono essere scritti così:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in \frac{\pi x}{l}}$$

dove, ponendo $c = -l$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-in \frac{\pi x}{l}} dx.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in \frac{\pi x}{l}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in \frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in \frac{\pi x}{l}} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ik \frac{\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik \frac{\pi x}{l}} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{-k} e^{-ik \frac{\pi x}{l}} + c_k e^{ik \frac{\pi x}{l}}] = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (c_{-k} + c_k) \cos \frac{k\pi x}{l} + i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}. \end{aligned}$$

Vediamo ora di esplicitare l'espressione dei coefficienti di tale ultima formula. Innanzitutto osserviamo che

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx = \frac{a_0}{2}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} c_{-k} + c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) [e^{ik \frac{\pi x}{l}} + e^{-ik \frac{\pi x}{l}}] dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Quindi risulta $c_{-k} + c_k = a_k$.

$$\begin{aligned} \iota(c_k - c_{-k}) &= \iota \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) [e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} - e^{\iota k \frac{\pi x}{l}}] dx = \\ &= \iota \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) \left(-2\iota \sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Poichè risulta $\iota(c_k - c_{-k}) = b_k$, le due diverse formulazioni della serie di Fourier sono equivalenti.

4.2 Trasformata discreta di Fourier

Abbiamo visto che, se $F(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $] -l, l[$, allora in ogni punto di continuità di $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota \frac{n\pi x}{l}} \quad (4.15)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx.$$

Posto

$$f(n) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (4.16)$$

allora $F(x)$ si scrive

$$F(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{\iota \frac{n\pi x}{l}}. \quad (4.17)$$

La (4.16) prende il nome di *trasformata discreta di Fourier* e spesso viene indicata con $f(n) = \mathcal{F}\{F\}$, mentre $F(x)$ si chiama *antitrasformata discreta di Fourier*.

Se x non è punto di continuità allora nella (4.15) $F(x)$ va sostituito con $(F(x+0) + F(x-0))/2$.

4.2.1 Trasformate finite di Fourier

Riconsideriamo ora lo sviluppo di Fourier di $F(x)$, $-l < x < l$, nella formulazione (4.1) con i coefficienti dati in α , β e γ ovvero

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

e facciamo l'ulteriore ipotesi $F(x)$ dispari. In questo caso $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$ mentre $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$ è una funzione pari per ogni $n \in \mathbb{N}$. Conseguentemente

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mentre

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4.18)$$

Pertanto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

con b_n definiti da (4.18).

Definiamo ora

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

allora

$$b_n = \frac{2}{l} f_s(n)$$

e perciò si scrive

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.20)$$

La (4.19) prende il nome di *trasformata finita seno di Fourier* di $F(x)$ per $0 < x < l$ e viene spesso indicata con $\mathcal{F}_s\{F\}$, mentre la (4.20) si chiama *antitrasformata finita seno di Fourier* di $f_s(n)$.

Assumiamo ora che $F(x)$ sia pari. In questo caso la funzione $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari in $] -l, l[$ e la funzione $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ è pari in $] -l, l[$, e pertanto $b_n = 0$ per ogni n . Conseguentemente

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Posto

$$f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

risulta

$$a_n = \frac{2}{l} f_c(n)$$

e di conseguenza

$$F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.22)$$

La (4.21) prende il nome di *trasformata finita coseno di Fourier* di $F(x)$ per $0 < x < l$, e viene indicata con $\mathcal{F}_c\{F\}$, mentre $F(x)$ si dice *antitrasformata finita coseno di Fourier* di $f_c(n)$ ed è indicata normalmente con $\mathcal{F}^{-1}\{f_c(n)\}$.

Esempio 4.2.1 *Determinare la serie di Fourier per la funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

di periodo 6.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 F(x) dx + \int_0^3 F(x) dx \right] = \frac{2}{3} \int_0^3 x dx = 3 \\ a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{n\pi x}{3} \right) dx = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[x \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{6}{(n\pi)^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \right] = \frac{6}{(n\pi)^2} [\cos n\pi - 1]. \\ b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^3 2x \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \left[\int_0^3 2x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{n\pi x}{3} \right) dx \right] = \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{-2}{n\pi} \left[3 \cos n\pi - \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \right] = \\ &= \frac{-6}{n\pi} \cos n\pi. \end{aligned}$$

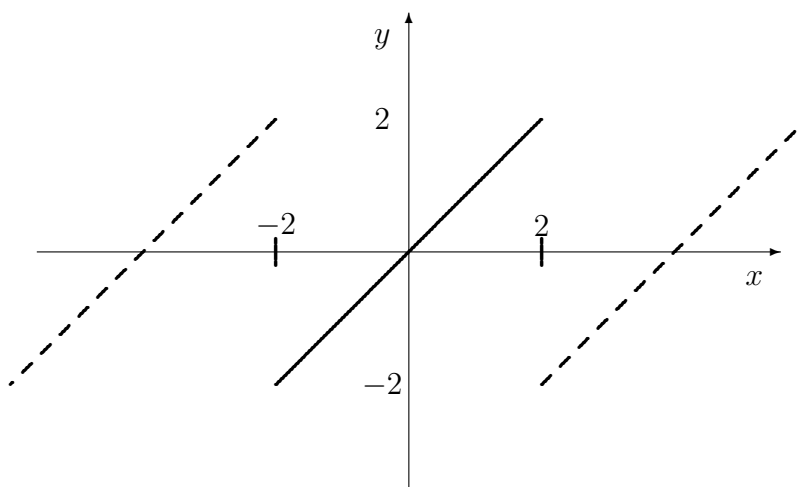


Figura 4.1:

Quindi in definitiva

$$F(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{3} \right].$$

Esempio 4.2.2 *Sviluppare la funzione $F(x) = x$, per $0 < x < 2$:*

- a) *in serie di Fourier di soli seni;*
- b) *in serie di Fourier di soli coseni.*

a) *Per sviluppare $F(x)$ in serie di soli seni è necessario che $F(x)$ sia periodica e dispari. Estendiamo quindi la definizione di $F(x)$ a quella di funzione dispari di periodo 4 (e quindi $l = 2$, vedere figura 4.1).*

Possiamo ora scrivere per $F(x)$ lo sviluppo

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{n\pi x}{2} \right) dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left(2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \right) = -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi}
 \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4 \cos n\pi}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= -4 \left[-\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] = \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Per sviluppare $F(x)$ in serie di soli coseni è necessario che $F(x)$ sia periodica e pari. Estendiamo quindi la sua definizione a quella di funzione pari di periodo 4 (e quindi $l = 2$, vedere figura 4.2).

Allora

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^2 x dx = \int_0^2 x dx = 2$$

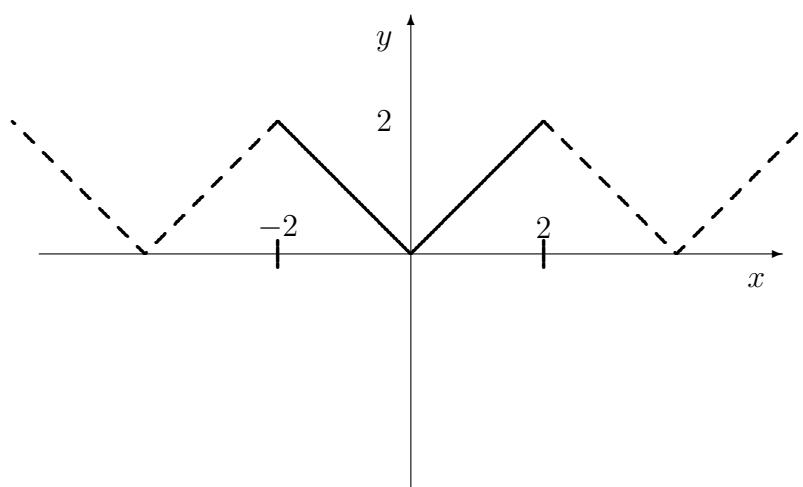


Figura 4.2:

e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[x \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_{x=0}^{x=2} - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[- \left(\frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1).
 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

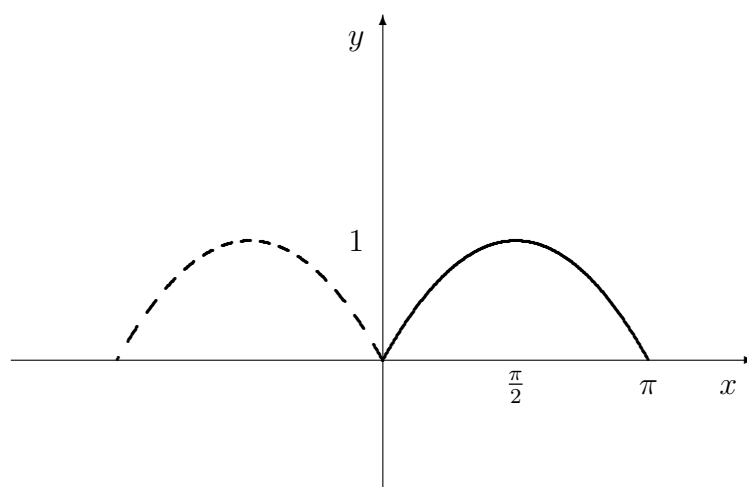


Figura 4.3:

Esempio 4.2.3 *Sviluppare la funzione $F(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, in serie coseno di Fourier.*

Poichè per ottenere uno sviluppo in serie di soli coseni $F(x)$ deve essere periodica pari effettuiamo un'estensione pari di $F(x)$ di periodo 2π (vedere Figura 4.3).

Risulta allora

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con $l = \pi$. Quindi

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] = \\
 &= -\frac{2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Se $n=1$ allora

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\pi = 0.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx = \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Esempio 4.2.4 Determinare

- a) la trasformata finita seno di Fourier
- b) la trasformata finita coseno di Fourier

della funzione $F(x) = 2x$, $0 < x < 4$.

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{F\} &= f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \int_0^4 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \\
&= \left[2x \left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left(\frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\
&= -\frac{32}{n\pi} \cos n\pi;
\end{aligned}$$

b) se $n > 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{F\} &= f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \\
&= \left[2x \left(\frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\
&= 32 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Se $n = 0$

$$f_c(0) = \int_0^4 2x dx = 16.$$

Le trasformate seno e coseno di Fourier possono essere applicate anche a funzioni in due variabili $U(x, t)$. in questo caso la trasformata di $U(x, t)$ è una funzione che dipende dalla variabile t e dal parametro n , numero naturale, cosicchè scriveremo

$$u(n, t) = \mathcal{F}_c(U(x, t)),$$

oppure

$$u(n, t) = \mathcal{F}_s(U(x, t)).$$

Infatti una delle principali applicazioni delle trasformate di Fourier è la risoluzione di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Nei successivi

esercizi vedremo di determinare le trasformate seno e coseno di Fourier per tali derivate.

Esempio 4.2.5 *Determinare*

a) la trasformata finita seno di Fourier di $\frac{\partial U}{\partial x}$;

b) la trasformata finita coseno di Fourier di $\frac{\partial U}{\partial x}$,

dove $U(x, t)$ è una funzione definita per $0 < x < l$ e $t > 0$.

a) Per definizione la trasformata finita seno è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \left[U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U). \end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U);} \quad (4.23)$$

b) la trasformata finita coseno di Fourier è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \left[U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s(U) - [U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi].} \quad (4.24)$$

Esempio 4.2.6 Risolvere il problema precedente per $\frac{\partial U}{\partial t}$;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}_s(U).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}_c(U).$$

Da questi esempi si può inoltre ricavare che

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_c(U)$$

e

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_s(U).$$

Esempio 4.2.7 Risolvere il problema dell'esempio 4.2.5 per la funzione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

a) Sostituendo $\frac{\partial U}{\partial x}$ ad U nelle formule (4.23) e (4.24) dell'esempio 4.2.5 si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{F}_s(U) + \frac{n\pi}{l} U(0, t) - \frac{n\pi}{l} U(l, t) \cos n\pi.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= \frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - [U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi] = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \mathcal{F}_c(U) - [U_x(0, t) - U_x(l, t) \cos n\pi].\end{aligned}$$

Nel seguente esercizio applicheremo le trasformate di Fourier ad un'equazione alle derivate parziali. Osserviamo che la scelta sull'uso della trasformata seno o coseno dipende esclusivamente dalle condizioni al contorno note. Infatti se conosciamo la funzione $U(x, t)$ ai bordi del dominio, cioè per $x = 0$ e $x = l$, allora si deve applicare necessariamente la trasformata seno che dipende da tali valori. Se, al contrario, si conosce il valore della derivata parziale $U_x(x, t)$ per $x = 0$ e $x = l$ allora si deve utilizzare la trasformata coseno.

Esempio 4.2.8 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione*

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0, t) &= 0 \\ U(4, t) &= 0 \\ U(x, 0) &= 2x\end{aligned}$$

con $0 < x < 4$ e $t > 0$.

Prendendo la trasformata finita seno di ambo i membri dell'equazione assegnata (con $l = 4$), abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Posto $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$ e tenendo conto dell'esempio 4.2.6

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}u(t, n).$$

Applicando ora l'esempio 4.2.7 abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -\frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

Per l'esempio 4.2.5

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_s(U(x, t)) + U(0, t) - U(4, t)\cos n\pi = \\ &= \frac{n\pi}{4}u(t, n).\end{aligned}$$

In definitiva si deve risolvere l'equazione

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u(t, n)$$

ottenendo

$$u(t, n) = u(0, n)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

dove

$$u(0, n) = \mathcal{F}_s(2x) = \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi}.$$

Quindi

$$u(t, n) = \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32 \cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin \frac{n\pi x}{4} = \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\cos n\pi}{n} \right) e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin \frac{n\pi x}{4}. \end{aligned}$$

Esempio 4.2.9 Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x, t)$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali $U(0, t) = U(6, t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita seno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = Ce^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con C costante da calcolare. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = C$$

dobbiamo calcolare la trasformata seno della condizione iniziale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(U(x, 0)) &= \int_0^6 U(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{6}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{6} \right]_0^3 = \frac{6}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n, t) = \frac{6}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] e^{-n^2 \pi^2 t / 36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x, t) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] e^{-n^2 \pi^2 t / 36} \sin \frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 4.2.10 Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

dove la funzione $U(x, t)$ è soggetta alle seguenti condizioni iniziali: $U(0, t) = U(1, t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$U(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 3x$$

con $0 \leq x \leq 1$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 1$), ottenendo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = -\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$ e otteniamo che il primo membro è uguale a

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2}u(t, n)$$

mentre il secondo diventa

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -n^2\pi^2 u(n, t)$$

cosicchè si deve risolvere ora la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = n^2\pi^2 u(t, n). \quad (4.25)$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione (4.25) è

$$\lambda^2 - n^2\pi^2 = 0$$

che ammette due radici reali distinte $\lambda = \pm n\pi$, cosicchè essa ammette come soluzione generale una combinazione lineare di esponenziali:

$$u(n, t) = Ae^{n\pi t} + Be^{-n\pi t}$$

con A e B costanti da determinarsi utilizzando le altre condizioni iniziali note. Infatti

$$U(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(n, 0) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s(0) = 0$$

quindi

$$u(n, 0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

e la soluzione può essere scritta come

$$u(n, t) = Ae^{n\pi t} - Ae^{-n\pi t}.$$

Inoltre, poichè

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 3x \quad \Rightarrow \quad u'(n, 0) = \mathcal{F}_s \left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) \right) = \mathcal{F}_s(3x).$$

Calcoliamo quindi la trasformata seno della funzione $3x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(3x) &= \int_0^1 3x \sin(n\pi x) dx = 3 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \\ &= \frac{3}{n\pi} [-x \cos(n\pi x)]_0^1 + \frac{3}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 = \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{3}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$u'(n, t) = An\pi e^{n\pi t} + An\pi e^{-n\pi t}$$

e

$$u'(n, 0) = 2An\pi \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u'(n, 0)}{2n\pi}$$

cosicchè

$$A = \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1}.$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n, t)$ è

$$u(n, t) = \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1} (e^{n\pi t} + e^{-n\pi t})$$

mentre la soluzione cercata è

$$\begin{aligned} U(x, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2\pi^2} (-1)^{n+1} [e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}] \sin(n\pi x) = \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} [e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}] \sin(n\pi x). \end{aligned}$$

Esempio 4.2.11 Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x, t)$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali: $U_x(0, t) = U_x(6, t) = 0$, per $t \geq 0$ e $U(x, 0) = 2x$, per $0 \leq x \leq 6$.

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo $u(t, n) = \mathcal{F}_c(U)$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n) + U_x(6, t) \cos(n\pi) - U_x(0, t) = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = Ce^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con C costanti da calcolare. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = \mathcal{F}_c(U(x, 0)) = C$$

dobbiamo calcolare la trasformata coseno della condizione iniziale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(U(x, 0)) &= \int_0^6 2x \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= 2 \int_0^6 x \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= \frac{12}{n\pi} \left[x \sin \frac{n\pi x}{6} \right]_0^6 - \frac{12}{n\pi} \int_0^6 \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\ &= -\frac{72}{n^2\pi^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{6} \right]_0^6 = \\ &= -\frac{72}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

mentre se $n = 0$ la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^6 2x dx = 36.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n, t) = \frac{72}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x, t) = 6 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos \frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 4.2.12 Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x, t)$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali: $U_x(0, t) = U_x(2, t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con $l = 2$, quindi otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Poniamo $u(t, n) = \mathcal{F}_c(U)$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{4} u(t, n)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = C e^{-n^2\pi^2 t/4}$$

con C costanti da calcolare. Poichè

$$u'(n, 0) = -\frac{n^2\pi^2}{4} C = \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right) \Rightarrow C = -\frac{4}{n^2\pi^2} \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right).$$

Calcoliamo quindi la trasformata coseno della $U_t(x, 0)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0)\right) &= \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \\
 &\quad + \frac{2}{n\pi} \left[(2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 + \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 + \\
 &\quad - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_1^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} - 1 \right] - \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{2} \right] = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) + \cos \frac{n\pi x}{2} \right] = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} \left[2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right].
 \end{aligned}$$

La costante C vale

$$C = -\frac{16}{n^4\pi^4} \left[2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right].$$

Invece se $n = 0$ la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^2 U_t(x, 0) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = 1$$

quindi

$$u(n, t) = -\frac{16}{n^4\pi^4} \left[2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right] e^{-n^2\pi^2 t/4}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x, t) = \frac{1}{2} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4} \left[2 \cos \frac{n\pi x}{2} - 1 - \cos(n\pi) \right] e^{-n^2\pi^2 t/4} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Esempio 4.2.13 Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali: $U(0, t) = U(2, t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$U_t(x, 0) = 0, \quad U(x, 0) = \frac{1}{20}x(2-x)$$

con $0 \leq x \leq 2$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 2$), ottenendo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 9\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

Posto $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$ si deve risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{9n^2\pi^2}{4}u(t, n)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \frac{9n^2\pi^2}{4} = 0$$

che ammette due radici complesse coniugate $\lambda = \pm i3n\pi/2$, cosicchè essa ammette come soluzione generale

$$u(n, t) = A \sin \frac{3n\pi t}{2} + B \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

con A e B costanti da determinarsi. Poichè

$$u(n, 0) = \mathcal{F}_s(U(x, 0)) = \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{20}x(2-x)\right)$$

quindi

$$u(n, 0) = B = \mathcal{F}_s\left(\frac{1}{20}x(2-x)\right)$$

mentre

$$u'(n, t) = A\frac{3}{2}n\pi \cos \frac{3n\pi t}{2} - B\frac{3}{2} \sin \frac{3n\pi t}{2}$$

quindi poichè $u'(n, 0) = 0$ deve essere $A = 0$. Calcoliamo quindi la trasformata seno della condizione iniziale $U(x, 0)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(U(x, 0)) &= \int_0^2 \frac{1}{20} x(2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{10} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx - \frac{1}{20} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi.\end{aligned}$$

Il secondo integrale è:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx &= \left[-\frac{2x^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{8}{n^2\pi^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3} \left[\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{16}{n^3\pi^3} [\cos n\pi - 1] - \frac{8}{n\pi} \cos n\pi.\end{aligned}$$

La costante cercata vale pertanto

$$\begin{aligned}B &= -\frac{2}{5n\pi} \cos n\pi - \frac{4}{5n^3\pi^3} [\cos n\pi - 1] + \frac{2}{5n\pi} = \\ &= \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi].\end{aligned}$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n, t)$ è

$$u(n, t) = \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi] \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5n^3\pi^3} [1 - \cos n\pi] \cos \frac{3n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$