

## Introduzione al Metodo agli Elementi Finiti (FEM)

Consideriamo come problema test l'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u = -f$$

definita su un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avente come frontiera la curva  $\Gamma$ , con condizioni iniziali:

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma$$

Tale formulazione viene detta **Formulazione forte** del problema.

## La Formula di Green

Uno strumento essenziale per comprendere il metodo agli elementi finiti è la **formula di Green**. Considerate due funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  definite e di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $\Omega$  allora

$$\int_{\Omega} \nabla^T u \nabla v dx dy = - \int_{\Omega} v(x, y) \Delta u dx dy + \int_{\Gamma} v(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

dove

$\nabla u, \nabla v$       Gradiente delle funzioni  $u, v$

$\Delta u$             Laplaciano di  $u$

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$           Derivata normale di  $u$

$\mathbf{x}^T \mathbf{y}$           Prodotto scalare tra vettori.

## Formulazione debole-I

Per risolvere numericamente il problema (cioè approssimare la funzione incognita  $u$ ) è necessario tradurlo sotto forma di sistema cosicché possa essere risolto numericamente.

Obiettivo è determinare un'approssimazione che appartenga ad uno spazio vettoriale di piccole dimensioni (per esempio trovare un'approssimazione di tipo polinomiale, o polinomiale a tratti).

Per ricavare tale sistema si usa la cosiddetta [Formulazione debole](#) del problema.

## Formulazione debole-II

Moltiplichiamo l'equazione di Poisson per una funzione test  $v(x, y)$  ed integriamola sul dominio  $\Omega$ :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, y) v(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy$$

Applicando la formula di Green

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, y) v(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \nabla^T u \nabla v dx dy - \int_{\Gamma} v(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

$$\int_{\Omega} \nabla^T u \nabla v dx dy - \int_{\Gamma} v(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy$$

### Formulazione debole-III

Se si sceglie la funzione  $v(x, y)$  in modo tale che soddisfi la condizione di omogeneità su  $\Gamma$

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma$$

allora l'equazione diventa

$$\int_{\Omega} \nabla^T u \nabla v dx dy = \int_{\Omega} v(x, y) f(x, y) dx dy.$$

## Formulazione debole-IV

Definiamo

$$a(u, v) \equiv \int_{\Omega} \nabla^T u \nabla v dx dy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

e

$$(f, v) \equiv \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy$$

risulta

$$a(u, v) = -(\Delta u, v).$$

## Formulazione debole-V

La formulazione debole del problema iniziale consiste nel selezionare un sottospazio  $V$  e quindi definire il seguente problema:

Trovare  $u \in V$  tale che  $a(u, v) = (f, v)$ , per ogni  $v \in V$ .

## Scelta dello spazio vettoriale $V$

Per capire quali possano essere le scelte dello spazio  $V$  è bene osservare che la formulazione di problema debole richiede solo il prodotto scalare tra i gradienti di  $u$  e  $v$  e quindi lo spazio  $V$  può essere giusto l'insieme delle funzioni derivabili e con derivata prima continua. Questo insieme è definito come  $H^1(\Omega)$ . Considerando anche le condizioni al contorno si deve considerare che le funzioni in  $V$  devono essere nulle su  $\Gamma$  cosicchè lo spazio viene indicato con  $H_0^1(\Omega)$ .



## Il Metodo di Galerkin

Il metodo di Galerkin è alla base del metodo agli elementi finiti consiste nell'approssimare numericamente la soluzione del problema debole attraverso una funzione  $u_h$  appartenente ad un sottospazio  $V_h \subset V$  dipendente da un parametro positivo  $h$  e avente dimensione finita.

La **formulazione di Galerkin** consiste nel definire il seguente problema:

Trovare  $u_h \in V_h$  tale che  $a(u_h, v_h) = (f, v_h)$ , per ogni  $v_h \in V_h$ .

## Formulazione discreta

La formulazione di Galerkin viene detta anche **formulazione discreta**. Poichè lo spazio ha dimensione finita

$$\dim V_h = n$$

allora, indicata con

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

una base di  $V_h$ , ovvero  $n$  funzioni linearmente indipendenti che generano lo spazio  $V_h$ , è sufficiente verificare la formulazione discreta per

$$v_h = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Scrivendo  $u$  in funzione della base

$$u_h = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(x).$$

e sostituendo nel problema di Galerkin si ottiene il sistema lineare

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = \beta_i$$

dove

$$\alpha_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad \beta_i = (f, \varphi_i)$$

A questo punto si deve risolvere il sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

La matrice  $A$  è simmetrica e definita positiva, infatti

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx dy = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx dy.$$

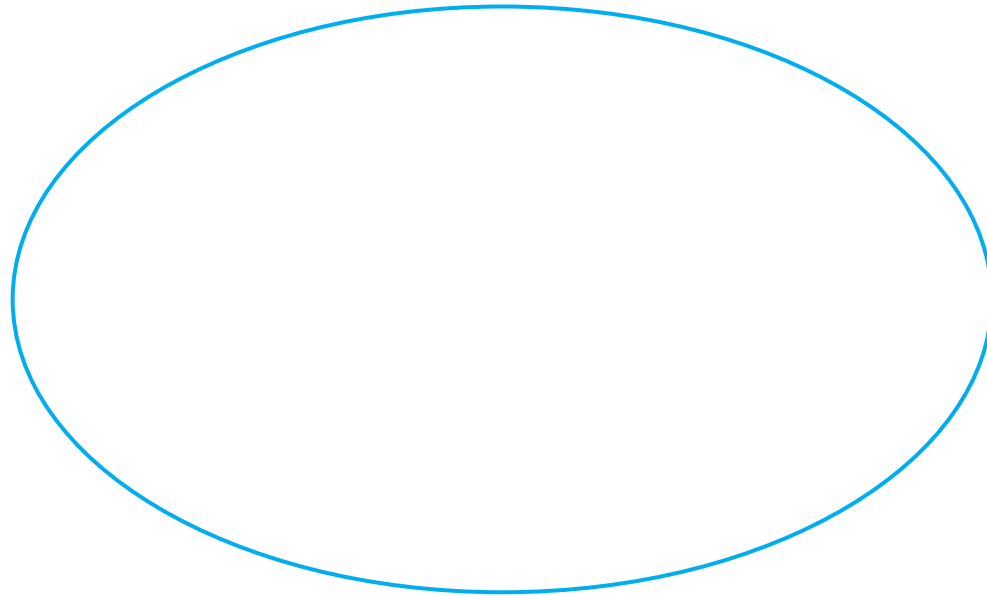
## Il Metodo agli Elementi Finiti (FEM)

Bisogna adesso introdurre una scelta specifica per lo spazio  $V_h$ . Innanzitutto si considera una partizione del dominio  $\Omega$  in triangoli (detti appunto **elementi**)  $K$  (vedremo che tale scelta è indipendente dalla forma della curva che è la frontiera del dominio), non sovrappoventi, che definiscono appunto la **triangolazione del dominio**. Quindi il dominio è approssimato dall'unione  $\Omega_h$  di  $m$  triangoli  $K_i$ :

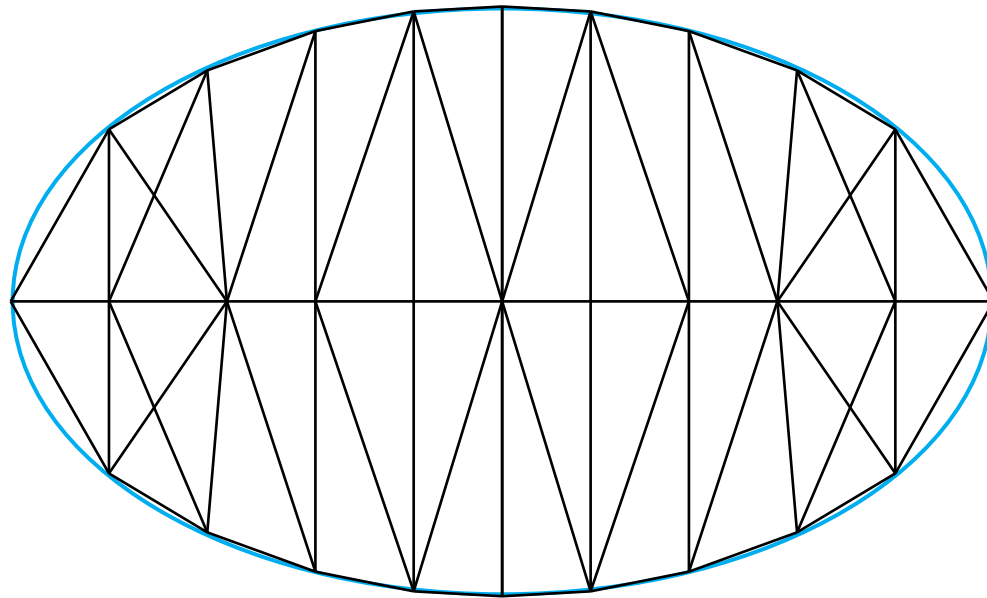
$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^m K_i.$$

L'unica restrizione da porre è che nessun vertice di un triangolo appartenga al lato di un altro triangolo, cioè i triangoli possono condividere solo interi lati e i relativi vertici.

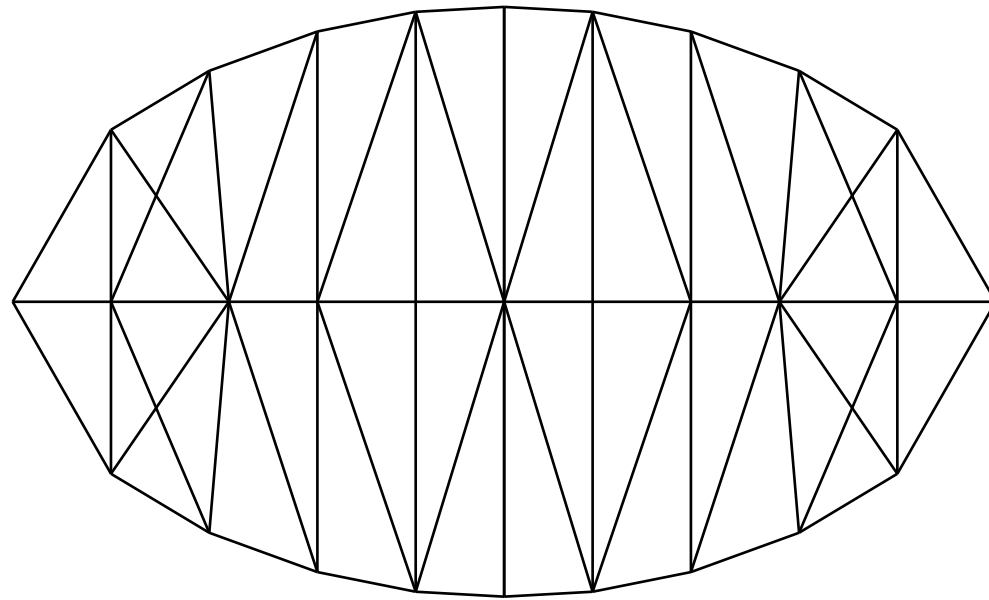
$\Omega$



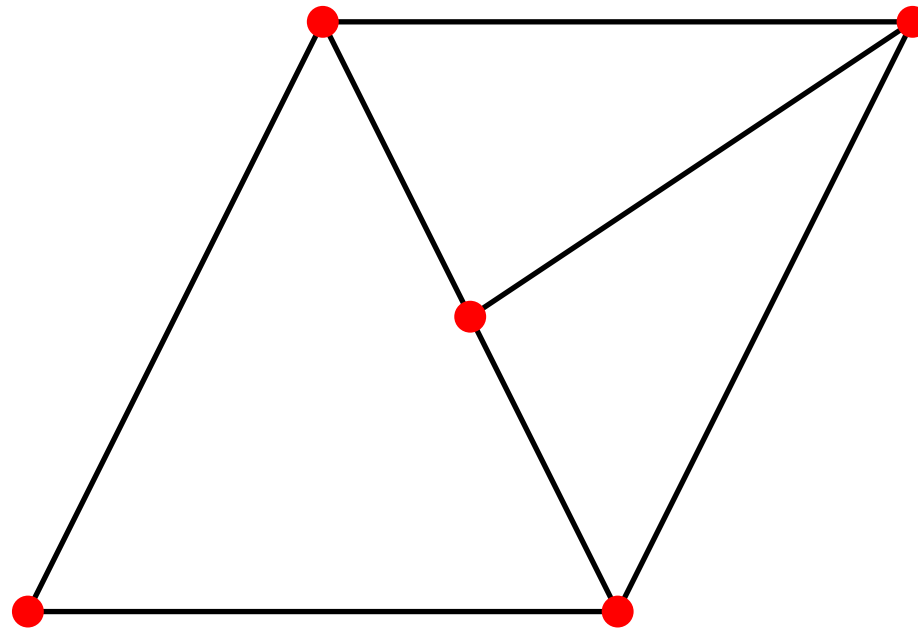
$\Omega$



$\Omega_h$

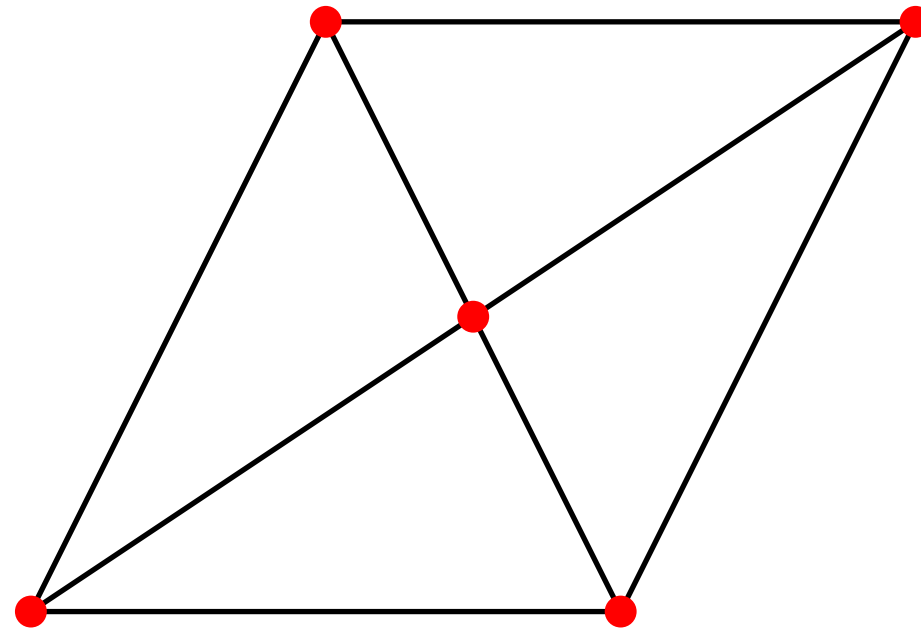


Situazione non ammissibile





Situazione ammissibile



La dimensione della griglia  $h$  è definita come

$$h = \max_{i=1,\dots,m} \text{diam}(K_i)$$

dove  $\text{diam}(K_i)$ , diametro del triangolo  $K_i$ , è la lunghezza del lato più lungo.

Lo spazio a dimensione finita  $V_h$  è definito come lo spazio di tutte le funzioni che sono lineari a tratti e continui nella regione  $\Omega_h$  e che sono zero sul contorno  $\Gamma$ . Quindi

$$V_h = \left\{ \varphi \mid \varphi|_{\Omega_h} \text{ continua, } \varphi|_{\Gamma} = 0, \varphi|_{K_j} \text{ lineare per ogni } j \right\}.$$

Se  $x_j, j = 1, \dots, n$ , sono i nodi della triangolazione, allora una funzione  $\varphi_j \in V_h$  può essere associata ad ogni nodo, cosicchè la famiglia di funzioni  $\varphi_j$  soddisfa le seguenti condizioni:

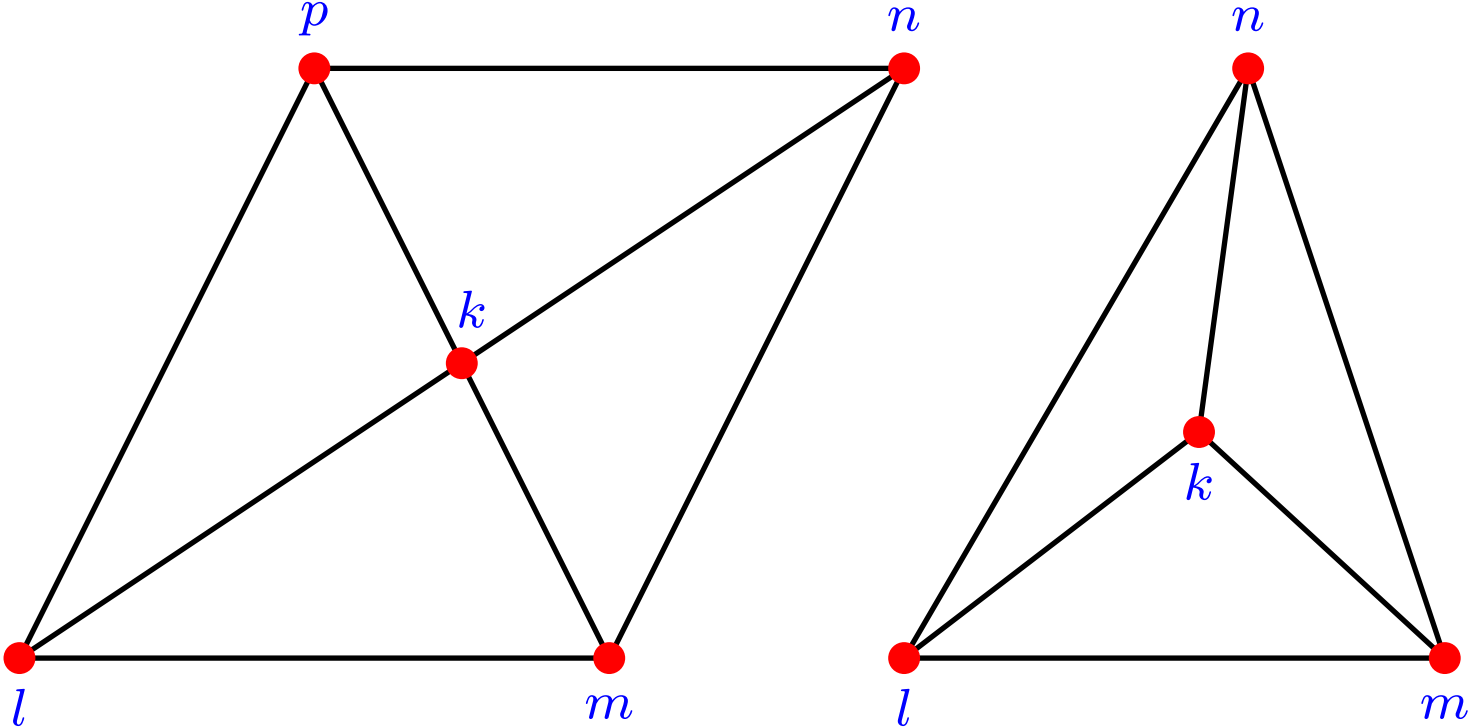
$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i = x_j \\ 0 & \text{se } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

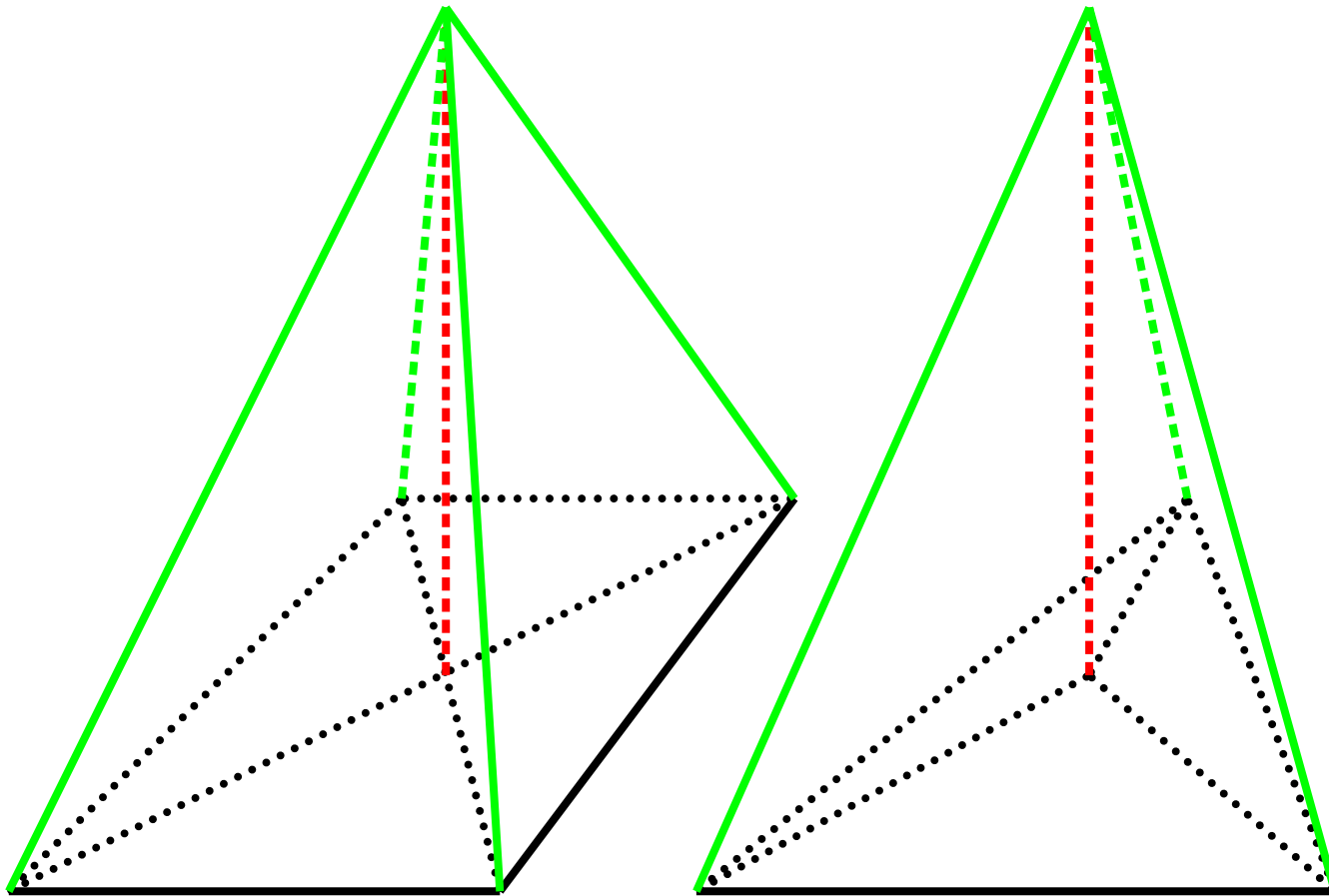
Queste condizioni definiscono univocamente le funzioni  $\varphi_i$  e inoltre queste formano una base dello spazio  $V_h$ .

Ogni funzione di  $V_h$  può essere espressa nella forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(x).$$

Infatti le funzioni base possono avere le seguenti forme:

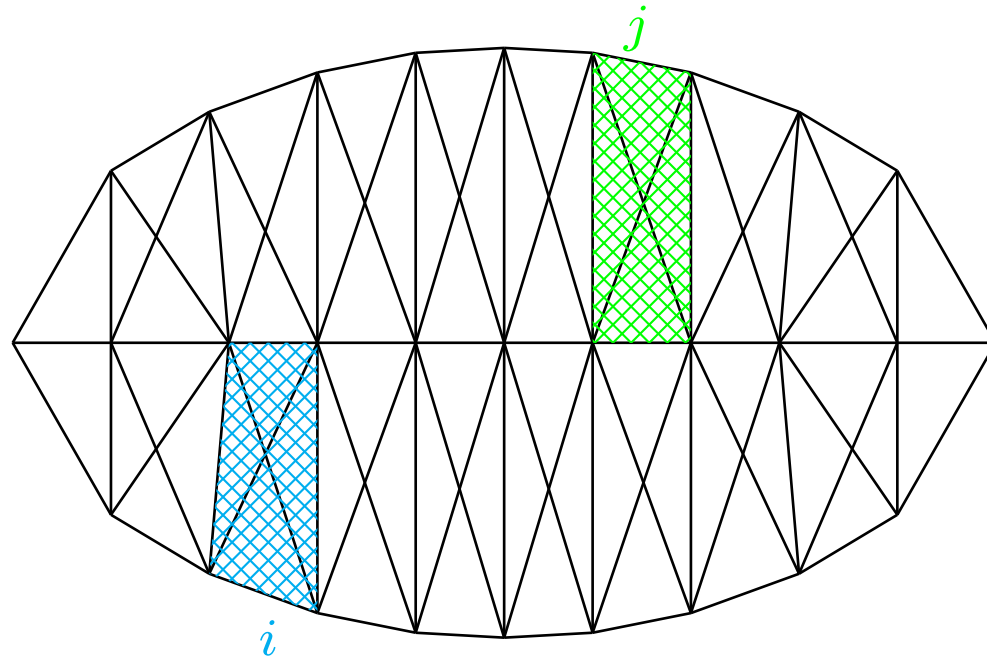




Un'importante osservazione è che la matrice  $A$  è molto sparsa. Infatti l'elemento  $\alpha_{ij}$  è diverso da zero solo quando i supporti delle due funzioni (cioè i domini dove esse sono definite) hanno un triangolo in comune, o, equivalentemente, quando i nodi  $i$  e  $j$  sono vertici di uno stesso triangolo.

Assegnato un nodo  $i$  il coefficiente  $\alpha_{ij}$  è diverso da zero quando il nodo  $j$  è uno dei vertici di un triangolo adiacente  $i$ .

$\Omega_h$



La matrice  $A$  viene costruita sommando i contributi di tutti i triangoli applicando la formula

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_k a_K(\varphi_i, \varphi_j)$$

in cui la somma viene fatta su tutti i triangoli e

$$a_K(\varphi_i, \varphi_j) = \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx.$$



Un triangolo contribuisce con valori diversi da zero ai 3 vertici nella suddetta forma. La matrice  $3 \times 3$ :

$$A_K = \begin{bmatrix} a_K(\varphi_i, \varphi_i) & a_K(\varphi_i, \varphi_j) & a_K(\varphi_i, \varphi_k) \\ a_K(\varphi_j, \varphi_i) & a_K(\varphi_j, \varphi_j) & a_K(\varphi_j, \varphi_k) \\ a_K(\varphi_k, \varphi_i) & a_K(\varphi_k, \varphi_j) & a_K(\varphi_k, \varphi_k) \end{bmatrix}$$

associata al triangolo  $K(i, j, k)$  con vertici  $i, j, k$  è detta **matrice degli elementi di stiffness**.

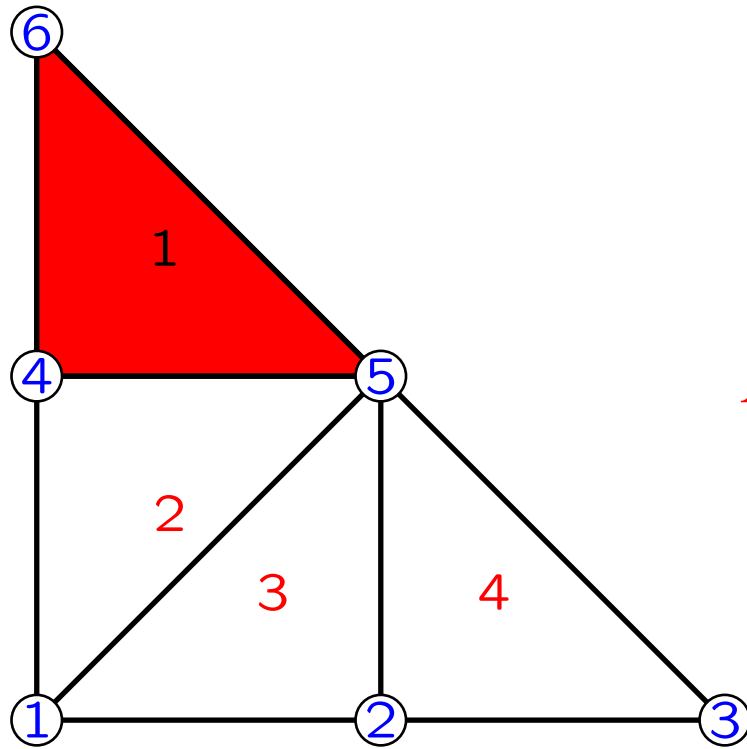
Per formare la matrice  $A$  è necessario sommare tutti i contributi  $a_K(\varphi_k, \varphi_m)$  in posizione  $k, m$  della matrice. Questo procedimento viene detto **processo di assemblaggio**:

$$A = \sum_{\kappa=1}^N A^{[\kappa]}$$

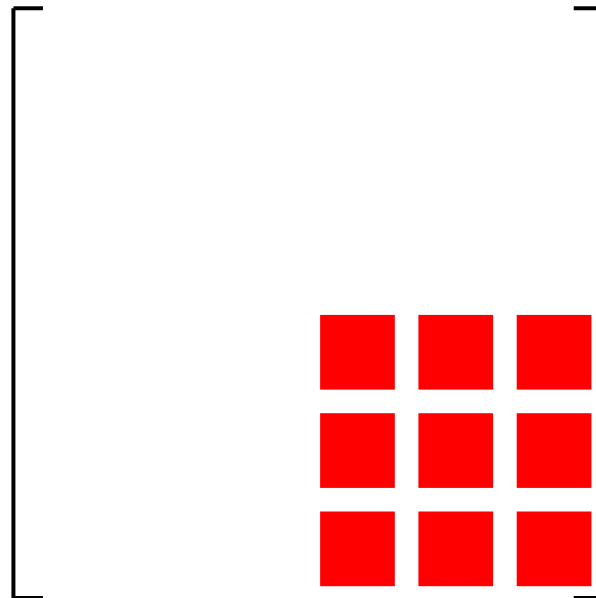
in cui  $A^{[\kappa]}$  è una matrice che ha solo 9 elementi diversi da zero pur essendo di dimensione uguale al numero dei nodi.

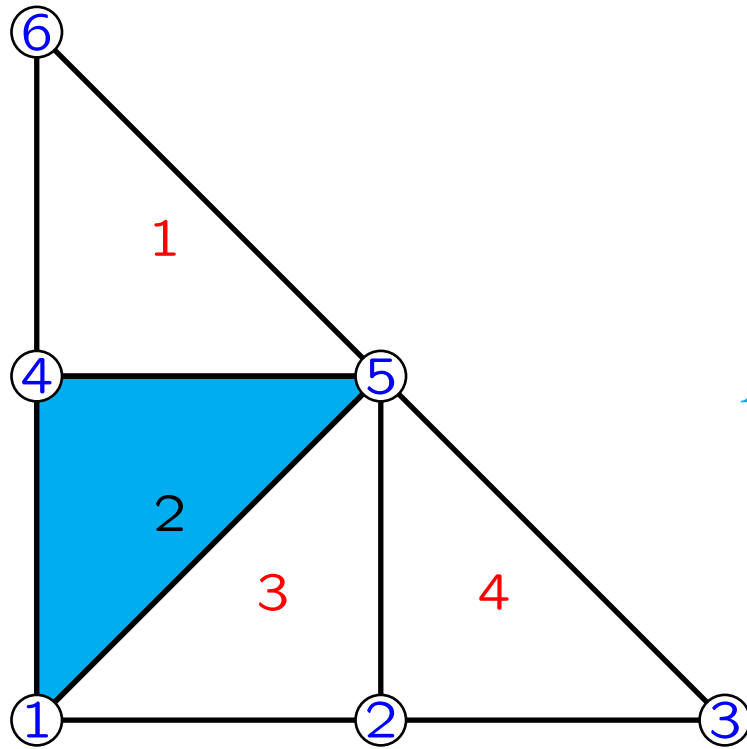
## Esempio

Vediamo come esempio un dominio triangolare suddiviso in altri 4 triangoli più piccoli.

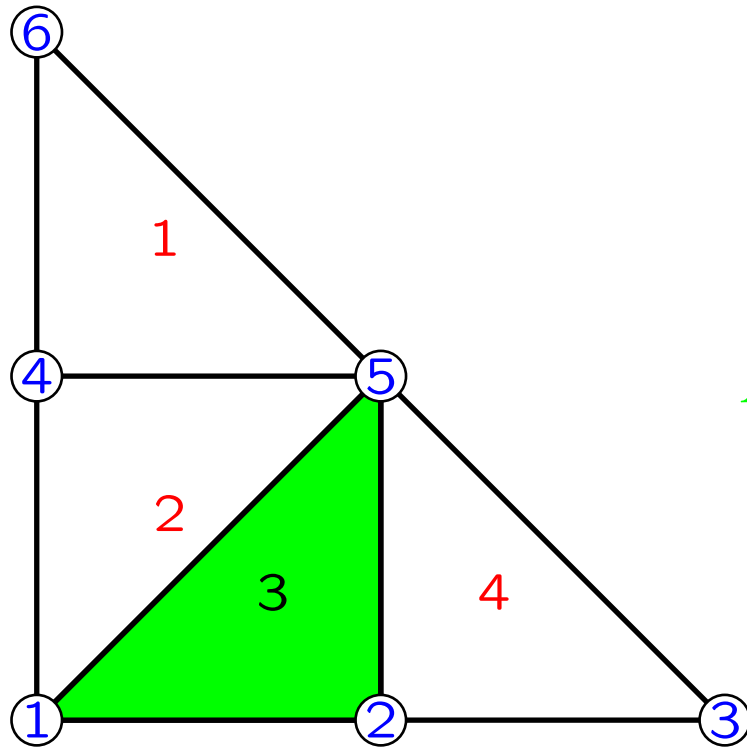


$A^{[1]} =$

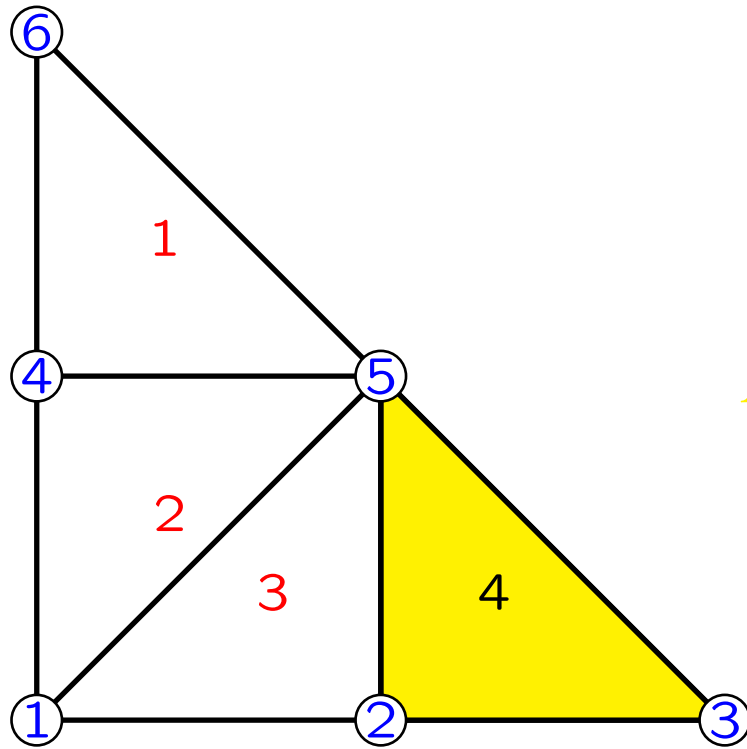




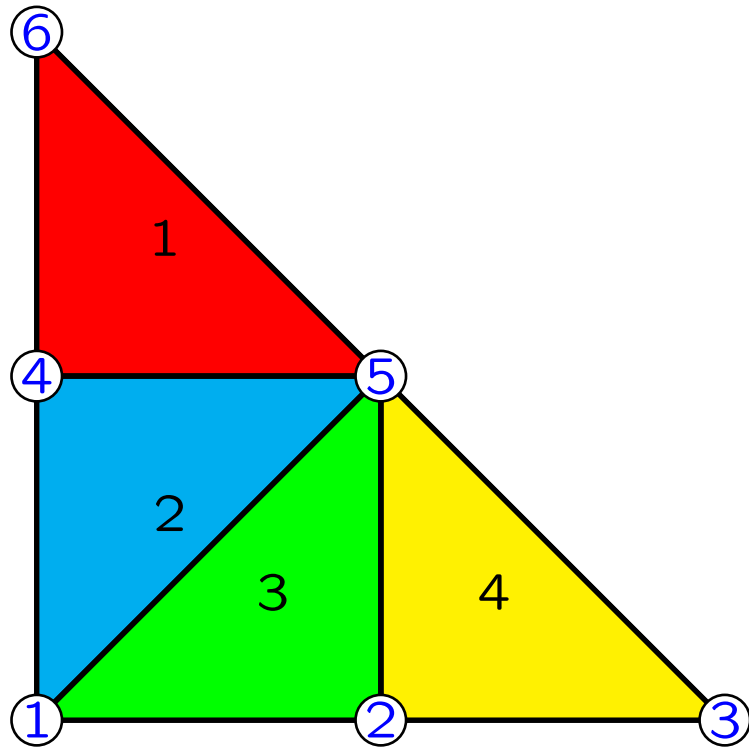
$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$



$$A^{[3]} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare \\ & & & \\ \blacksquare & \blacksquare & & \blacksquare \end{bmatrix}$$



$$A^{[4]} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$

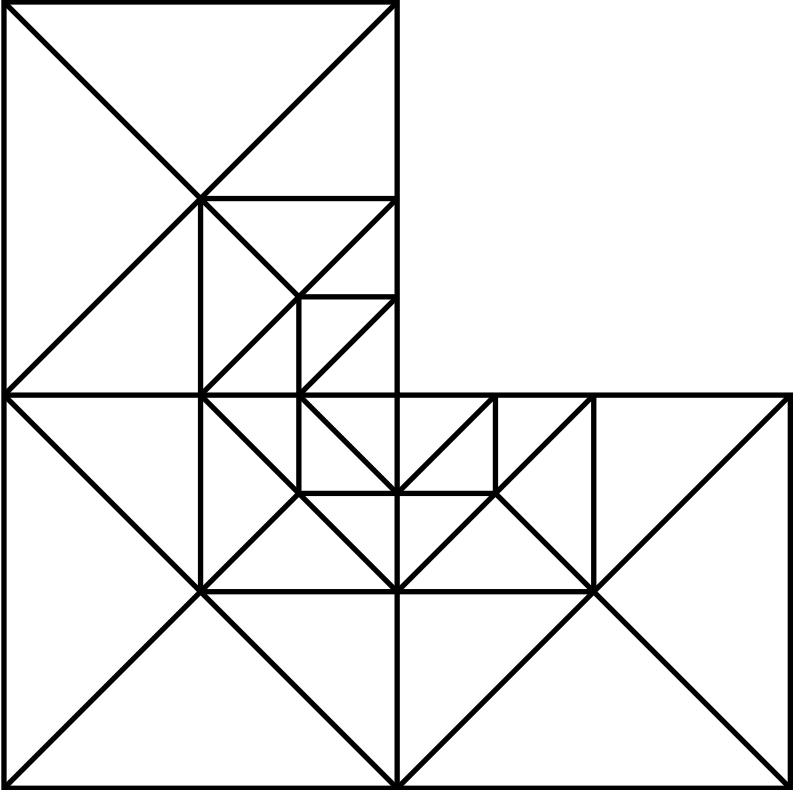


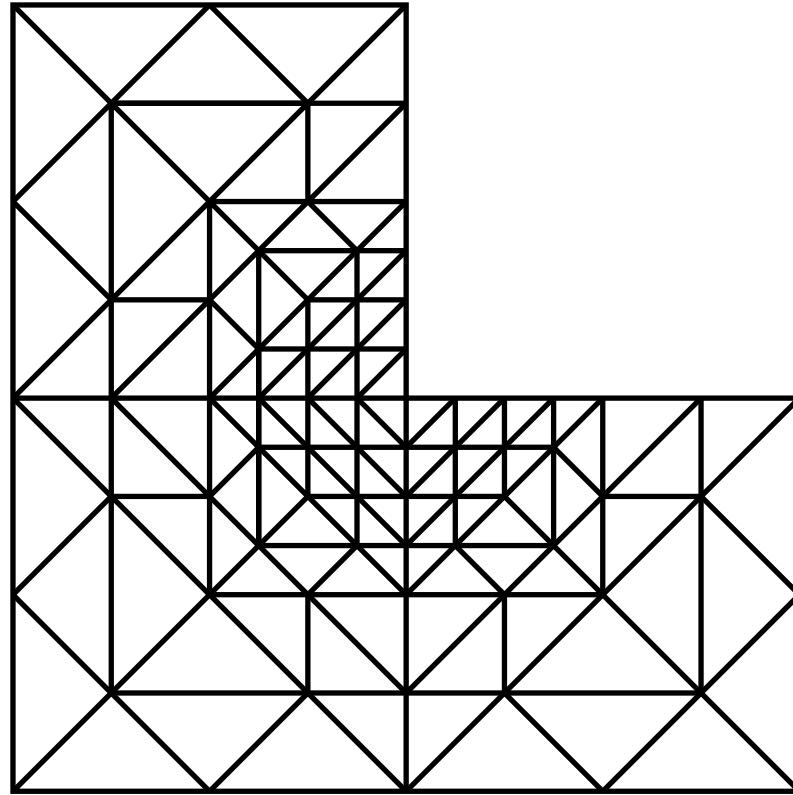
$$A = \begin{bmatrix} \text{blue/green} & \text{green} & & \text{blue} & \text{blue/green} & & \\ \text{green} & \text{yellow/green} & \text{yellow} & & \text{yellow/green} & & \\ & \text{yellow} & \text{yellow} & & \text{yellow} & & \\ \text{blue} & & & \text{blue/red} & \text{blue/red} & \text{red} & \\ \text{blue/green} & \text{yellow/green} & \text{yellow} & \text{blue/red} & \text{yellow/green} & \text{red} & \\ & & & \text{red} & \text{red} & \text{red} & \end{bmatrix}$$

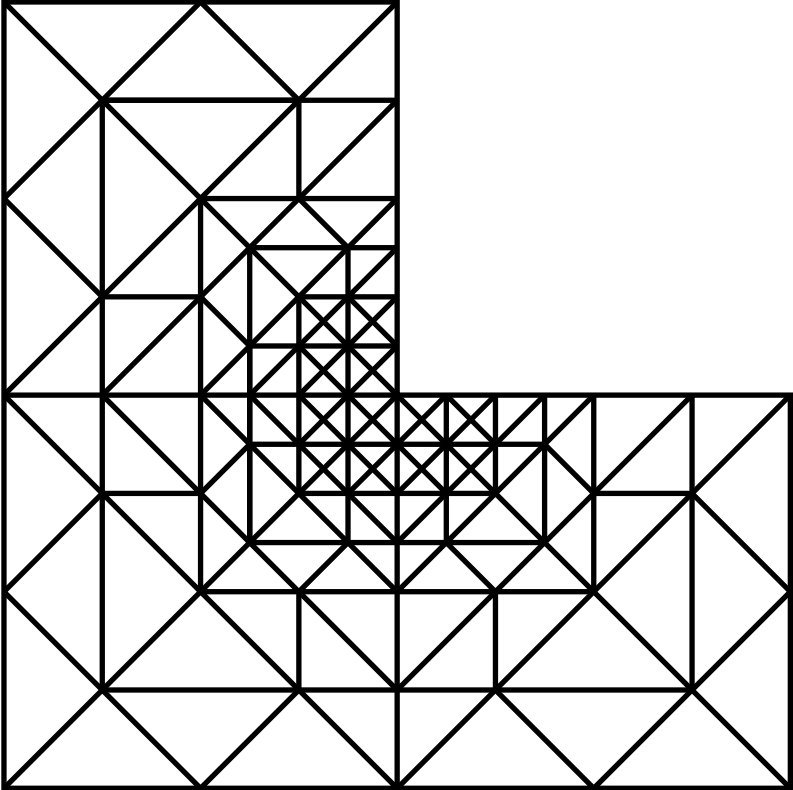


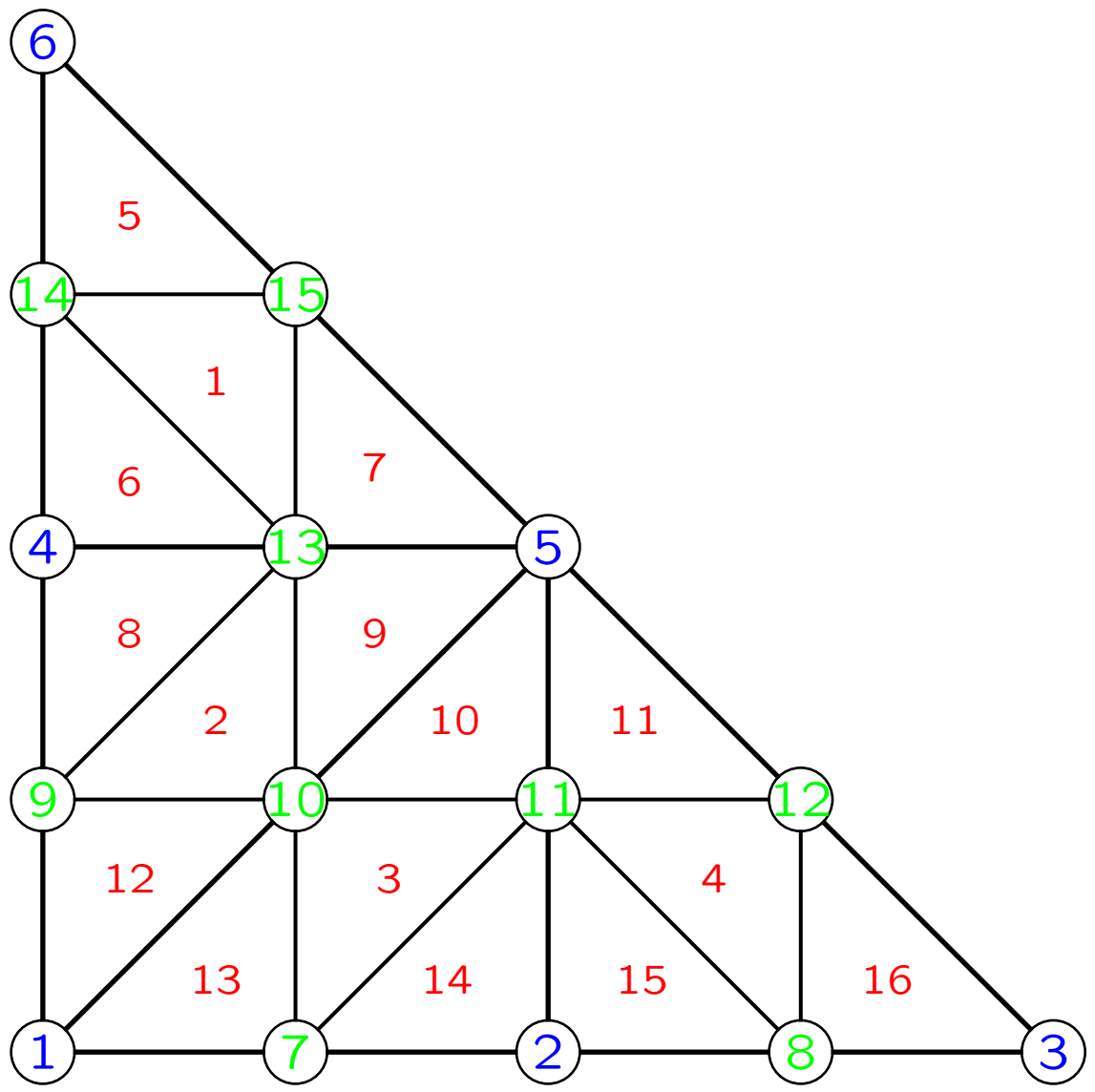
## Vantaggi

1. La tecnica può essere applicata a qualsiasi dominio (sia in due che in tre dimensioni) di qualsiasi forma (infatti se il dominio ha una frontiera curva allora considerando triangoli particolarmente piccoli anche i lati curvi possono essere considerati come fossero segmenti);
2. La dimensione dei triangoli può non essere la stessa quindi si possono utilizzare partizioni più fitte dove la soluzione è più difficile.









$A =$

