

# Capitolo 1

## Risoluzione di Sistemi lineari

### 1.1 Introduzione al Calcolo Numerico

Il Calcolo Numerico è una disciplina che fa parte di un ampio settore della Matematica Applicata che prende il nome di Analisi Numerica. Si tratta di una materia che è al confine tra la Matematica e l'Informatica poiché cerca di risolvere i consueti problemi matematici utilizzando però una via algoritmica. In pratica i problemi vengono risolti indicando un processo che, in un numero finito di passi, fornisca una soluzione numerica e soprattutto che sia implementabile su un elaboratore. I problemi matematici che saranno affrontati nelle pagine seguenti sono problemi di base: risoluzione di sistemi lineari, approssimazione delle radici di funzioni non lineari, approssimazione di funzioni e dati sperimentali, calcolo di integrali definiti. Tali algoritmi di base molto spesso non sono altro se non un piccolo ingranaggio nella risoluzione di problemi ben più complessi.

### 1.2 Metodi diretti per sistemi lineari

Siano assegnati una matrice non singolare  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ed un vettore  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Risolvere un sistema lineare avente  $A$  come matrice dei coefficienti e  $\mathbf{b}$  come vettore dei termini noti significa trovare un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1.1}$$

Esplicitare la relazione (1.1) significa imporre le uguaglianze tra le componenti dei vettori a primo e secondo membro:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Le (1.2) definiscono un *sistema di  $n$  equazioni algebriche lineari* nelle  $n$  incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Il vettore  $\mathbf{x}$  viene detto *vettore soluzione*. Un metodo universalmente noto per risolvere il problema (1.1) è l'applicazione della cosiddetta *Regola di Cramer* la quale fornisce:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.3}$$

dove  $A_i$  è la matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la sua  $i$ -esima colonna con il termine noto  $\mathbf{b}$ . Il determinante della matrice  $A$  si definisce attraverso la cosiddetta *Regola di Laplace*.

**Definizione 1.2.0.1 (Regola di Laplace)** *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è una matrice di ordine  $n$ , si definisce determinante di  $A$  il numero*

$$\det A = a_{11},$$

*se la matrice  $A$  è quadrata di ordine  $n > 1$ , allora fissata la  $i$ -esima riga di  $A$ , il determinante di  $A$  è:*

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

*dove  $A_{ij}$  è la matrice che si ottiene da  $A$  cancellando la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna.*

Se  $A$  è la matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Il determinante ha le seguenti proprietà:

1. Se  $A$  è una matrice triangolare o diagonale allora

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii};$$

2.  $\det AB = \det A \det B$  (Regola di Binet);

3. se  $\alpha \in \mathbb{R}$  allora  $\det \alpha A = \alpha^n \det A$ .

4.  $\det A = 0$  se una riga (o una colonna) è combinazione lineare di due (o più) righe (o colonne) di  $A$ .

5. Se  $A$  è una matrice triangolare a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

con  $B$  e  $D$  matrici quadrate, allora

$$\det A = \det B \det D. \quad (1.4)$$

Dalla (1.3) è evidente che per ottenere tutte le componenti del vettore soluzione è necessario il calcolo di  $n + 1$  determinanti di ordine  $n$ . Vediamo ora di calcolare in modo approssimato il numero di operazioni aritmetiche richieste dal metodo di Cramer per risolvere il sistema lineare assegnato. In primo luogo calcoliamo il numero di operazioni aritmetiche necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine  $n$  usando la regola di Laplace. Indichiamo con  $f(n)$  il numero di operazioni necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine  $n$ . Quindi, dalla (1.3) è:

$$f(n) = nf(n-1) + 2n - 1$$

da cui, tralasciando gli ultimi due addendi si ha l'uguaglianza approssimata:

$$f(n) \simeq nf(n-1).$$

Tenendo presente che se  $n = 2$  il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

il numero di operazioni necessarie per calcolarlo è 3, quindi

$$f(2) = 3.$$

In definitiva il numero di operazioni necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine  $n$  può essere calcolato (con le opportune semplificazioni fatte) usando la seguente relazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} f(n) \simeq nf(n-1) \\ f(2) = 3. \end{cases}$$

Esplicitando tale relazione di ricorrenza si ottiene

$$\begin{aligned} f(n) &\simeq nf(n-1) \simeq n(n-1)f(n-2) \simeq n(n-1)(n-2)f(n-3) \\ &\simeq n(n-1)(n-2)\dots 3f(2) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 3 = \frac{3}{2}n! \end{aligned}$$

Se fosse  $n = 100$  il numero di operazioni per il calcolo di un solo determinante sarebbe all'incirca dell'ordine di  $10^{157}$ . Visto che il numero di operazioni richieste è molto elevato allora dobbiamo cercare degli algoritmi alternativi.

### 1.2.1 Risoluzione di sistemi triangolari

Prima di affrontare la soluzione di un generico sistema lineare vediamo qualche particolare sistema che può essere agevolmente risolto. Assumiamo che il sistema da risolvere abbia la seguente forma:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1i}x_i & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & \dots & +a_{2i}x_i & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{ii}x_i & \dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \quad (1.5)$$

con  $a_{ii} \neq 0$  per ogni  $i$ . In questo caso la matrice  $A$  è detta *triangolare superiore*. È evidente che in questo caso, la soluzione è immediatamente

calcolabile. Infatti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad i = n-1, \dots, 1. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Il metodo (1.6) prende il nome di *metodo di sostituzione all'indietro*, poichè il vettore  $\mathbf{x}$  viene calcolato partendo dall'ultima componente. Anche per il seguente sistema il vettore soluzione è calcolabile in modo analogo.

$$\begin{array}{rcccccc} a_{11}x_1 & & & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & & & & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & \dots & +a_{ii}x_i & & & = b_i \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{ni}x_i & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \quad (1.7)$$

In questo caso la matrice dei coefficienti è *triangolare inferiore* e la soluzione viene calcolata con il *metodo di sostituzione in avanti*:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad i = 2, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Concludiamo questo paragrafo facendo alcune considerazioni sul costo computazionale dei metodi di sostituzione. Per costo computazionale di un algoritmo si intende il numero di operazioni che esso richiede per fornire la soluzione di un determinato problema. Nel caso di algoritmi numerici le operazioni che si contano sono quelle aritmetiche che operano su dati reali. Considerano per esempio il metodo di sostituzione in avanti osserviamo che per calcolare  $x_1$  è necessaria una sola operazione (una divisione), per calcolare  $x_2$  le operazioni sono tre (un prodotto, una differenza e una divisione), mentre il generico  $x_i$  richiede  $2i - 1$  operazioni ( $i - 1$  prodotti,  $i - 1$  differenze e una divisione), quindi indicato con  $C_s$  il numero totale di operazioni

necessarie è:

$$C_s = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2,$$

sfruttando la proprietà:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### 1.2.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

L'idea di base del metodo di Gauss è appunto quella di operare delle opportune trasformazioni sul sistema originale  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , che non costino eccessivamente, in modo da ottenere un sistema equivalente, cioè un sistema che ammetta la stessa soluzione di quello di partenza, ma che sia facile da risolvere, per esempio uno avente come matrice dei coefficienti una matrice triangolare superiore. Prima di descrivere il metodo vediamo un esempio. Supponiamo che il sistema da risolvere sia:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -6x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Il vettore soluzione di un sistema lineare non cambia se ad un'equazione viene sommata la combinazione lineare di una, o più, equazioni dello stesso sistema. L'idea alla base del metodo di Gauss è quella di ottenere un sistema lineare con matrice dei coefficienti triangolare superiore effettuando opportune combinazioni lineari tra le equazioni. Poniamo

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rispettivamente la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti del sistema di partenza. Cerchiamo ora di determinare un sistema lineare equivalente a quello iniziale ma che abbia gli elementi sottodiagonali della prima colonna uguali a zero. Lasciamo inalterata la prima equazione. Poniamo

$$l_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-6}{2} = 3$$

e moltiplichiamo la prima equazione per  $l_{21}$  ottenendo:

$$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3.$$

La nuova seconda equazione sarà la somma tra la seconda equazione e la prima moltiplicata per  $l_{21}$ :

$$\begin{array}{rccccrc} -6x_1 & -4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & = & -3 \\ \hline & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -2 & \text{[Nuova seconda equazione].} \end{array}$$

Poniamo

$$l_{31} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{-4}{2} = 2$$

e moltiplichiamo la prima equazione per  $l_{31}$  ottenendo:

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2.$$

La nuova terza equazione sarà la somma tra la terza equazione e la prima moltiplicata per  $l_{31}$ :

$$\begin{array}{rccccrc} -4x_1 & -6x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = & -2 \\ \hline & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 & \text{[Nuova terza equazione].} \end{array}$$

Poniamo ora

$$l_{41} = -\frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{2}{2} = -1$$

e moltiplichiamo la prima equazione per  $l_{41}$  ottenendo:

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la prima moltiplicata per  $l_{41}$ :

$$\begin{array}{rccccrc} 2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & 1 \\ \hline & -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & = & 1 & \text{[Nuova quarta equazione].} \end{array}$$

Al secondo passo il sistema lineare è diventato:

$$\begin{array}{rccccrc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -2 \\ & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & = & 1. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono diventati:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cerchiamo ora di azzerare gli elementi sottodiagonali della seconda colonna, a partire da  $a_{32}$ , usando una tecnica simile. Innanzitutto osserviamo che non conviene prendere in considerazione una combinazione lineare che coinvolga la prima equazione perchè avendo questa un elemento in prima posizione diverso da zero quando sommata alla terza equazione cancellerà l'elemento uguale a zero in prima posizione. Lasciamo quindi inalterate le prime due equazioni del sistema e prendiamo come equazione di riferimento la seconda. Poichè  $a_{22}^{(2)} \neq 0$  poniamo

$$l_{32} = -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-4}{-1} = -4$$

e moltiplichiamo la seconda equazione per  $l_{32}$  ottenendo:

$$4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 8.$$

La nuova terza equazione sarà la somma tra la terza equazione e la seconda appena modificata:

$$\begin{array}{rcl} -4x_2 & -x_3 & -x_4 = 0 \\ 4x_2 & +8x_3 & -4x_4 = 8 \\ \hline & 7x_3 & -5x_4 = 8 \end{array} \quad \text{[Nuova terza equazione].}$$

Poniamo

$$l_{42} = -\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\frac{-4}{-1} = -4$$

e moltiplichiamo la seconda equazione per  $l_{42}$  ottenendo:

$$4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 8.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la seconda appena modificata:

$$\begin{array}{rcl} -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 = 1 \\ 4x_2 & +8x_3 & -4x_4 = 8 \\ \hline & 14x_3 & -7x_4 = 9 \end{array} \quad \text{[Nuova quarta equazione].}$$



Al terzo passo il sistema lineare è diventato:

$$\begin{array}{rcccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = -2 \\ & & 7x_3 & -5x_4 & = 8 \\ & & 14x_3 & -7x_4 & = 9. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono quindi

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Resta da azzerare l'unico elemento sottodiagonali della terza colonna. Lasciamo inalterate le prime tre equazioni del sistema. Poniamo

$$l_{43} = -\frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = -\frac{14}{7} = -2$$

e moltiplichiamo la terza equazione per  $l_{43}$  ottenendo:

$$-14x_3 + 10x_4 = -16.$$

La nuova quarta equazione sarà la somma tra la quarta equazione e la terza appena modificata:

$$\begin{array}{rcc} 14x_3 & -7x_4 & = -16 \\ -14x_3 & +10x_4 & = 9 \\ \hline & 3x_4 & = -7 \quad \text{[Nuova quarta equazione].} \end{array}$$

Abbiamo ottenuto un sistema triangolare superiore:

$$\begin{array}{rcccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 4 \\ & & 7x_3 & -5x_4 & = 8 \\ & & & 3x_4 & = -7. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti sono diventati:

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

I numeri  $l_{21}, l_{3,1}, \dots$  sono detti *moltiplicatori*.

Vediamo ora di calcolare le formule che consentano di calcolare gli elementi della matrice dei coefficienti e del vettore dei termini noti ad ogni passo del metodo di Gauss. Abbiamo detto che  $A^{(1)}$  e  $\mathbf{b}^{(1)}$  sono assegnati inizialmente, ipotizziamo per il momento che  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ . Calcoliamo ora gli stessi dati al passo 2 tenendo presente che:

1. La prima equazione del sistema resta invariata;
2. Gli elementi sottodiagonali della prima colonna di  $A^{(2)}$  sono nulli;
3. La  $i$ -esima equazione del sistema ( $i \geq 2$ ) è ottenuta sommando alla medesima equazione la prima moltiplicata per  $-a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ .

Fissiamo quindi un'equazione  $i$ ,  $i \geq 2$ , e calcoliamone i coefficienti  $a_{ij}^{(2)}$  e  $b_i^{(2)}$ :

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & a_{i3}^{(1)} & \dots & a_{ij}^{(1)} & \dots & a_{in}^{(1)} & b_i^{(1)} & + \\
 -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \times & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} & = \\
 \hline
 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & b_i^{(2)} & & 
 \end{array}$$

dove

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2, \dots, n$$

e

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Se ipotizziamo che  $a_{22}^{(2)} \neq 0$  possiamo calcolare gli elementi del sistema al passo 3 tenendo presente che:

1. Le prime 2 equazioni del sistema restano invariate;
2. Gli elementi sottodiagonali della prima 2 colonna di  $A^{(3)}$  sono nulli;
3. La  $i$ -esima equazione del sistema ( $i \geq 3$ ) è ottenuta sommando alla medesima equazione la seconda moltiplicata per  $-a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$ .

Fissiamo quindi un'equazione  $i$ ,  $i \geq 3$ , e calcoliamone i coefficienti  $a_{ij}^{(3)}$  e  $b_i^{(3)}$ :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & a_{i2}^{(2)} & a_{i3}^{(2)} & \dots & a_{ij}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} & b_i^{(2)} & + \\ -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \times & 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2j}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} & = \end{array}$$


---

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & a_{i3}^{(3)} & \dots & a_{ij}^{(3)} & \dots & a_{in}^{(3)} & b_i^{(3)} \end{array}$$

dove

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} a_{2j}^{(2)}, \quad i, j = 3, \dots, n$$

e

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}, \quad i = 3, \dots, n.$$

Avendo ricavato esplicitamente le formule per i primi due passi del metodo di Gauss è semplice ricavare quelle per un generico passo  $k$ . La matrice  $A^{(k)}$  ha gli elementi sottodiagonali delle prime  $k - 1$  colonne uguali a zero, e, supposto  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ , gli elementi di  $A^{(k+1)}$  e di  $\mathbf{b}^{(k+1)}$  sono quindi:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k + 1, \dots, n \quad (1.8)$$

e

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, \quad i = k + 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Il valore di  $k$  varia da 1 (matrice dei coefficienti e vettori dei termini noti iniziali) fino a  $n - 1$ , infatti la matrice  $A^{(n)}$  avrà gli elementi sottodiagonali delle prime  $n - 1$  colonne uguali a zero.

Un'altra proprietà importante delle matrici che sono definite ad ogni passo è il fatto che le operazioni effettuate non alterano il determinante della matrice, quindi

$$\det A^{(k)} = \det A,$$

per ogni  $k$ . Poichè la matrice  $A^{(n)}$  è triangolare superiore allora il suo determinante può essere calcolato esplicitamente

$$\det A^{(k)} = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)},$$

quindi abbiamo trovato un modo, alternativo alla regola di Laplace, per calcolarlo.

Tutto il discorso fatto finora va bene se gli elementi  $a_{kk}^{(k)}$  sono diversi da zero per ogni  $k$ . Nel descrivere il metodo di Gauss si è fatta l'implicita ipotesi (vedere formule (1.8) e (1.9)) che i cosiddetti *elementi pivotali*  $a_{kk}^{(k)}$  siano non nulli per  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Tale ipotesi non è tuttavia molto limitante in quanto la non singolarità di  $A$  garantisce che nella  $k$ -esima colonna ci sia sicuramente un elemento al di sotto della diagonale diverso da zero e quindi è possibile, con un opportuno scambio di righe in  $A^{(k)}$ , trovare un elemento pivotale non nullo. Infatti scambiare due righe in  $A^{(k)}$  significa sostanzialmente scambiare due equazioni nel sistema  $A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)}$  e ciò non altera la natura del sistema stesso. Vediamo di provare questa proprietà. Supponiamo che la matrice  $A$  sia non singolare, consideriamo la matrice  $A^{(k)}$  e supponiamo  $a_{kk}^{(k)} = 0$ . Se tutti gli elementi  $a_{ik}^{(k)}$  per  $i = k + 1, \dots, n$ , fossero nulli allora la matrice  $A^{(k)}$  avrebbe la seguente struttura:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & 0 & a_{k,k+1}^{(k)} & & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Partizioniamo  $A^{(k)}$  nel seguente modo

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

con  $A_{11}^{(k)}$  matrice di ordine  $k - 1$ . Poichè

$$\det A^{(k)} = \det A_{11}^{(k)} \det A_{22}^{(k)}$$

si ha  $\det A^{(k)} = 0$  (infatti la matrice  $A_{22}^{(k)}$  è singolare), ma questo contrasta con la proprietà vista in precedenza:

$$\det A^{(k)} = \det A \neq 0$$

quindi possiamo concludere che se  $a_{kk}^{(k)} = 0$  e  $\det A \neq 0$  deve necessariamente esistere un elemento  $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ , con  $i \in \{k + 1, k + 2, \dots, n\}$ . L'esistenza

di questo elemento diverso da zero garantisce che il metodo di Gauss possa essere applicato anche se  $a_{kk}^{(k)} = 0$ . Infatti in una simile eventualità si può applicare la cosiddetta strategia di *Pivoting parziale*:

1. si determina l'elemento  $a_{rk}^{(k)}$  tale che

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|;$$

2. si effettua lo scambio tra la  $r$ -esima e la  $k$ -esima equazione.

Una conseguenza nell'applicazione della strategia di pivoting parziale è che i moltiplicatori sono sempre, in modulo, minori o uguali a uno. Infatti poichè

$$|a_{ik}^{(k)}| \leq |a_{rk}^{(k)}|, \quad i = k + 1, \dots, n$$

risulta

$$|l_{ik}| = \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{|a_{rk}^{(k)}|} \leq 1.$$

In alternativa si può adottare la strategia di *Pivoting totale* che è la seguente:

1. determinare gli indici  $r, s$  tali che

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|;$$

2. effettuare lo scambio tra la  $r$ -esima e la  $k$ -esima riga e tra la  $s$ -esima e la  $k$ -esima colonna.

La strategia di pivoting totale è senz'altro migliore perchè garantisce maggiormente che un elemento pivotale non sia un numero piccolo (in questa eventualità potrebbe accadere che un moltiplicatore sia un numero molto grande) ma richiede che tutti gli eventuali scambi tra le colonne della matrice siano memorizzati. Infatti scambiare due colonne significa scambiare due incognite del vettore soluzione pertanto dopo la risoluzione del sistema triangolare per ottenere il vettore soluzione del sistema di partenza è opportuno permutare le componenti che sono state scambiate.

### 1.2.3 Costo Computazionale del Metodo di Eliminazione di Gauss

Dalle relazioni (1.8), (1.9) è evidente che servono  $3(n - k)^2$  operazioni per passare da  $A^{(k)}$  ad  $A^{(k+1)}$  e  $2(n - k)$  per passare da  $\mathbf{b}^{(k)}$  a  $\mathbf{b}^{(k+1)}$ . Pertanto

per trasformare  $A$  in  $A^{(n)}$  e  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{b}^{(n)}$  sono necessari

$$3 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)$$

ovvero

$$3 \left[ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right] + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

A questi vanno aggiunti le  $n^2$  operazioni aritmetiche necessarie per risolvere il sistema triangolare superiore.

# Capitolo 2

## Interpolazione di Funzioni

### 2.1 Introduzione

Nel campo del Calcolo Numerico si possono incontrare diversi casi nei quali è richiesta l'approssimazione di una funzione (o di una grandezza incognita):  
1) non è nota l'espressione analitica della funzione  $f(x)$  ma si conosce il valore che assume in un insieme finito di punti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si potrebbe pensare anche che tali valori siano delle misure di una grandezza fisica incognita valutate in differenti istanti di tempo.

2) Si conosce l'espressione analitica della funzione  $f(x)$  ma è così complicata dal punto di vista computazionale che è più conveniente cercare un'espressione semplice partendo dal valore che essa assume in un insieme finito di punti.

In questo capitolo analizzeremo un particolare tipo di approssimazione di funzioni cioè la cosiddetta interpolazione che richiede che la funzione approssimante assume in determinate ascisse esattamente lo stesso valore di  $f(x)$ .

In entrambi i casi appena citati è noto, date certe informazioni supplementari, che la funzione approssimante va ricercata della forma:

$$f(x) \simeq g(x; a_0, a_1, \dots, a_n). \quad (2.1)$$

Se i parametri  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono definiti dalla condizione di coincidenza di  $f$  e  $g$  nei punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , allora tale procedimento di approssimazione si chiama appunto *Interpolazione*. Invece se  $x \notin [\min_i x_i, \max_i x_i]$  allora si parla di *Estrapolazione*.

Tra i procedimenti di interpolazione il più usato è quello in cui si cerca la

funzione  $g$  in (2.1) nella forma

$$g(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x)$$

dove  $\Phi_i(x)$ , per  $i = 0, \dots, n$ , sono funzioni fissate e i valori di  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sono determinati in base alle condizioni di coincidenza di  $f$  con la funzione approssimante nei punti di interpolazione (detti anche *nod*i),  $x_j$ , cioè si pone

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi_i(x_j) \quad j = 0, \dots, n.$$

Vedremo nel successivo paragrafo di dare una risposta al nostro problema nel caso in cui si cerchino le funzioni  $\Phi_i(x)$  di tipo polinomiale.

## 2.2 Il Polinomio Interpolante di Lagrange

Al fine di dare una forma esplicita al polinomio interpolante, scriviamo il candidato polinomio nella seguente forma:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_{nk}(x) f(x_k) \quad (2.2)$$

dove gli  $l_{nk}(x)$  sono per il momento generici polinomi di grado  $n$ . Imponendo le condizioni di interpolazione

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$

deve essere, per ogni  $i$ :

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^n l_{nk}(x_i) f(x_k) = f(x_i)$$

ed è evidente che se

$$l_{nk}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases} \quad (2.3)$$



allora esse sono soddisfatte. In particolare la prima condizione di (2.3) indica che  $l_{nk}(x)$  si annulla negli  $n$  nodi  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  e quindi deve avere la seguente struttura:

$$l_{nk}(x) = c_k \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i)$$

mentre imponendo la seconda condizione di (2.3)

$$l_{nk}(x_k) = c_k \prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i) = 1$$

si trova immediatamente:

$$c_k = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)}.$$

In definitiva il polinomio interpolante ha la seguente forma:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) f(x_k). \quad (2.4)$$

Il polinomio (2.4) prende il nome di *Polinomio di Lagrange* mentre i polinomi:

$$l_{nk}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

si chiamano *Polinomi Fondamentali di Lagrange*.

### 2.2.1 Il Resto del Polinomio di Lagrange

Assumiamo che la funzione interpolata  $f(x)$  sia di classe  $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  e valutiamo l'errore che si commette nel sostituire  $f(x)$  con  $L_n(x)$  in un punto  $x \neq x_i$ . Supponiamo che l'intervallo  $[a, b]$  sia tale da contenere sia i nodi  $x_i$  che l'ulteriore punto  $x$ . Sia dunque

$$e(x) = f(x) - L_n(x)$$

l'errore (o resto) commesso nell'interpolazione della funzione  $f(x)$ . Poichè

$$e(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \quad i = 0, \dots, n$$

è facile congetturare per  $e(x)$  la seguente espressione:

$$e(x) = c(x)\omega_{n+1}(x)$$

dove

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

è il cosiddetto *polinomio nodale* mentre  $c(x)$  è una funzione da determinare. Definiamo ora la funzione

$$\Phi(t; x) = f(t) - L_n(t) - c(x)\omega_{n+1}(t)$$

dove  $t$  è una variabile ed  $x$  è un valore fissato. Calcoliamo la funzione  $\Phi(t; x)$  nei nodi  $x_i$ :

$$\Phi(x_i; x) = f(x_i) - L_n(x_i) - c(x)\omega_{n+1}(x_i) = 0$$

e anche nel punto  $x$ :

$$\Phi(x; x) = f(x) - L_n(x) - c(x)\omega_{n+1}(x) = e(x) - c(x)\omega_{n+1}(x) = 0$$

pertanto la funzione  $\Phi(t; x)$  (che è derivabile con continuità  $n+1$  volte poichè  $f(x)$  è di classe  $C^{n+1}$ ) ammette almeno  $n+2$  zeri distinti. Applicando il teorema di Rolle segue che  $\Phi'(t; x)$  ammette almeno  $n+1$  zeri distinti. Riapplicando lo stesso teorema segue che  $\Phi''(t; x)$  ammette almeno  $n$  zeri distinti. Così proseguendo segue che

$$\exists \xi_x \in [a, b] \ni \Phi^{(n+1)}(\xi_x; x) = 0.$$

Calcoliamo ora la derivata di ordine  $n+1$  della funzione  $\Phi(t; x)$ , osservando innanzitutto che la derivata di tale ordine del polinomio  $L_n(x)$  è identicamente nulla. Pertanto

$$\Phi^{(n+1)}(t; x) = f^{(n+1)}(t) - c(x) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \omega_{n+1}(t).$$

Calcoliamo la derivata di ordine  $n+1$  del polinomio nodale. Osserviamo innanzitutto che

$$\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i) = t^{n+1} + p_n(t)$$

dove  $p_n(t)$  è un polinomio di grado al più  $n$ . Quindi

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\omega_{n+1}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}t^{n+1}.$$

Poichè

$$\frac{d}{dt}t^{n+1} = (n+1)t^n$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}t^{n+1} = (n+1)nt^{n-1}$$

è facile dedurre che

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}t^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\omega_{n+1}(t) = (n+1)!.$$

Pertanto

$$\Phi^{(n+1)}(t; x) = f^{(n+1)}(t) - c(x)(n+1)!$$

e quindi

$$\Phi^{(n+1)}(\xi_x; x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(x)(n+1)! = 0$$

cioè

$$c(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

e in definitiva

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \quad (2.5)$$

**Esempio 2.2.1.1** *Supponiamo di voler calcolare il polinomio interpolante di Lagrange passante per i punti  $(-1, -1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(3, 2)$  e  $(5, 6)$ . Il grado di tale polinomio è 4, quindi definiamo i nodi*

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 5,$$

*cui corrispondono le ordinate che indichiamo con  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ :*

$$y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = 6.$$

*Scriviamo ora l'espressione del polinomio  $L_4(x)$ :*

$$L_4(x) = l_{4,0}(x)y_0 + l_{4,1}(x)y_1 + l_{4,2}(x)y_2 + l_{4,3}(x)y_3 + l_{4,4}(x)y_4 \quad (2.6)$$

e calcoliamo i 5 polinomi fondamentali di Lagrange:

$$\begin{aligned} l_{4,0}(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-0)(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \\ &= \frac{1}{48} x(x-1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,1}(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}{(0+1)(0-1)(0-3)(0-5)} = \\ &= -\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,2}(x) &= \frac{(x+1)(x-0)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-0)(1-3)(1-5)} = \\ &= \frac{1}{16} x(x+1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,3}(x) &= \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-5)} = \\ &= -\frac{1}{48} x(x+1)(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,4}(x) &= \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-0)(5-1)(5-3)} = \\ &= \frac{1}{240} x(x+1)(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Sostituendo in (2.6) il valore della funzione nei nodi si ottiene l'espressione finale del polinomio interpolante:

$$L_4(x) = -l_{4,0}(x) + l_{4,1}(x) - l_{4,2}(x) + 2l_{4,3}(x) + 6l_{4,4}(x).$$

Se vogliamo calcolare il valore approssimato della funzione  $f(x)$  in un'ascissa diversa dai nodi, per esempio  $x = 2$  allora dobbiamo calcolare il valore del polinomio interpolante  $L_4(2)$ .

Nelle figure 2.1-2.5 sono riportati i grafici dei cinque polinomi fondamentali di Lagrange: gli asterischi evidenziano il valore assunto da tali polinomi nei nodi di interpolazione. Nella figura 2.6 è tracciato il grafico del polinomio interpolante di Lagrange, i cerchi evidenziano ancora una volta i punti di interpolazione.

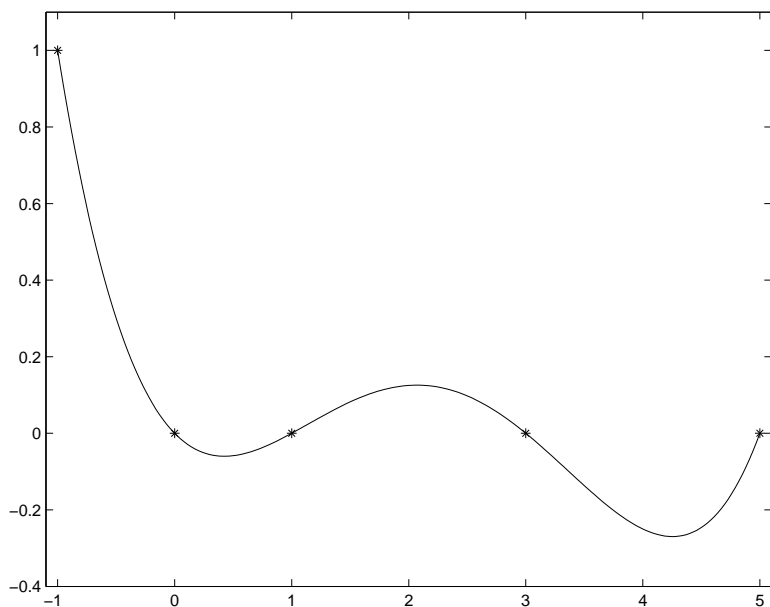


Figura 2.1: Grafico del polinomio  $l_{40}(x)$ .

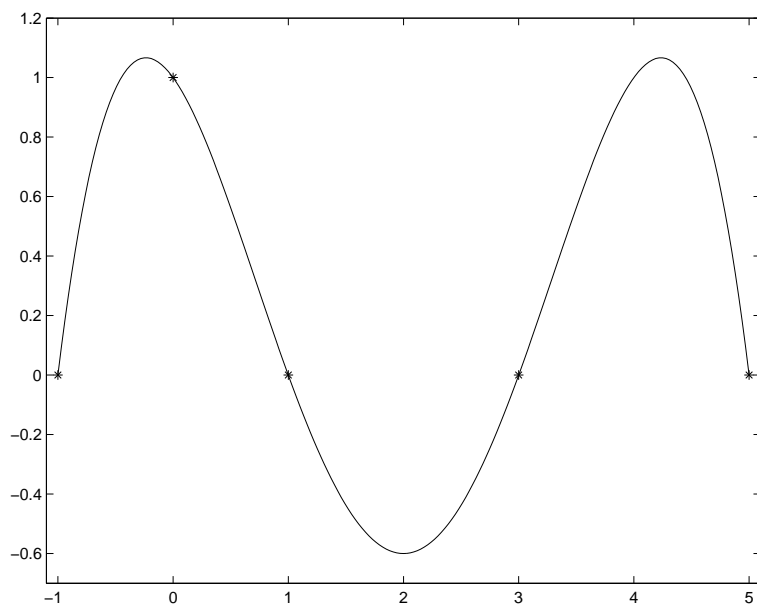
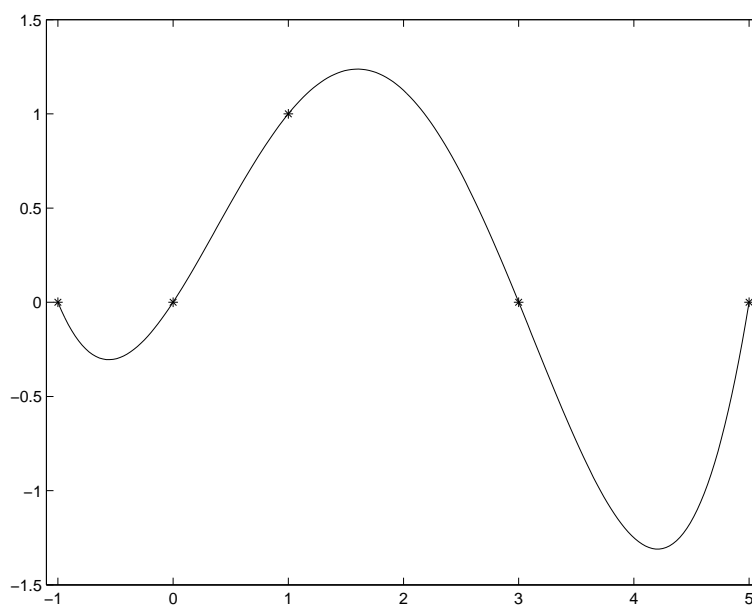
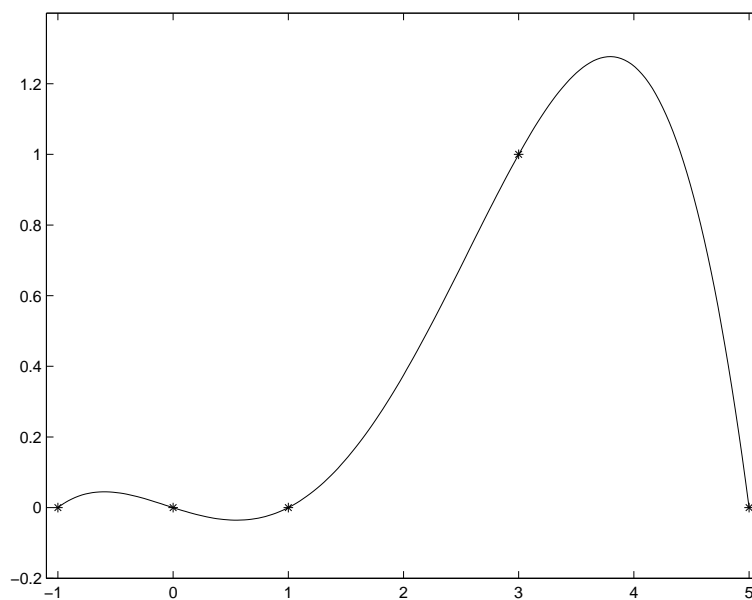


Figura 2.2: Grafico del polinomio  $l_{41}(x)$ .

Figura 2.3: Grafico del polinomio  $l_{42}(x)$ .Figura 2.4: Grafico del polinomio  $l_{43}(x)$ .

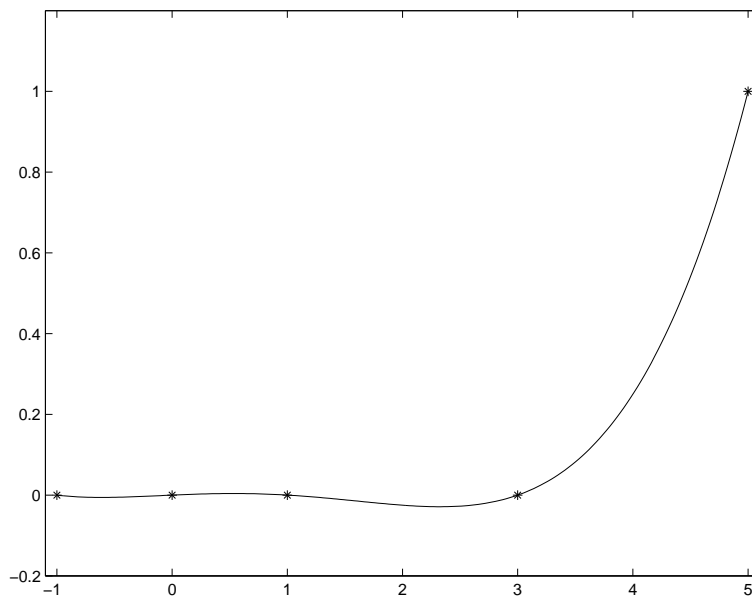


Figura 2.5: Grafico del polinomio  $l_{44}(x)$ .

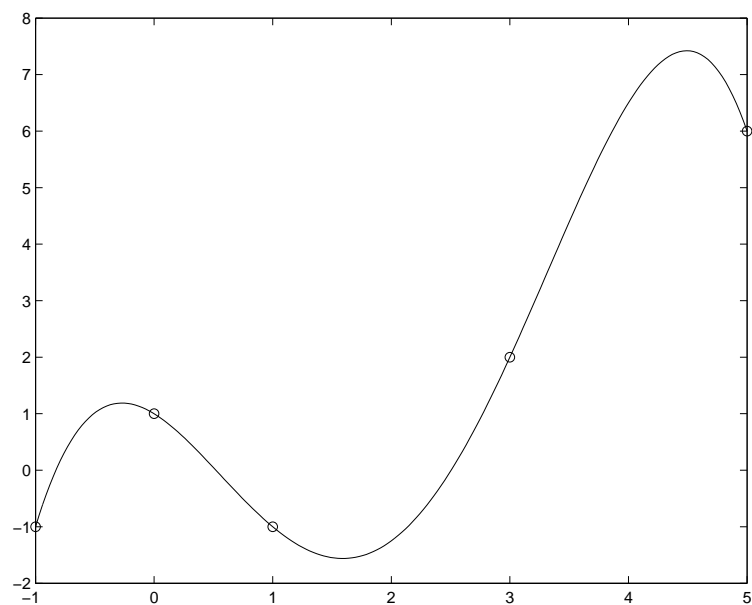


Figura 2.6: Grafico del polinomio interpolante di Lagrange  $L_4(x)$ .

# Capitolo 3

## Formule di Quadratura

### 3.1 Formule di Tipo Interpolatorio

Siano assegnati due valori  $a, b$ , con  $a < b$ , ed una funzione  $f$  integrabile sull'intervallo  $(a, b)$ . Il problema che ci poniamo è quello di costruire degli algoritmi numerici che ci permettano di valutare, con errore misurabile, il numero

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Diversi sono i motivi che possono portare alla richiesta di un algoritmo numerico per questi problemi, per esempio pur essendo nota la primitiva della funzione  $f(x)$ , questa risulta così complicata da preferire un approccio di tipo numerico. Non è da trascurare poi il fatto che il coinvolgimento di funzioni, elementari e non, nella primitiva e la loro valutazione negli estremi  $a$  e  $b$  comporta comunque un'approssimazione dei risultati. Un'altra eventualità è che  $f$  sia nota solo in un numero finito di punti o comunque può essere valutata in ogni valore dell'argomento solo attraverso una routine. In questi casi l'approccio analitico non è neanche da prendere in considerazione.

Supponiamo dunque di conoscere la funzione  $f(x)$  nei punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , prefissati oppure scelti da noi, e che supponiamo a due a due distinti, ed esaminiamo la costruzione di formule del tipo

$$\sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \tag{3.1}$$



con lo scopo di realizzare

$$I(f) \simeq \sum_{k=0}^n w_k f(x_k).$$

Formule di tipo (3.1) si dicono *di quadratura*, i numeri reali  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $w_0, \dots, w_n$  si chiamano rispettivamente *odi* e *pesi* della formula di quadratura.

Il modo più semplice ed immediato per costruire formule di tipo (3.1) è quello di sostituire la funzione integranda  $f(x)$  con il polinomio di Lagrange  $L_n(x)$  interpolante  $f(x)$  nei nodi  $x_i, i = 0, \dots, n$ . Posto infatti

$$f(x) = L_n(x) + e(x)$$

dove  $e(x)$  è la funzione errore, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [L_n(x) + e(x)] dx = \\ &= \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b e(x) dx = \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^n l_{nk}(x) f(x_k) dx + \int_a^b e(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \int_a^b l_{nk}(x) dx \right) f(x_k) + \int_a^b e(x) dx. \end{aligned}$$

Ponendo

$$w_k = \int_a^b l_{nk}(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.2)$$

e

$$R_{n+1}(f) = \int_a^b e(x) dx \quad (3.3)$$

otteniamo

$$I(f) \simeq \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

con un errore stabilito dalla relazione (3.3). Le formule di quadratura con pesi definiti dalle formule (3.2) si dicono *interpolatorie*. La quantità  $R_{n+1}(f)$

prende il nome di *Resto della formula di quadratura*. È facile stabilire che le formule interpolatorie costruite sui nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sono esatte, cioè l'errore è nullo, per ogni polinomio di grado  $n$ . Infatti per ogni  $p \in \Pi_n$ , dove  $\Pi_n$  è l'insieme dei polinomi di grado  $n$ , risulta:

$$R_{n+1}(p) = \int_a^b \frac{p^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) dx = 0. \quad (3.4)$$

I pesi  $w_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , nelle formule di tipo interpolatorio sono determinati in modo univoco: ciò permette di affermare che una volta fissati i nodi  $x_0, \dots, x_n$  la corrispondente formula di quadratura è unica, cioè non esiste alcuna altra scelta dei pesi  $w_k$  in

$$\sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

diversa da quelli definiti in (3.2) in grado di produrre formule esatte ogni qual volta la funzione integranda sia un polinomio di grado al più  $n$ . Un utile concetto per misurare il grado di accuratezza con cui una formula di quadratura, interpolatoria o meno, approssima un integrale è nella seguente

**Definizione 3.1.1.1** *Una formula di quadratura ha grado di precisione  $\nu$  se è esatta quando la funzione integranda è un qualunque polinomio di grado al più  $\nu$  ed inoltre esiste un polinomio di grado  $\nu + 1$  tale che:*

$$R(p_{\nu+1}) \neq 0.$$

È evidente da questa definizione che ogni formula di tipo interpolatorio con nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ha grado di precisione almeno  $n$ .

## 3.2 Formule di Newton Cotes

Suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  intervallini di ampiezza  $h$ , con

$$h = \frac{b - a}{n}$$

e definiamo i nodi

$$x_{i+1} = x_i + h = a + (i + 1)h \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

La formula di quadratura costruita su tali nodi, cioè

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i f(a + ih) + R_{n+1}(f)$$

è detta *Formula di Newton Cotes di tipo chiuso*.

Quando tra i nodi di interpolazione non vengono considerati i due estremi dell'intervallo, ovvero si pone

$$x_i = a + (i + 1)h \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dove

$$h = \frac{b - a}{n + 2}$$

si ottengono le formule di Newton Cotes di tipo aperto.

Di norma le formule di Newton Cotes non vengono applicate direttamente all'integrale in oggetto. Esse sono generalmente costruite su pochi nodi e quindi manipolate in modo da fornire schemi di calcolo di tipo composto. Ciò a causa del fatto che le formule di Newton Cotes hanno, al crescere di  $n$ , pesi di segno alterno e ciò è causa di instabilità delle formule stesse. In ogni caso le formule di Newton Cotes più note sono quelle di tipo chiuso.

Una proprietà di cui godono i pesi delle formule di Newton Cotes è la cosiddetta *proprietà di simmetria*. Infatti poichè i nodi sono a due a due simmetrici rispetto al punto medio  $c$  dell'intervallo  $[a, b]$ , cioè  $c = (x_i + x_{n-i})/2$ , per ogni  $i$ , allora i pesi sono uguali coppie:

$$w_i = w_{n-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Vediamo ora alcuni esempi di formule di Newton Cotes.

### 3.2.1 La Formula del Trapezio

La prima formula di quadratura si ottiene ponendo  $n = 1$  ed utilizzando due nodi di interpolazione, che devono essere necessariamente gli estremi dell'intervallo. Poniano quindi  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  e  $h = b - a$ .

$$T_2 = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$w_0 = \int_a^b l_{1,0}(x)dx = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{h}{2}.$$

Poichè i nodi scelti sono simmetrici rispetto al punto medio  $c = (a + b)/2$  è

$$w_1 = w_0 = \frac{h}{2}.$$

Otteniamo dunque la formula

$$T_2 = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)].$$

che viene detta *Formula del Trapezio* (o anche *Formula dei Trapezi*). L'espressione del resto è

$$R_2(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(\xi_x) dx.$$

Prima di vedere come tale espressione può essere manipolata dimostriamo il seguente teorema che è noto come *teorema della media generalizzato*.

**Teorema 3.2.1.1** *Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , funzioni continue con  $g(x)$  a segno costante e  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in ]a, b[$ . Allora*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad \xi \in [a, b]. \quad \square$$

Poichè la funzione  $(x-a)(x-b)$  è a segno costante segue:

$$R_2(f) = \frac{1}{2} f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b) dx$$

Calcoliamo ora l'integrale usando il cambio di variabile  $x = a + ht$ , con  $h = b - a$ , cosicchè se  $x = a$  allora  $t = 0$  mentre se  $x = b$  allora  $t = 1$  e quindi gli estremi di integrazione diventano rispettivamente 0 e 1. Inoltre  $x - a$  diventa uguale a  $ht$  mentre

$$x - b = a + ht - b = -(b - a) + ht = -h + ht = h(t - 1)$$

ed il differenziale  $dx = hdt$  cosicchè l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(x-b) dx &= \int_0^1 hth(t-1)hdt = h^3 \int_0^1 (t^2 - t) dt = \\ &= h^3 \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{h^3}{6}. \end{aligned}$$

L'errore assume quindi la seguente espressione

$$R_2(f) = \frac{1}{2} f''(\eta) h^3 \int_0^1 t(t-1) dt = -\frac{1}{12} h^3 f''(\eta).$$

### 3.2.2 Formula dei Trapezi Composta

Come abbiamo già visto le formule di quadratura interpolatorie vengono costruite approssimando su tutto l'intervallo di integrazione la funzione integranda con un unico polinomio, quello interpolante la funzione sui nodi scelti. Una volta applicata la formula costruita su  $n + 1$  nodi non è detto che il risultato ottenuto possa essere migliorato. In tal modo comunque, per ogni fissato  $n$ , bisogna costruire la corrispondente formula di quadratura. Una strategia alternativa che ha il pregio di evitare la costruzione di una nuova formula di quadratura, e che spesso produce risultati più apprezzabili, è quella delle *formule composte*. Vediamo in particolare la *Formula dei Trapezi Composta*. L'idea alla base è quella di suddividere l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  in  $N$  sottointervalli, ognuno di ampiezza  $h$ ,

$$h = \frac{b - a}{N} \quad (3.5)$$

sicchè

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

dove i punti  $x_i$  sono:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_i &= a + ih \quad i = 1, \dots, N - 1 \\ x_N &= a + Nh = b. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La formula di quadratura viene applicata ad ognuno dei sottointervalli  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{1}{12} h^3 f''(\eta_i) \right] \quad \eta_i \in ]x_i, x_{i+1}[. \end{aligned}$$

Scrivendo diversamente la stessa espressione

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_N)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \frac{1}{12} h^3 \sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_N)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) - \frac{1}{12} h^3 N f''(\eta) \end{aligned}$$

dove  $\eta \in ]a, b[$ . Dunque la formula dei trapezi composta è la seguente

$$T_C(h) = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_N)) + h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$$

con resto

$$R_T = -\frac{1}{12} h^3 N f''(\eta) = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{N^3} N f''(\eta) = -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{N^2} f''(\eta).$$

Nell'ottenere l'espressione del resto per la formula dei trapezi composta è stato applicato il cosiddetto *Teorema della media nel discreto*.

**Teorema 3.2.2.1 (della media nel discreto)** *Sia  $g$  una funzione continua nell'intervallo  $[a, b]$  e siano  $\xi_1, \dots, \xi_N$   $N$  punti appartenenti allo stesso intervallo  $[a, b]$ . Esiste un punto  $\xi \in [a, b]$  tale che*

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i) = N f(\xi).$$