

Metodi Numerici per Equazioni Ellittiche

Vediamo ora di descrivere una tecnica per la risoluzione numerica della più semplice equazione ellittica lineare, l'**Equazione di Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Se una funzione $u(x, y)$ è di classe \mathcal{C}^2 in un determinato sottoinsieme Ω di \mathbb{R}^2 ed è una soluzione di (1) nello stesso Ω allora prende il nome di **funzione armonica**.

Le proprietà di queste funzioni sono state ampiamente studiate poichè trovano applicazione in numerosi campi della fisica applicata.

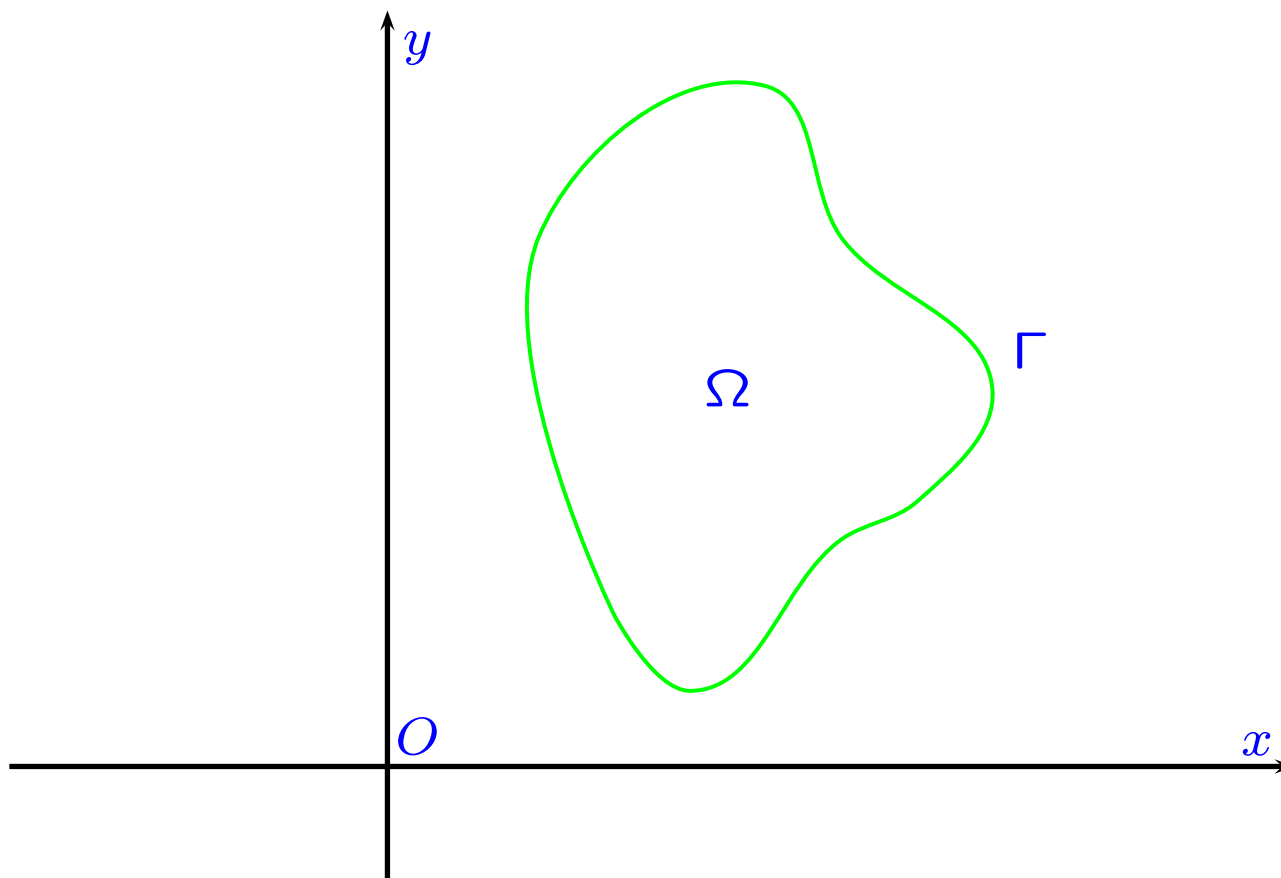
Tra le principali proprietà di cui godono le funzioni armoniche la principale è sicuramente la seguente.

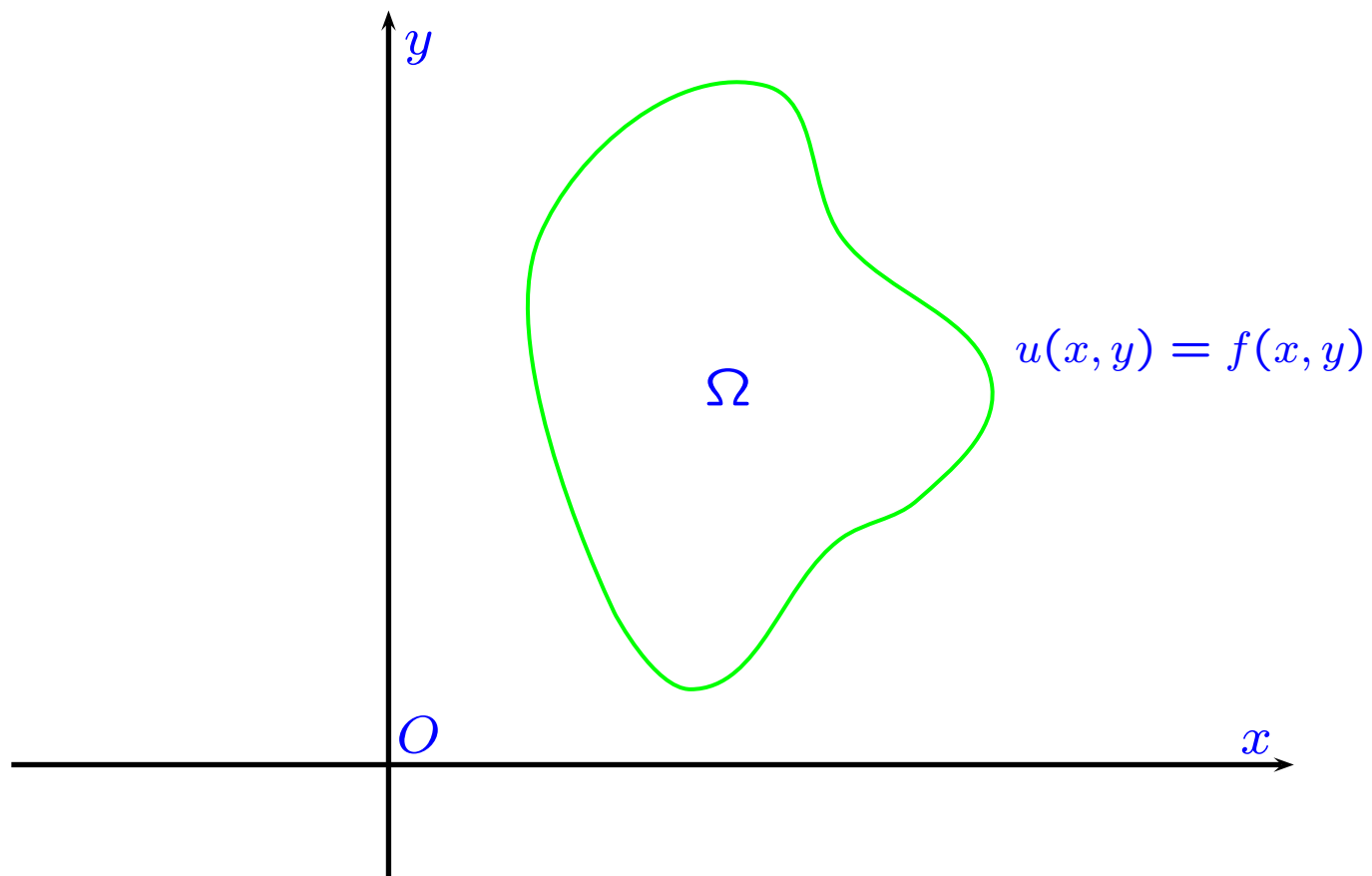
Teorema[Principio del massimo-minimo] Sia Ω una regione limitata e semplicemente connessa e Γ la sua frontiera. Sia $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se $u(x, y)$ è armonica su Ω e continua su $\overline{\Omega}$, allora $u(x, y)$ assume i suoi valori massimo e minimo su Γ .

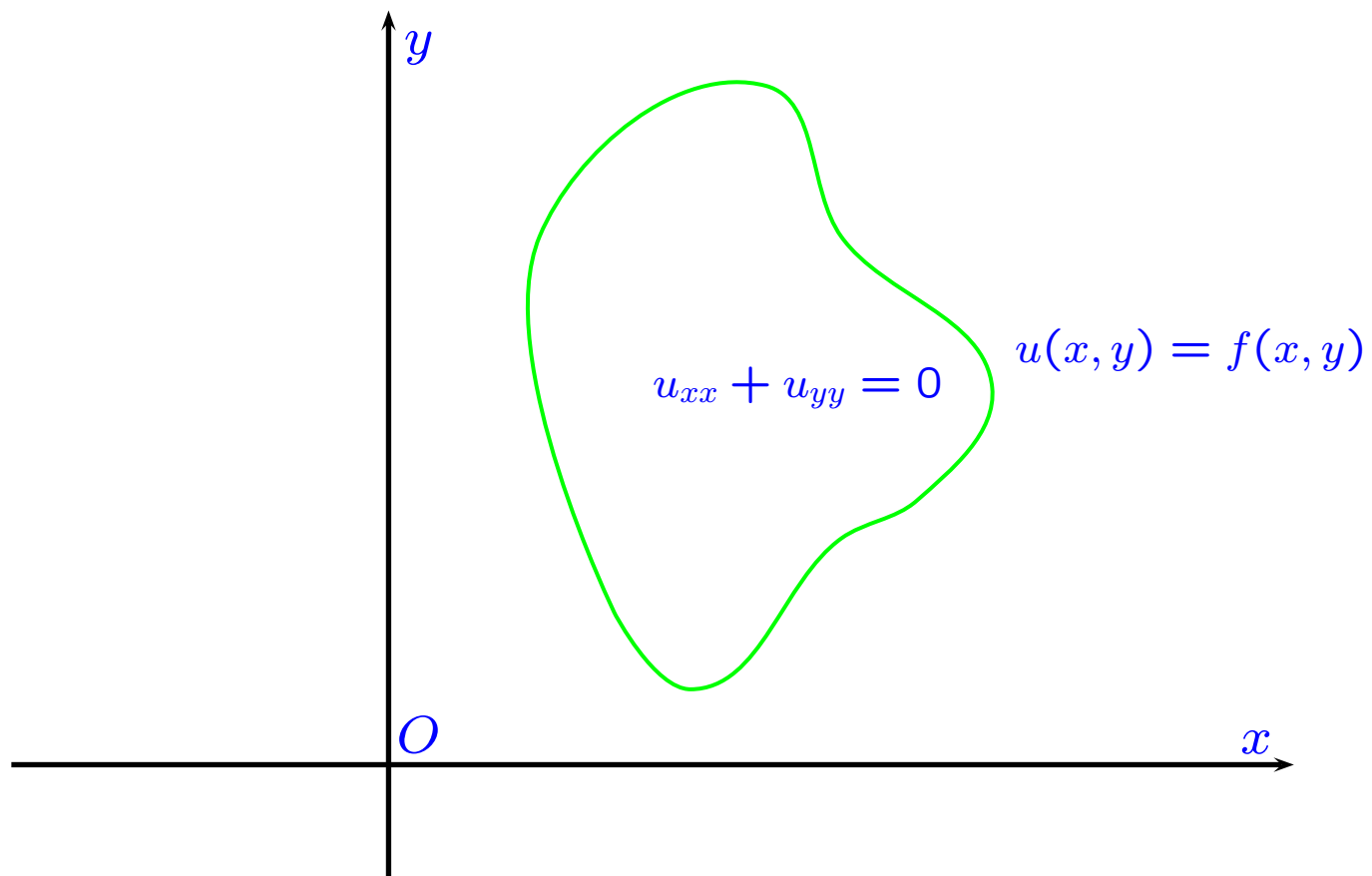
Il Problema di Dirichlet

L'equazione di Laplace può essere associata ad un **problema di Dirichlet** quando, assegnata una funzione $f(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^2(\Gamma)$, si cerca una funzione $u(x, y)$ tale che:

1. $u(x, y)$ è continua su $\Omega \cup \Gamma$;
2. $u(x, y) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \Gamma$;
3. $u(x, y)$ è armonica nell'insieme Ω .







Il Problema di Neumann

L'equazione di Laplace può essere associata ad un **problema di Neumann** quando, al posto della condizione 2., si impone che sia

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = f(x, y)$$

cioè sia assegnata la derivata normale di $u(x, y)$ rispetto alla curva Γ . Ricordiamo che se $\mathbf{n}^T = (n_x, n_y)$, è il vettore normale allora

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla^T u) \cdot \mathbf{n} = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

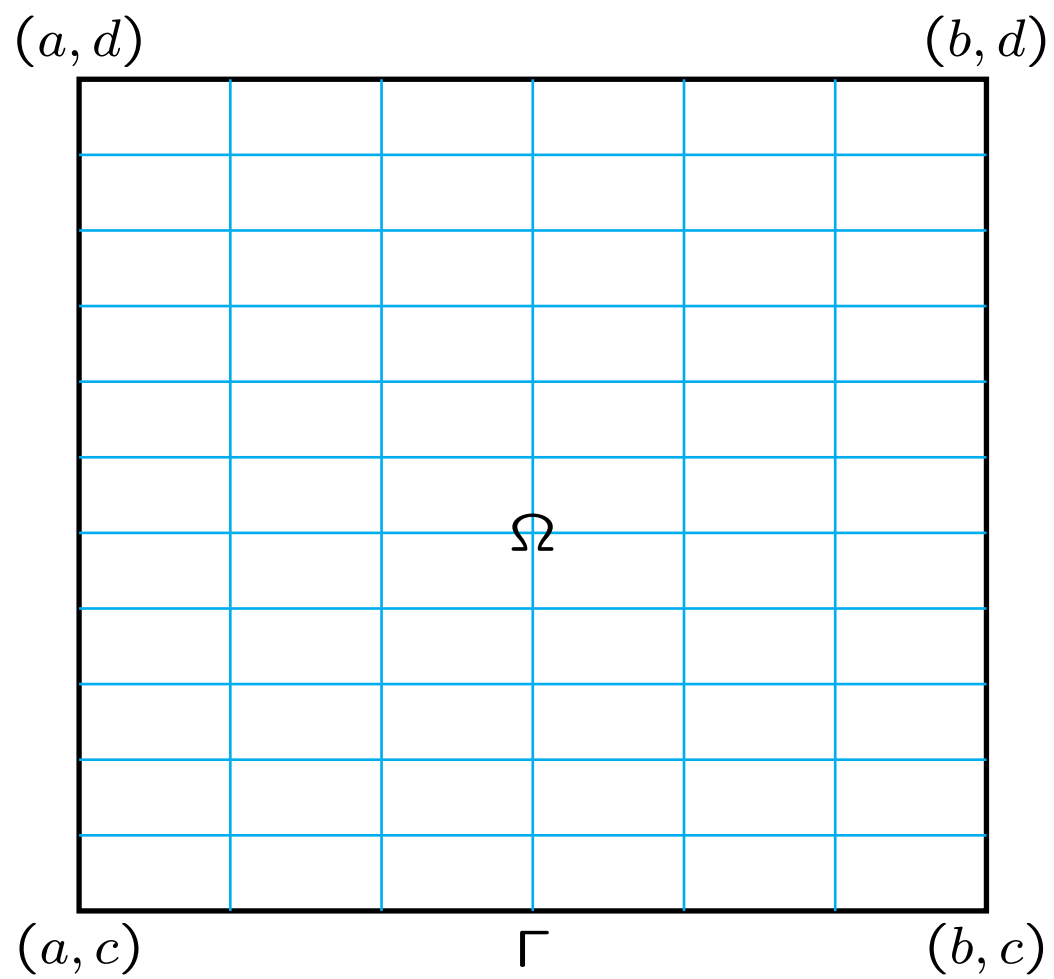
Consideriamo ora la risoluzione dell'equazione di Laplace prendendo Ω uguale al rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. In questo caso un metodo è quello di approssimare l'operatore differenziale dopo avere suddiviso in modo opportuno l'insieme Ω . Infatti si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in N parti uguali sull'asse x e M sull'asse y ottenendo la reticolazione di Ω mediante i seguenti punti:

$$x_i = x_{i-1} + h = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$y_j = y_{j-1} + k = c + jk \quad j = 0, 1, \dots, M$$

dove

$$h = \frac{b - a}{N}, \quad k = \frac{d - c}{M}.$$



Abbiamo così ottenuto un insieme discreto di punti del piano

$$\mathcal{R}_{N+1,M+1} = \left\{ (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 \mid x_i = a + ih, i = 0, N, y_j = c + jk, j = 0, M \right\}.$$

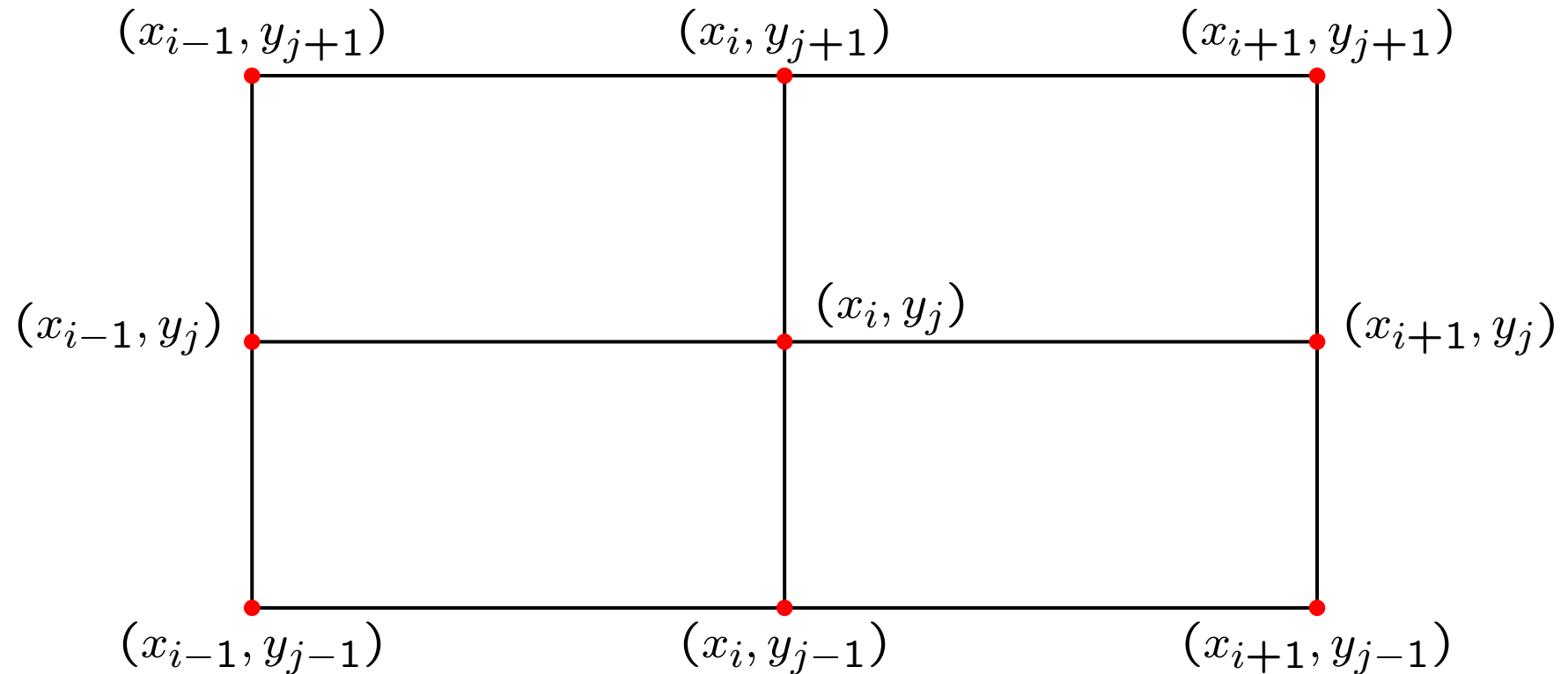
La risoluzione numerica del problema di Dirichlet associato consiste nell'approssimare opportunamente la funzione $u(x, y)$ nei punti appartenenti all'insieme $\mathcal{R}_{N+1,M+1}$.

L'idea alla base del metodo è quella di approssimare le derivate parziali seconde nei punti del reticolo $\mathcal{R}_{N+1,M+1}$ e imporre che tali approssimazioni soddisfino l'equazione di Laplace.

Poniamo innanzitutto

$$u_{ij} \simeq u(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

Per approssimare le derivate parziali seconde $u_{xx}(x, y)$, e $u_{yy}(x, y)$, nel punto (x_i, y_j) consideriamo il seguente reticolo:



Per approssimare la derivata parziale seconda $u_{xx}(x, y)$ possiamo supporre che questa sia una derivata del secondo ordine ordinaria rispetto ad x , considerando la y costante.

Consideriamo i punti (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_j) e (x_{i+1}, y_j) e, applicando la formula per l'approssimazione di $f''(t_i)$, risulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Analogamente per approssimare $u_{yy}(x_i, y_j)$ si considera come fosse una derivata ordinaria fatta rispetto a y , tenendo la x costante e coinvolgendo i punti del reticolo (x_i, y_{j-1}) , (x_i, y_j) e (x_i, y_{j+1}) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Tenendo presente che la funzione $u(x, y)$ è nota sul bordo del rettangolo alcune delle approssimazioni non devono essere calcolate, infatti:

$$u_{0,j} = u(x_0, y_j) = u(a, y_j) = f(a, y_j), \quad j = 0, \dots, M$$

$$u_{i,0} = u(x_i, y_0) = u(x_i, c) = f(x_i, c), \quad i = 0, \dots, N$$

$$u_{N,j} = u(x_N, y_j) = u(b, y_j) = f(b, y_j), \quad j = 0, \dots, M$$

$$u_{i,M} = u(x_i, y_M) = u(x_i, d) = f(x_i, d), \quad i = 0, \dots, N.$$

Adesso possiamo imporre che queste approssimazioni soddisfano l'equazione di Laplace

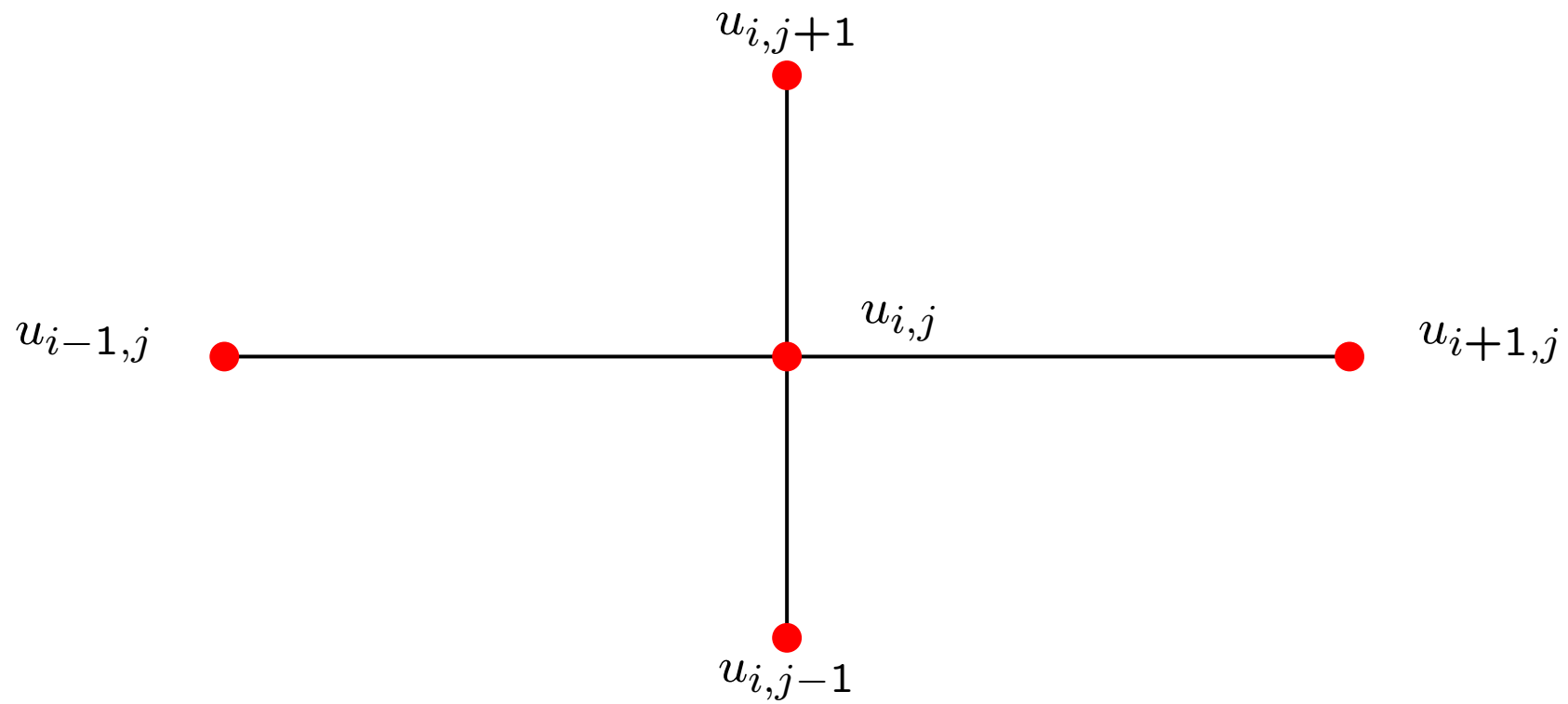
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

$$(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})k^2 + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})h^2 = 0$$

$$h^2u_{i,j-1} + k^2u_{i-1,j} - 2(h^2 + k^2)u_{i,j} + k^2u_{i+1,j} + h^2u_{i,j+1} = 0.$$

Tali relazioni danno luogo ad un insieme di equazioni lineari, una per ogni punto dell'insieme $\mathcal{R}_{N+1,M+1}$ che non appartiene alla frontiera Γ .

Il valore dell'approssimazione $u_{i,j}(x,y)$, dipende solo dal valore i altri quattro punti:



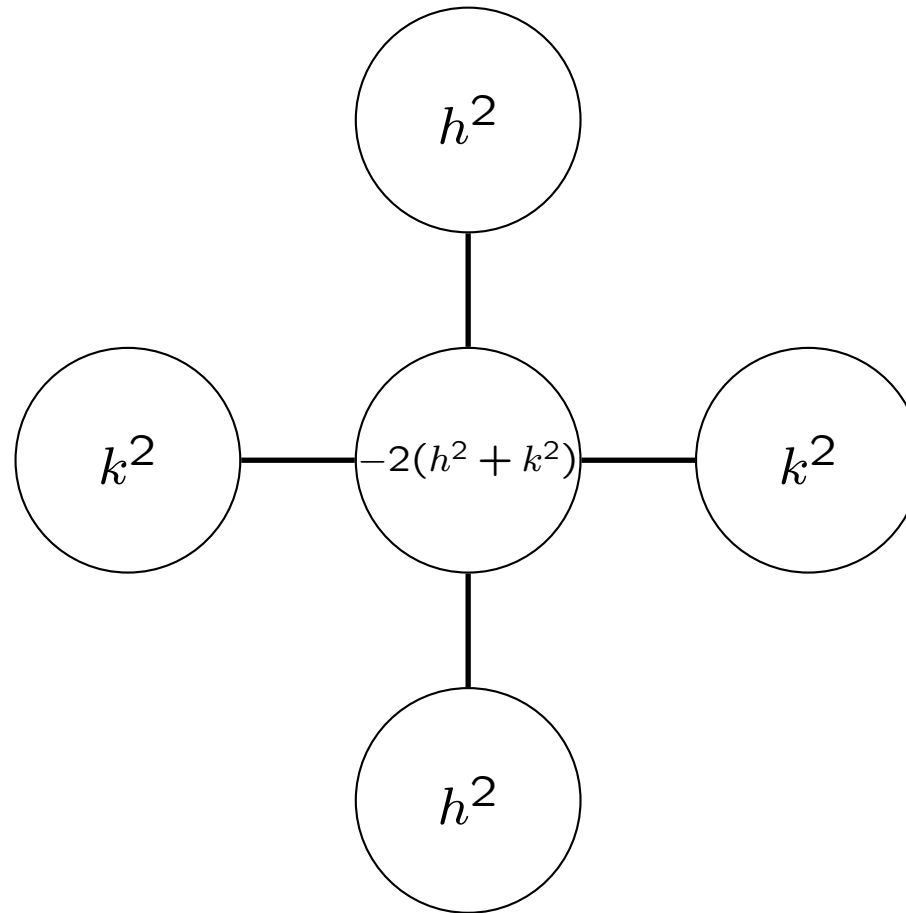
Schema a 5 punti per l'equazione di Laplace

I valori della funzione nei vertici delle celle in cui è stato suddiviso il dominio di integrazione (Rettangolo $[a, b] \times [c, d]$) sono legati dalla seguente relazione lineare:

$$h^2 u_{i,j-1} + k^2 u_{i-1,j} - 2(h^2 + k^2) u_{i,j} + k^2 u_{i+1,j} + h^2 u_{i,j+1} = 0.$$

per $i = 1, \dots, N - 1$, e $j = 1, \dots, M - 1$. Si tratta di $(N - 1)(M - 1)$ uguaglianze che danno luogo ad un sistema lineare.

Lo schema numerico è sintetizzato nel seguente stencil:



La prima equazione si ottiene per $i = j = 1$:

$$h^2 u_{1,0} + k^2 u_{0,1} - 2(h^2 + k^2)u_{1,1} + k^2 u_{2,1} + h^2 u_{1,2} = 0$$

equivalente a

$$-2(h^2 + k^2)u_{1,1} + k^2 u_{2,1} + h^2 u_{1,2} = -h^2 u_{1,0} - k^2 u_{0,1}.$$

La seconda equazione si ottiene per $i = 2$ e $j = 1$:

$$h^2 u_{2,0} + k^2 u_{1,1} - 2(h^2 + k^2)u_{2,1} + k^2 u_{3,1} + h^2 u_{2,2} = 0$$

equivalente a

$$k^2 u_{1,1} - 2(h^2 + k^2)u_{2,1} + k^2 u_{3,1} + h^2 u_{2,2} = -h^2 u_{2,0}.$$

Ogni equazione (i, j) ha al più 5 coefficienti diversi da 0 di cui 3 coinvolgono 3 incognite numerata consecutivamente $(i - 1, j)$, (i, j) e $(i + 1, j)$, una precedente $(i, j - 1)$ e una successiva $(i, j + 1)$, distanti $N - 1$ incognite (prima e dopo quella di riferimento).

Metodi per l'Ordinamento delle incognite

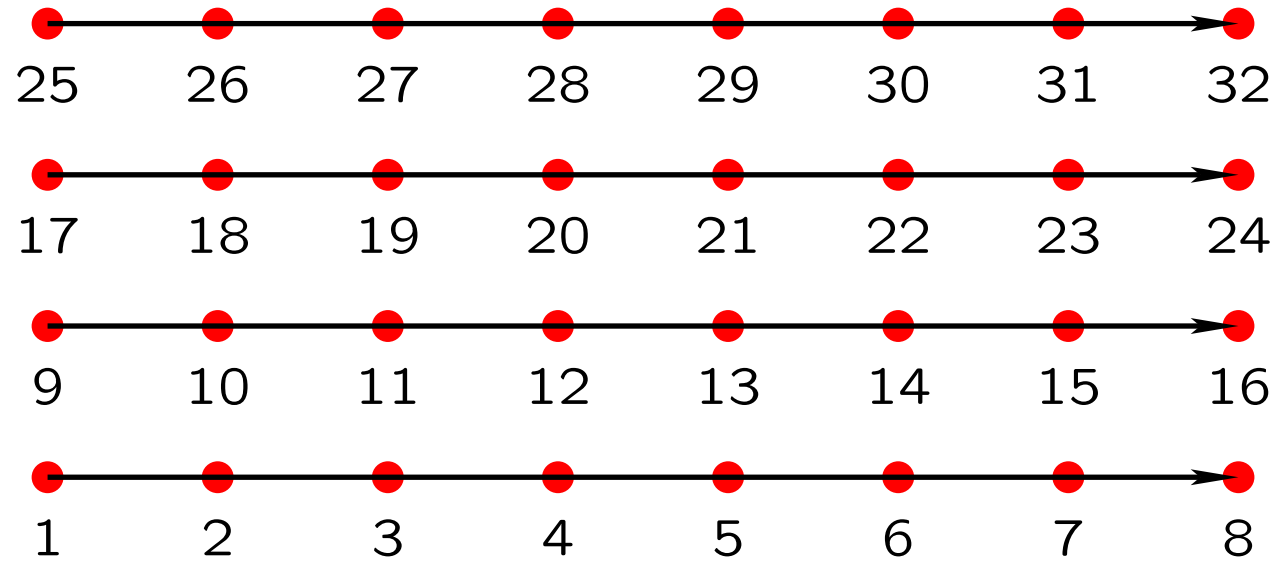
La struttura del sistema lineare dipende dal modo con cui vengono ordinate le incognite $u_{i,j}$. Ci sono diversi modi:

1. Ordinamento Lessicografico (o Naturale);
2. Ordinamento Red-Black;
3. Ordinamento Multicolore;
4. Ordinamento Cuthill-McKee;

Ordinamento Lessicografico

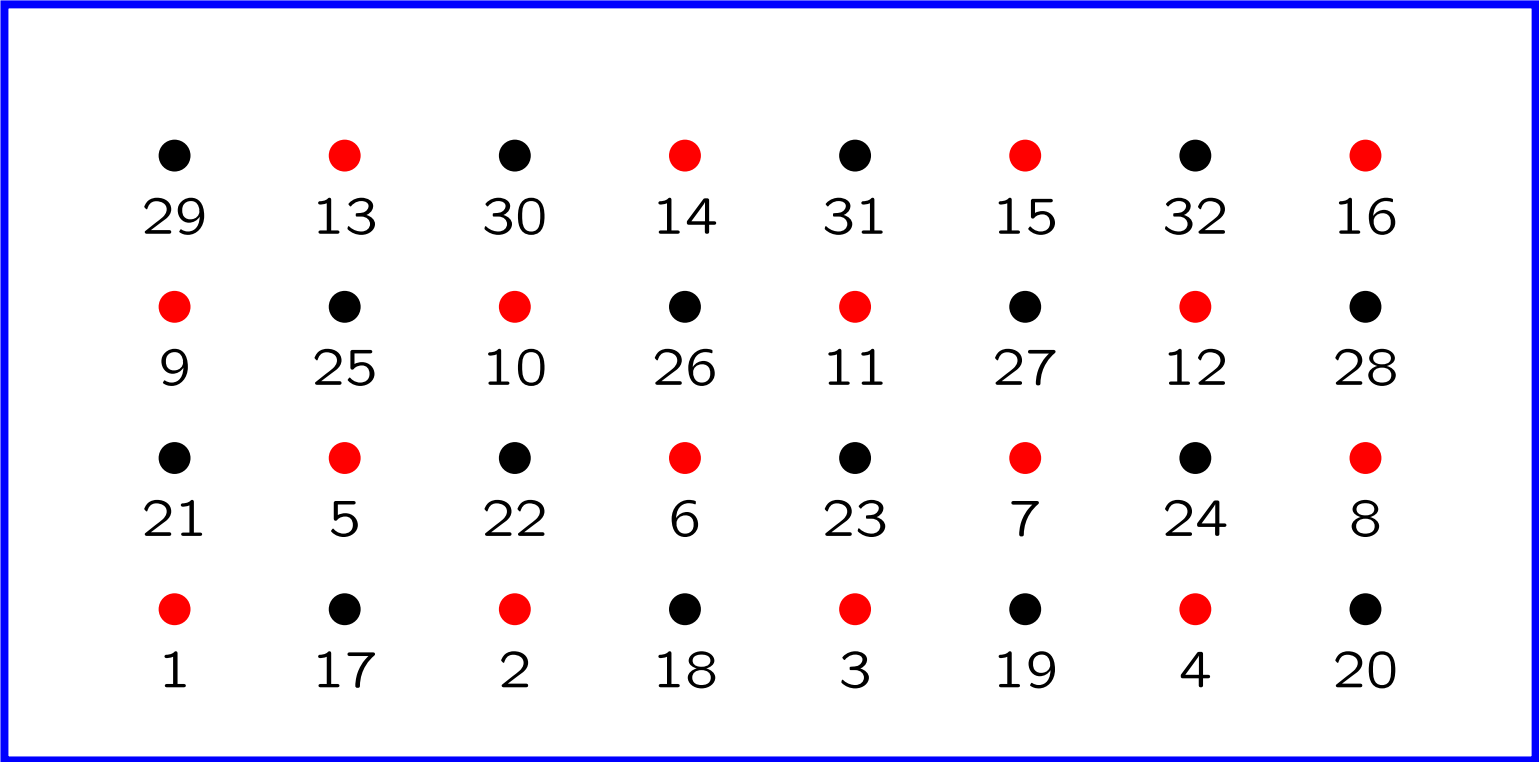
Si ordinano le incognite partendo dal primo nodo in basso a sinistra e si procede verso destra, terminata la riga si passa alla successiva riga in alto.

Nel caso in cui il problema sia di Dirichlet devono essere numerati solo i punti che non appartengono alla frontiera, poichè negli altri si suppone che la funzione $u(x, y)$ sia nota.



Ordinamento Red Black

































Si dividono le incognite in due colori, a scacchiera, e quindi si procede con l'ordinamento lessicografico dei due colori in sequenza.



| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 29 | 13 | 30 | 14 | 31 | 15 | 32 | 16 |
| ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 9 | 25 | 10 | 26 | 11 | 27 | 12 | 28 |
| ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 21 | 5 | 22 | 6 | 23 | 7 | 24 | 8 |
| ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ● |
| 1 | 17 | 2 | 18 | 3 | 19 | 4 | 20 |

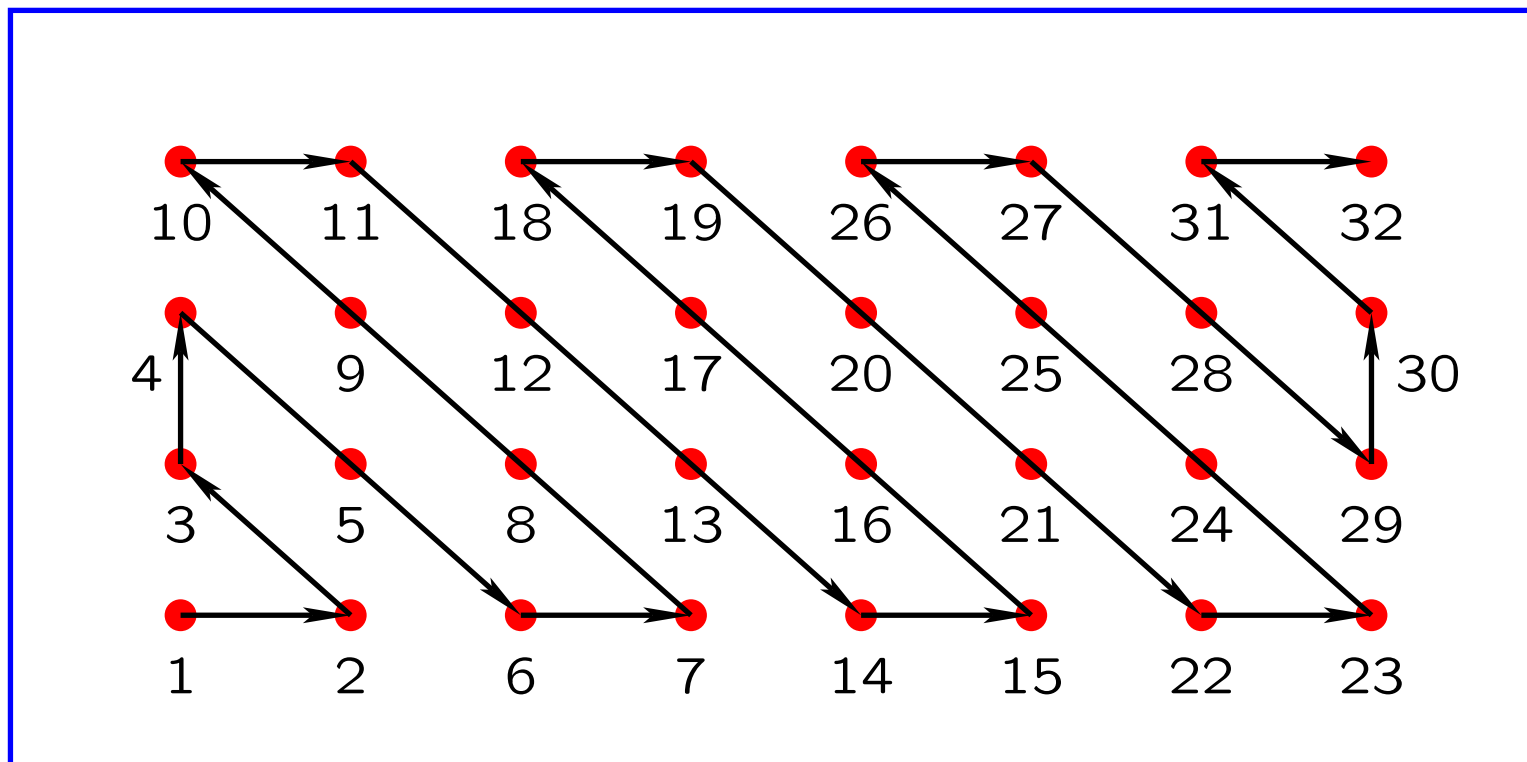
Ordinamento Multicolore

Come l'ordinamento Red-Black con la differenza che i colori sono più di due (solitamente quattro o sei).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 23 | 31 | 7 | 15 | 24 | 32 | 8 | 16 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 13 | 21 | 29 | 6 | 14 | 22 | 30 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 19 | 27 | 3 | 11 | 20 | 28 | 4 | 12 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 2 | 10 | 18 | 26 |

Ordinamento Cuthill-McKee

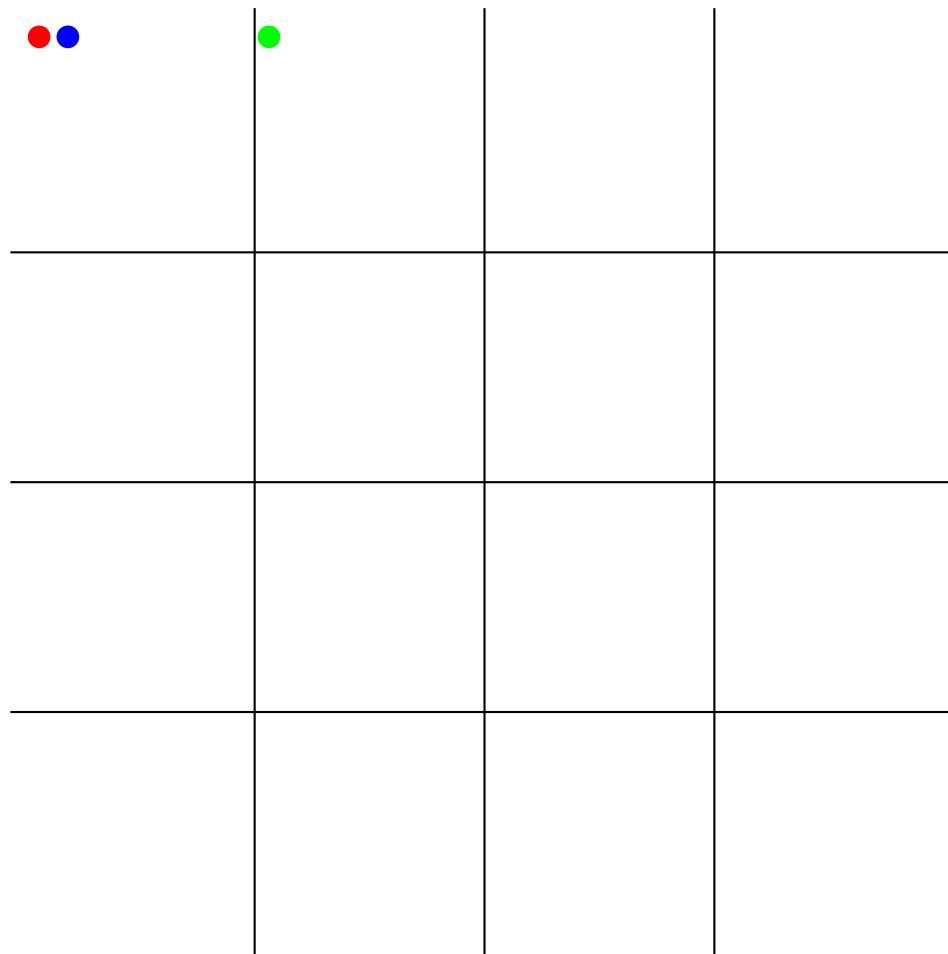
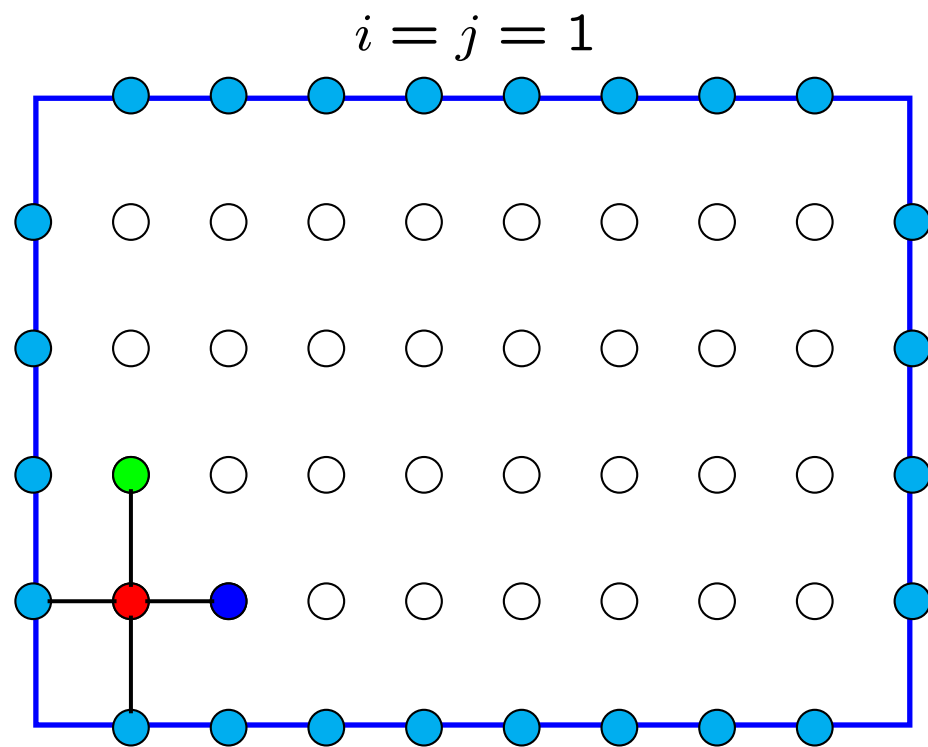
Si ordinano le incognite partendo da un nodo arbitrario e numerando quelli adiacenti che si trovano lungo una direzione prefissata (per esempio lungo la diagonale).

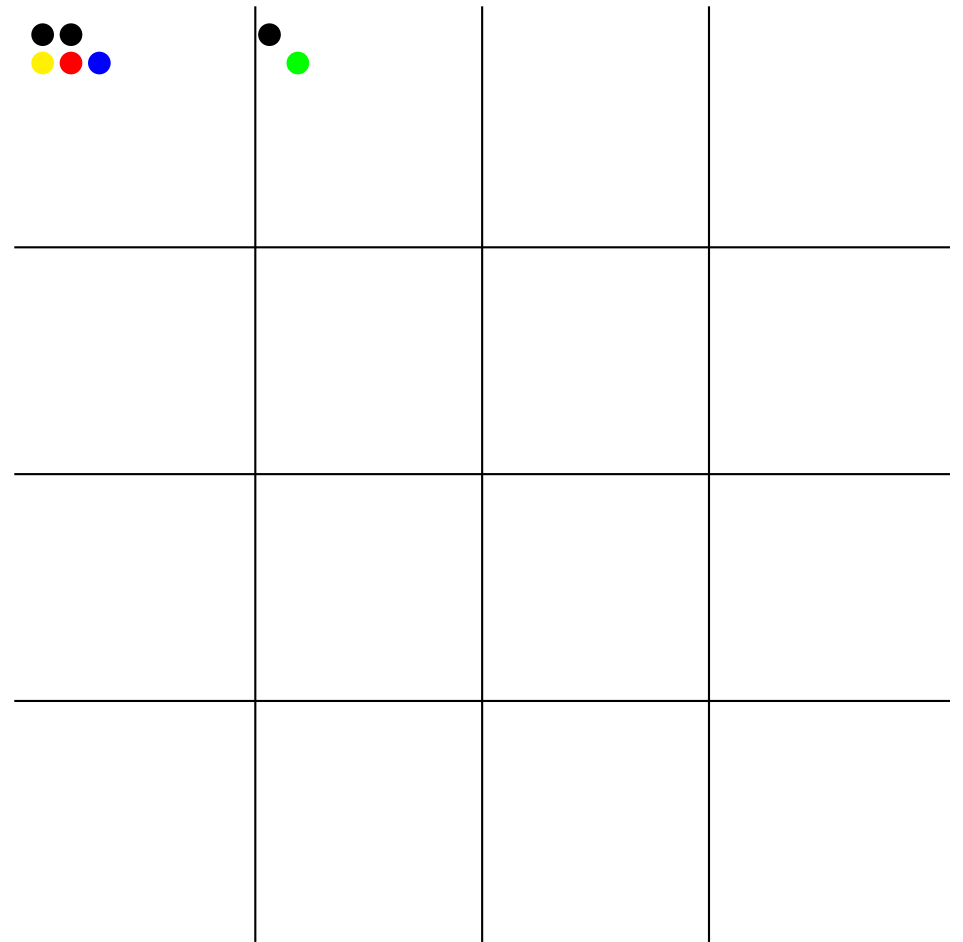
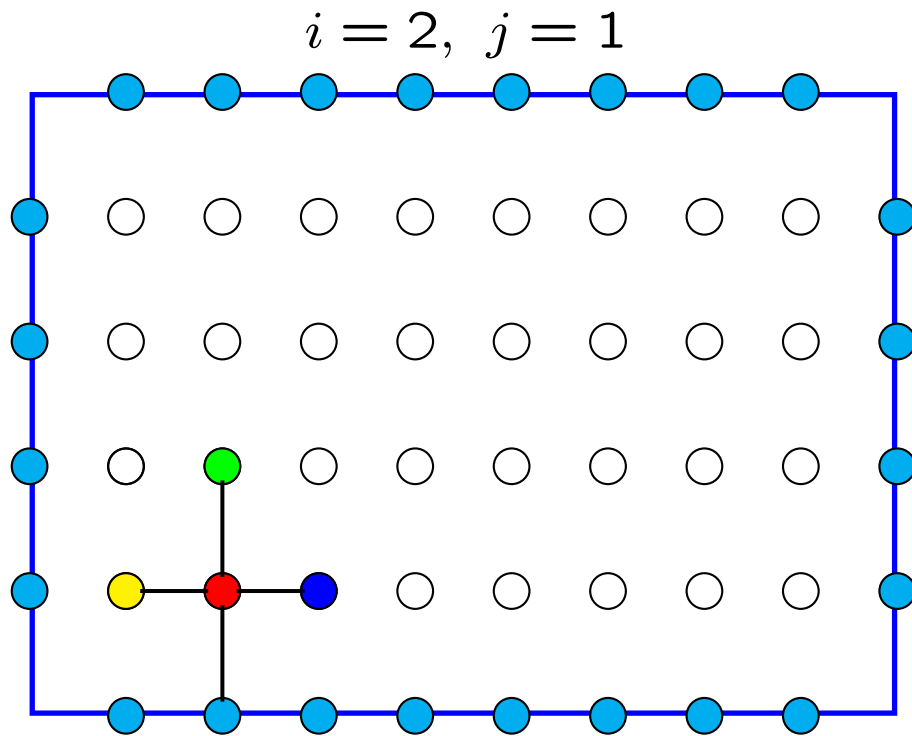


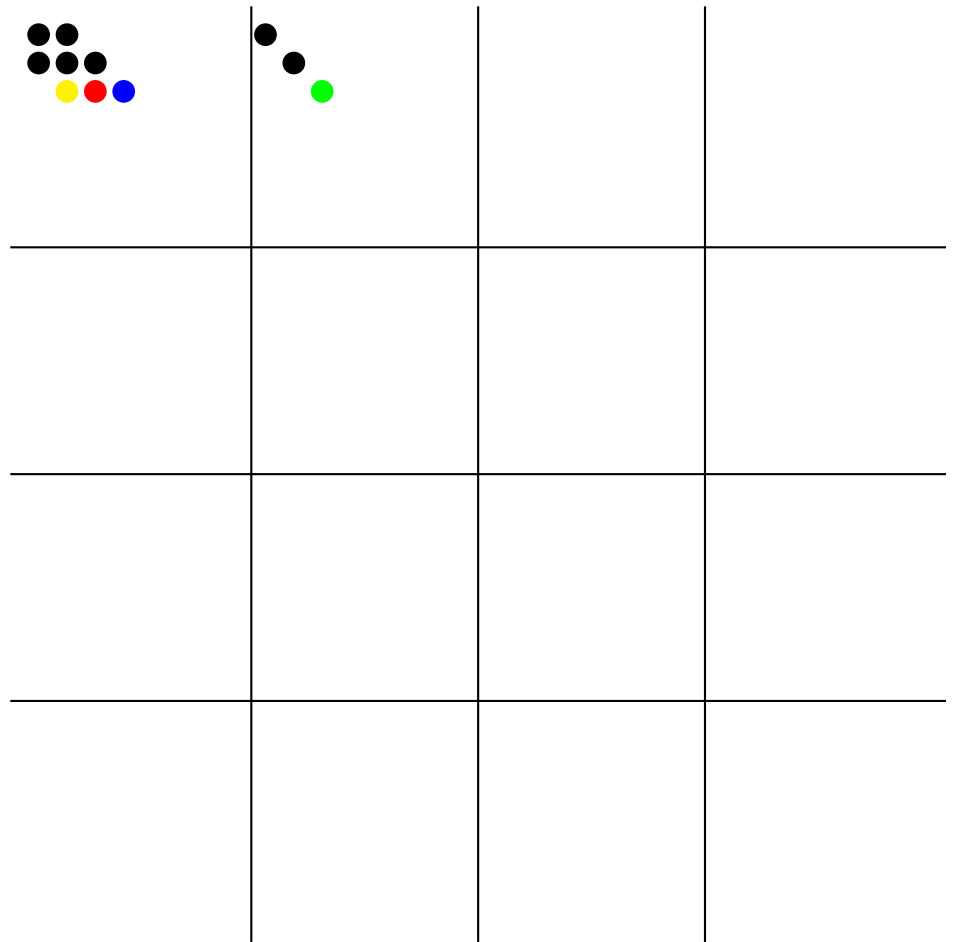
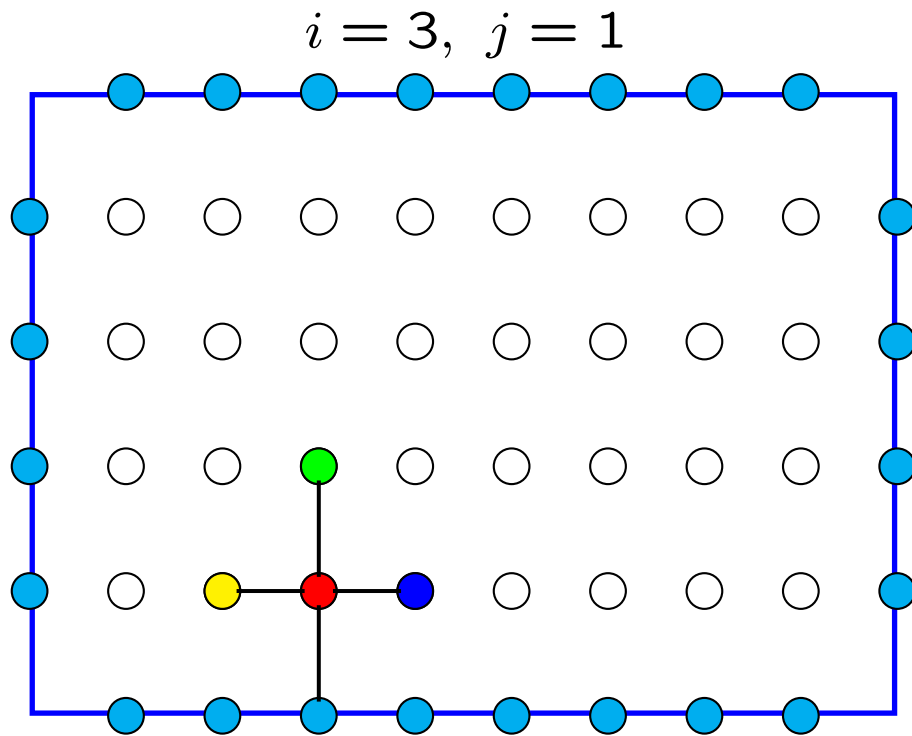
Struttura delle matrici

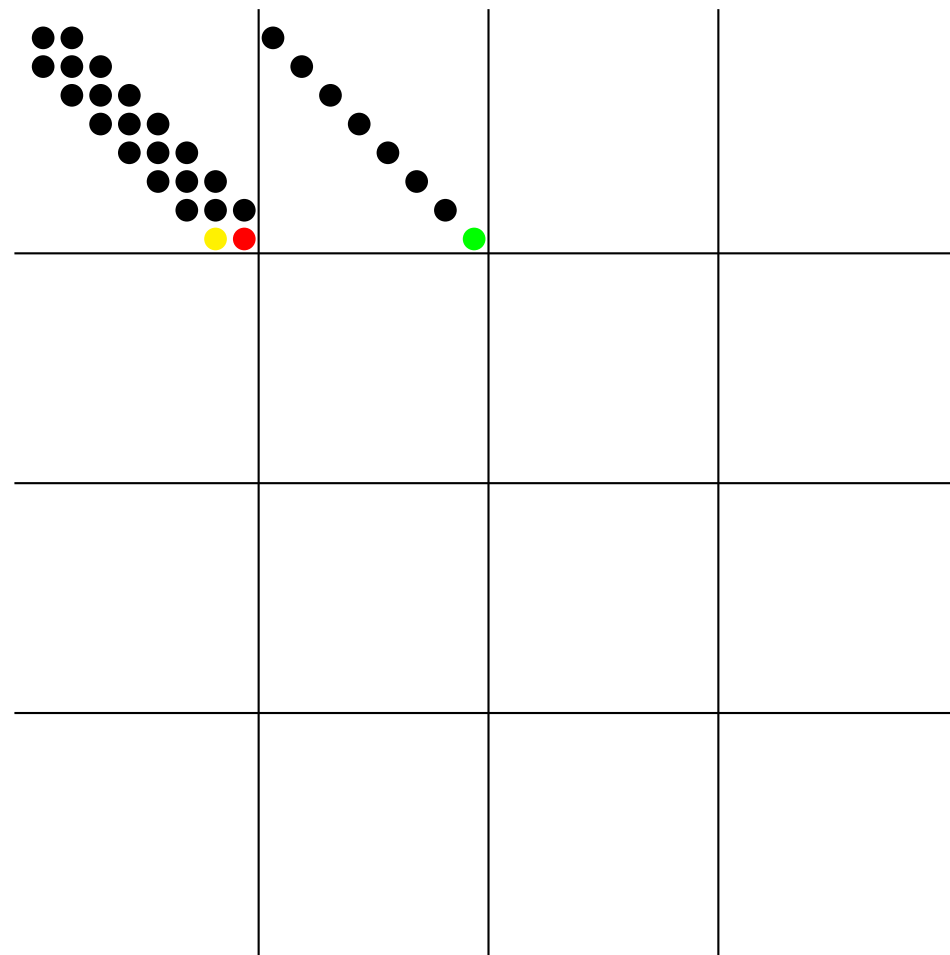
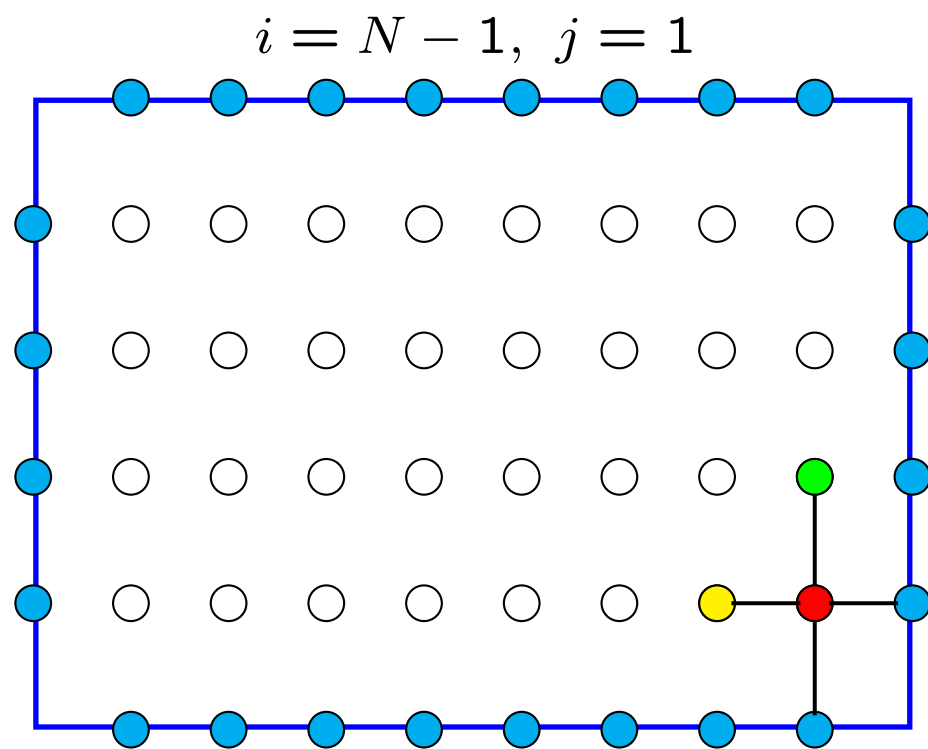
- Lo schema a cinque punti definisce un sistema lineare $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ in cui la matrice A ha ordine $(N - 1)(M - 1)$;
- I diversi tipi di ordinamento danno luogo a matrici dei coefficienti che hanno una struttura molto sparsa, cioè la maggior parte degli elementi sono uguali a zero. Infatti su $(N - 1)^2(M - 1)^2$ elementi di A meno di $5(N - 1)(M - 1)$ sono diversi da zero.

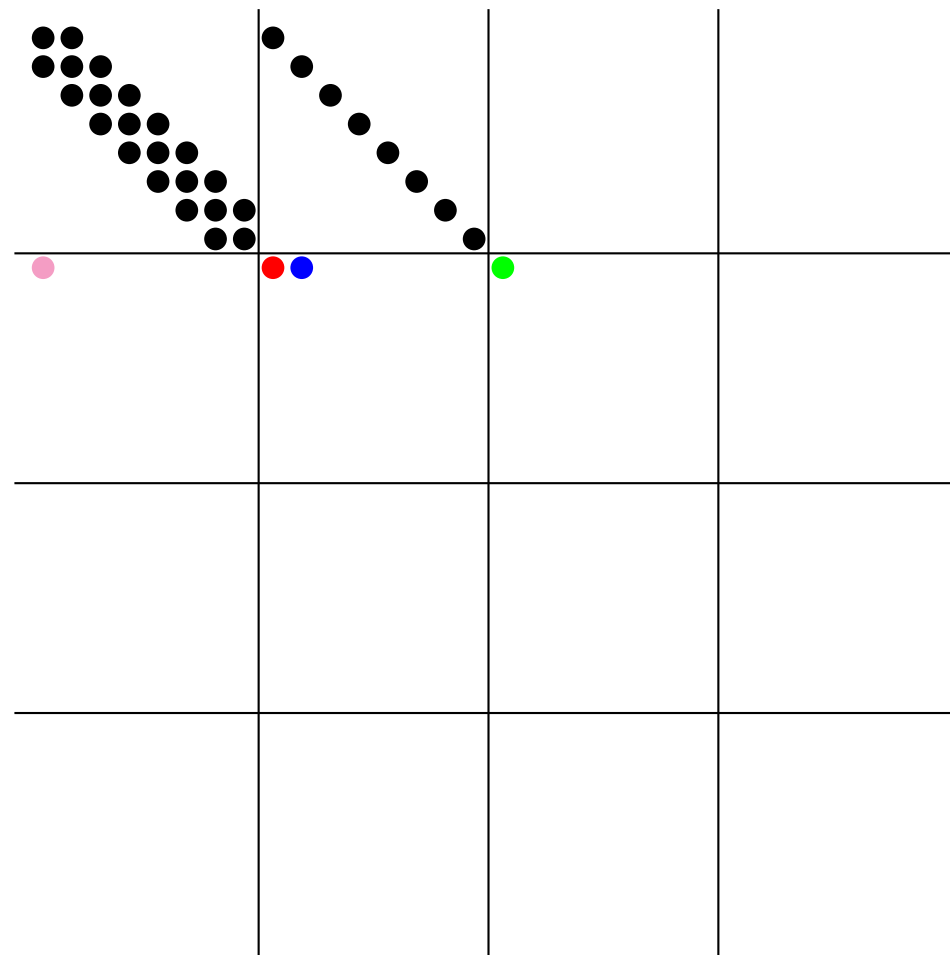
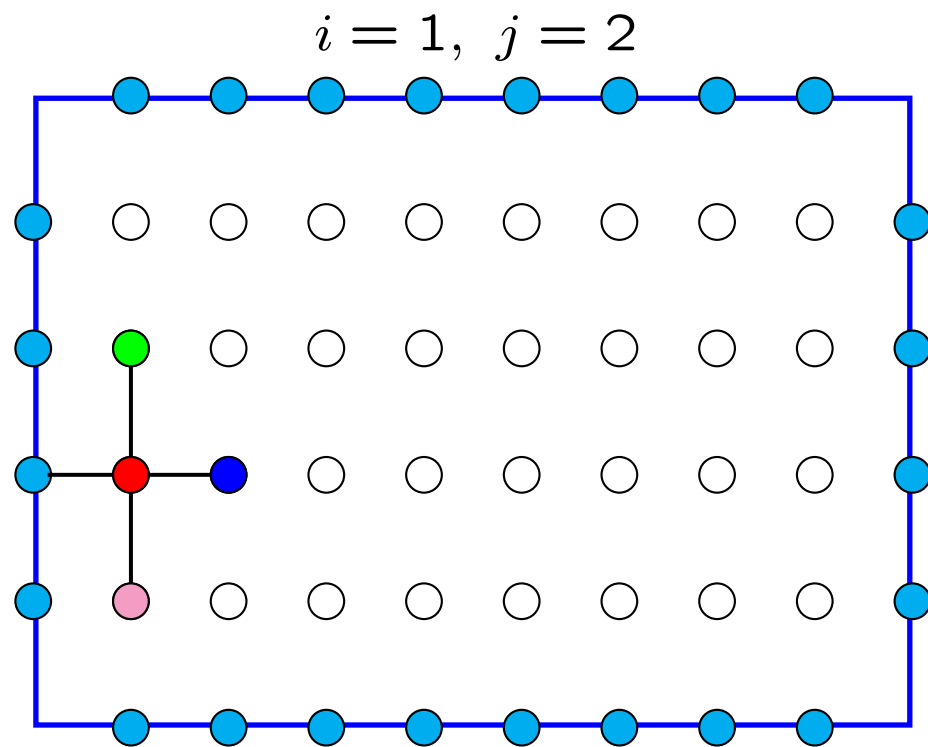
Consideriamo la costruzione di tali matrici nel caso dell'ordinamento Lessicografico e Cuthill-McKee.

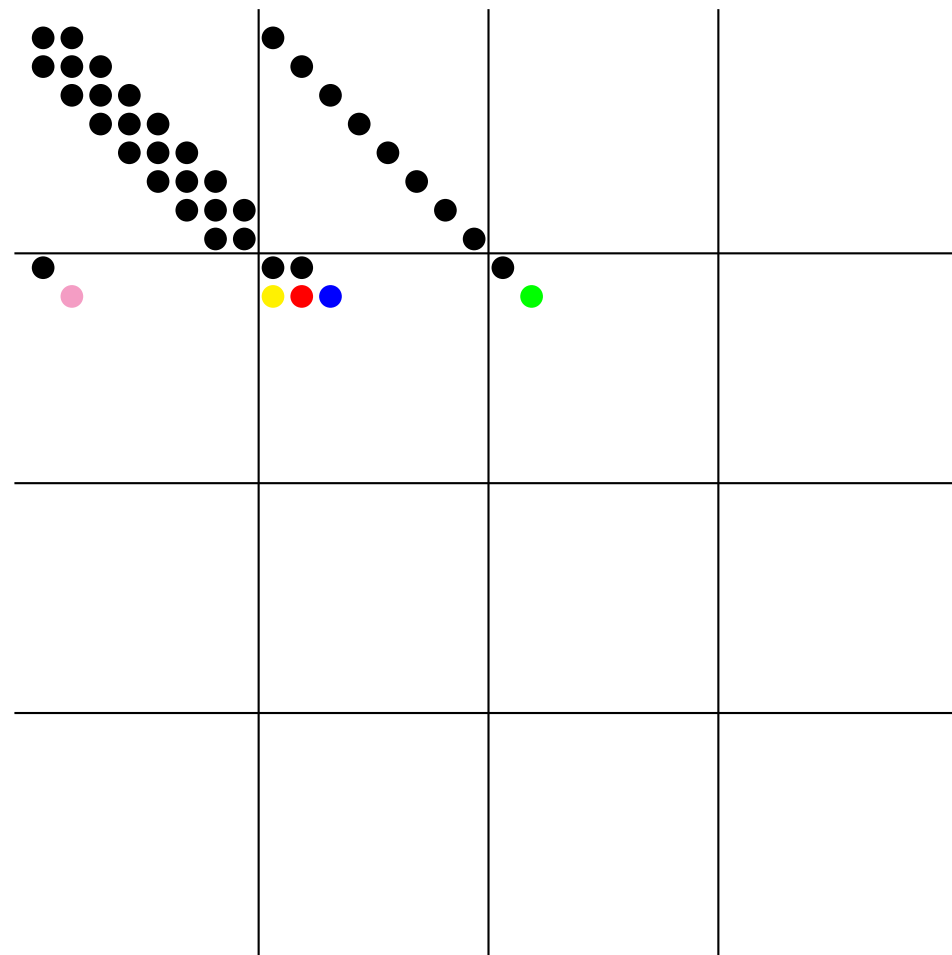
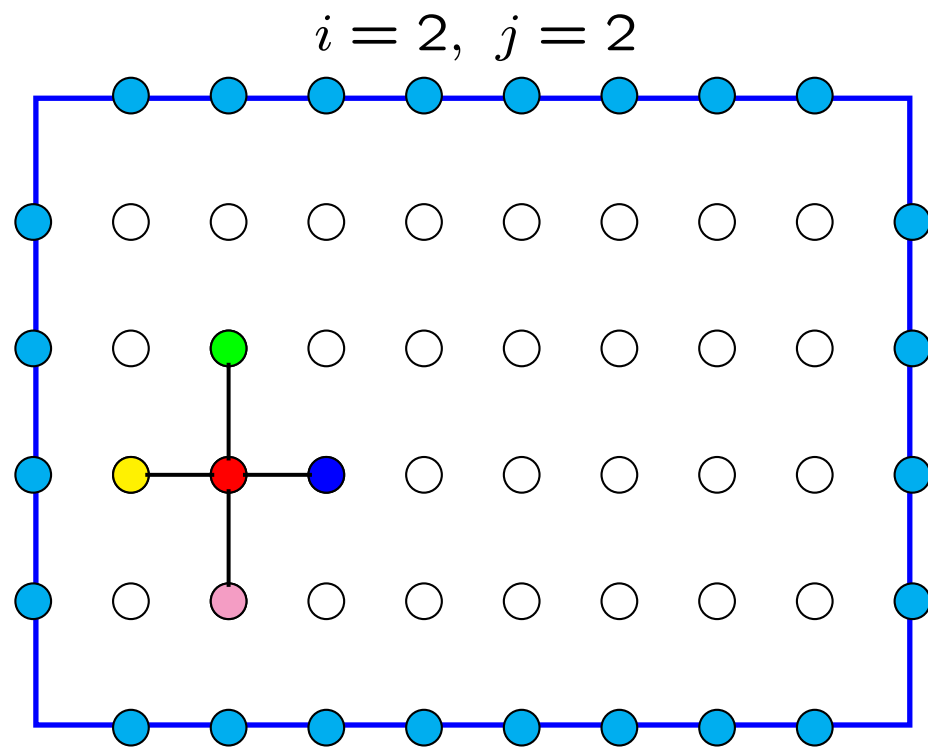


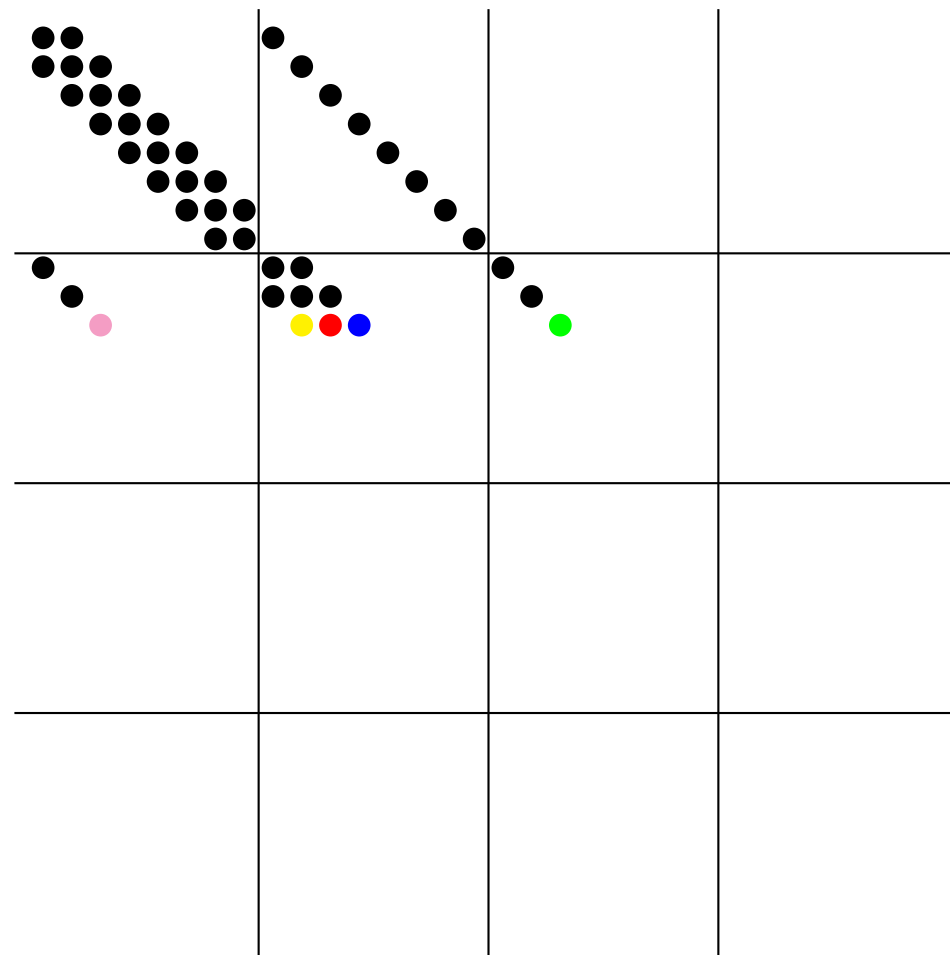
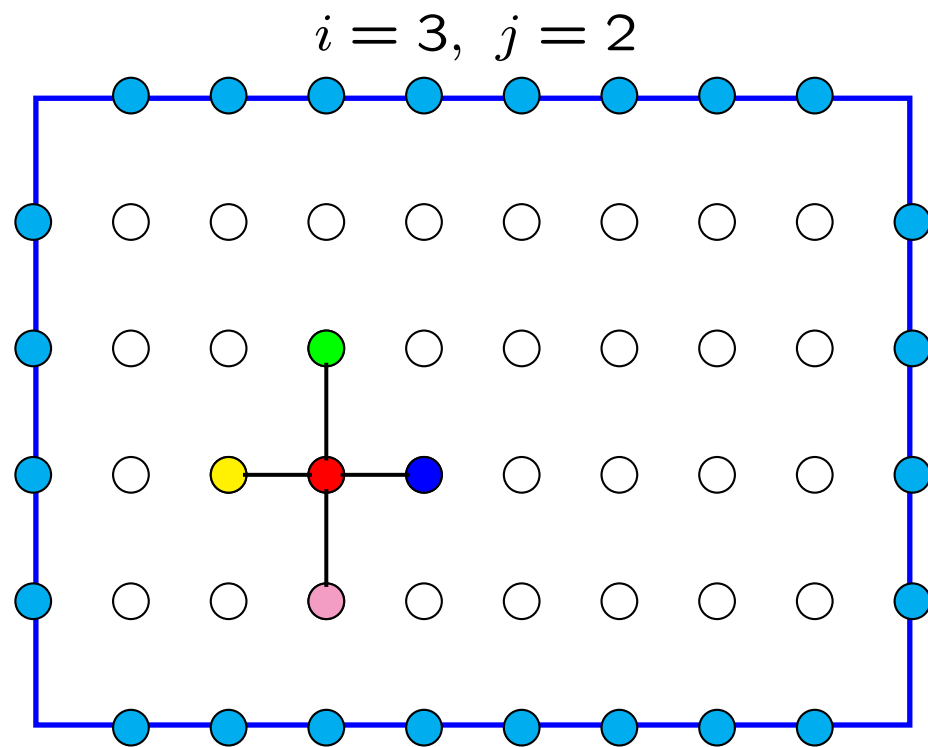


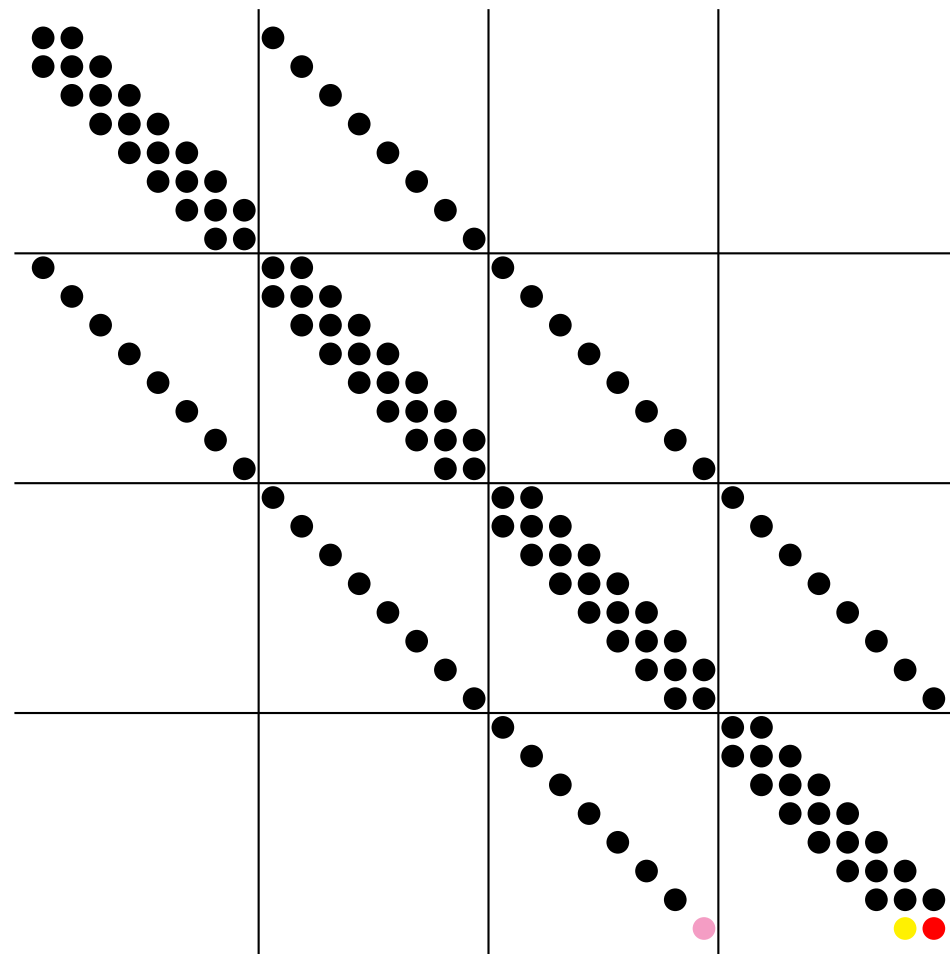
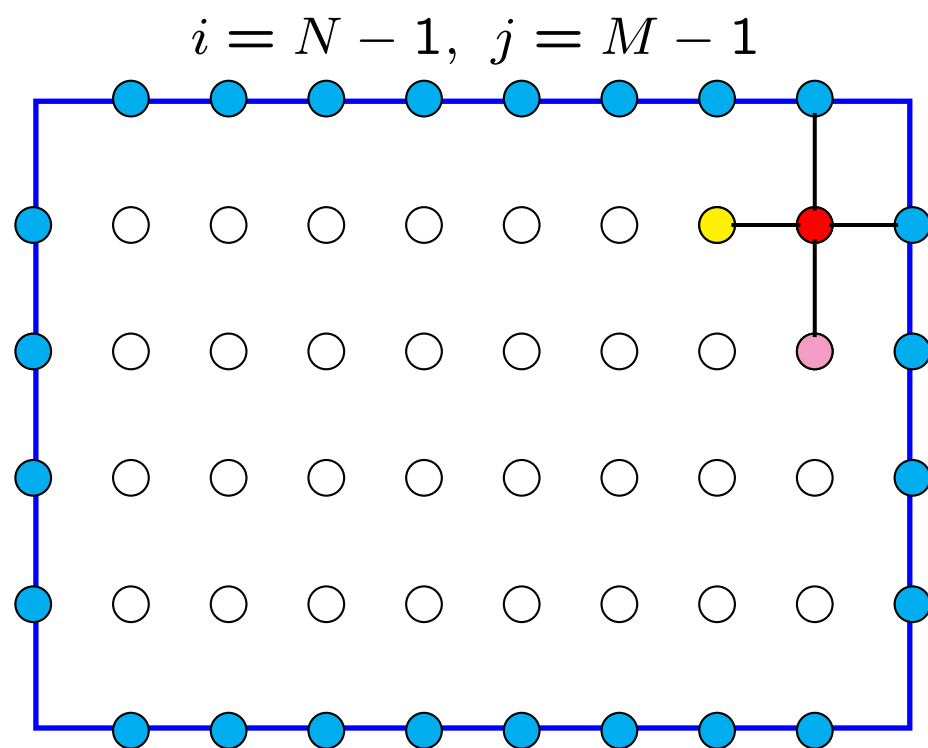


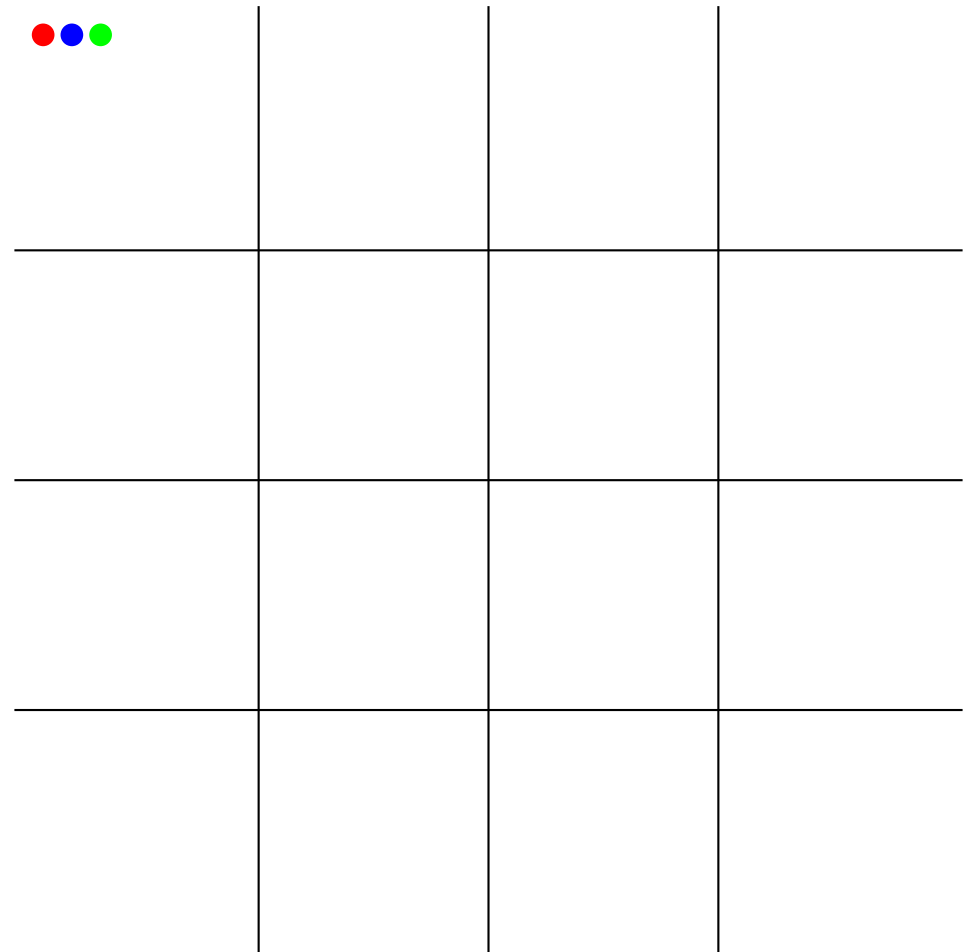
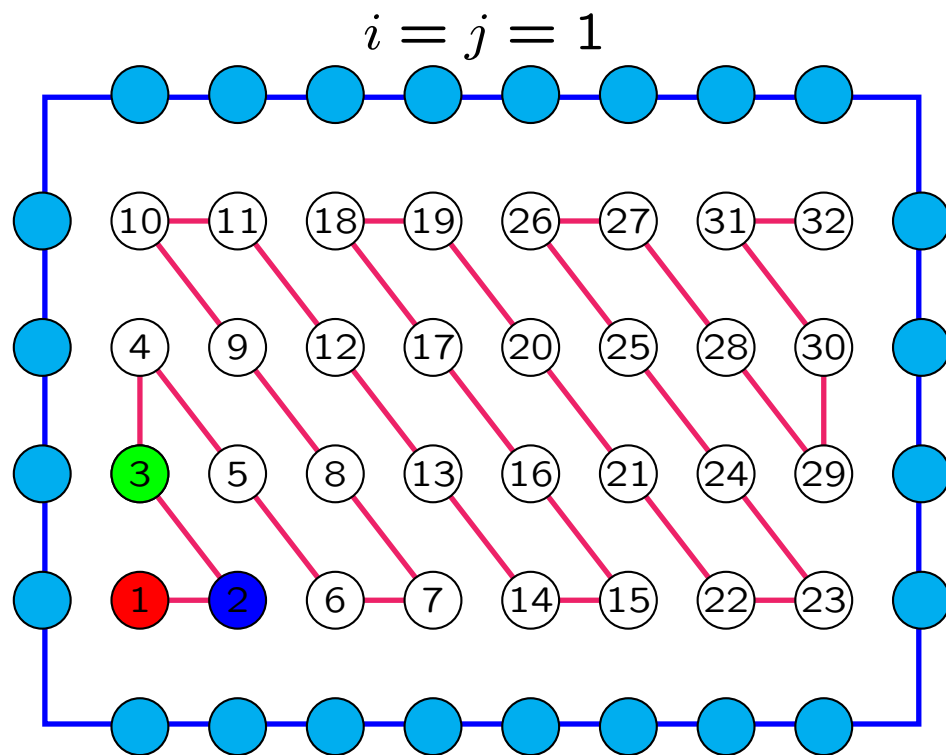


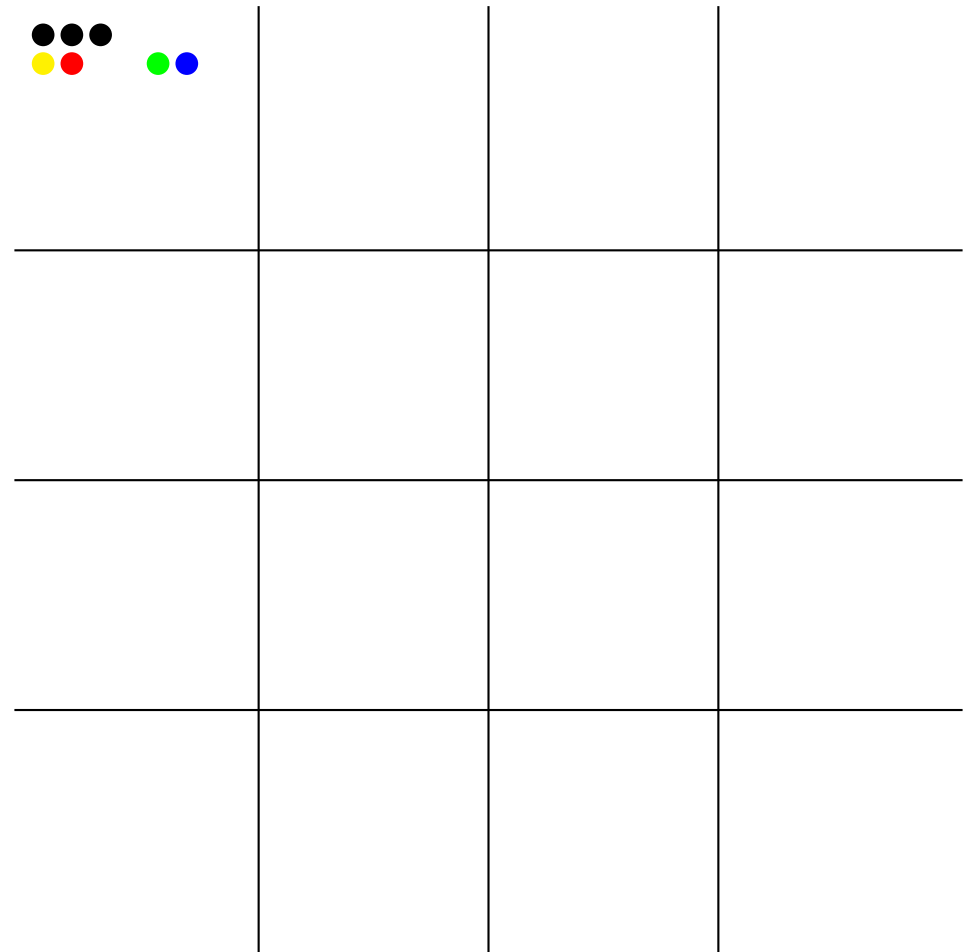
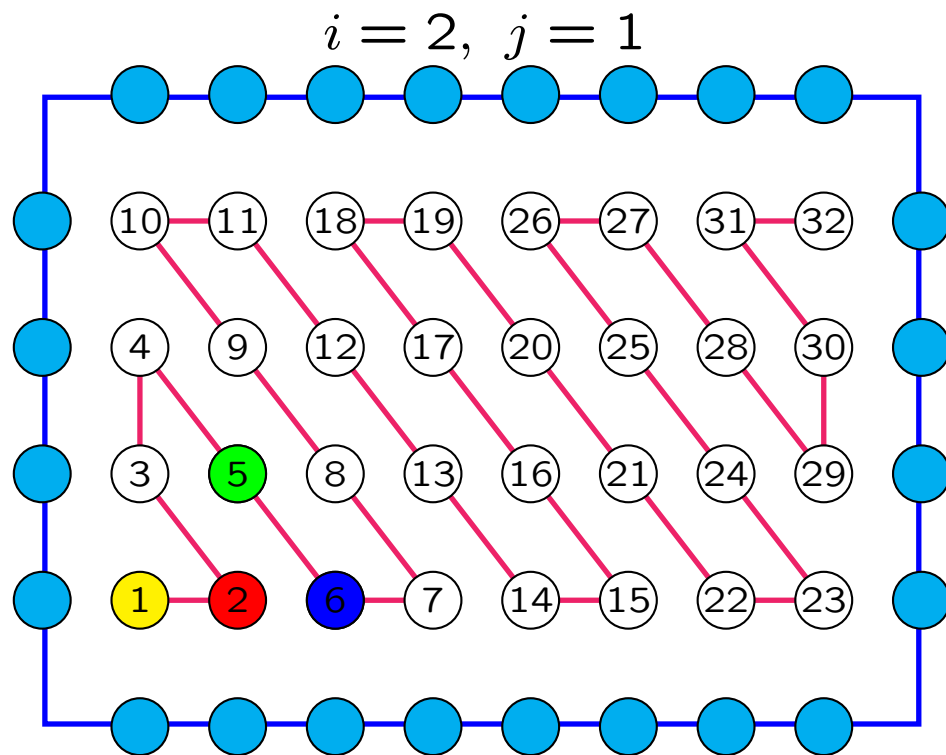


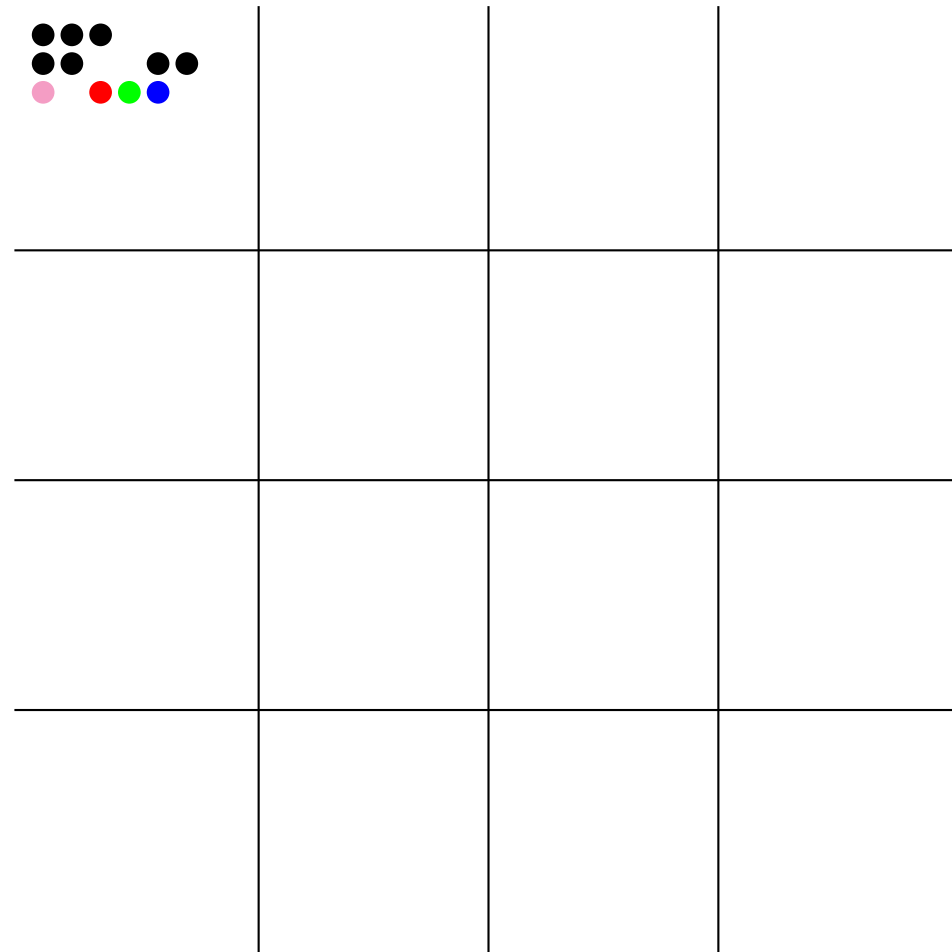
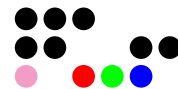
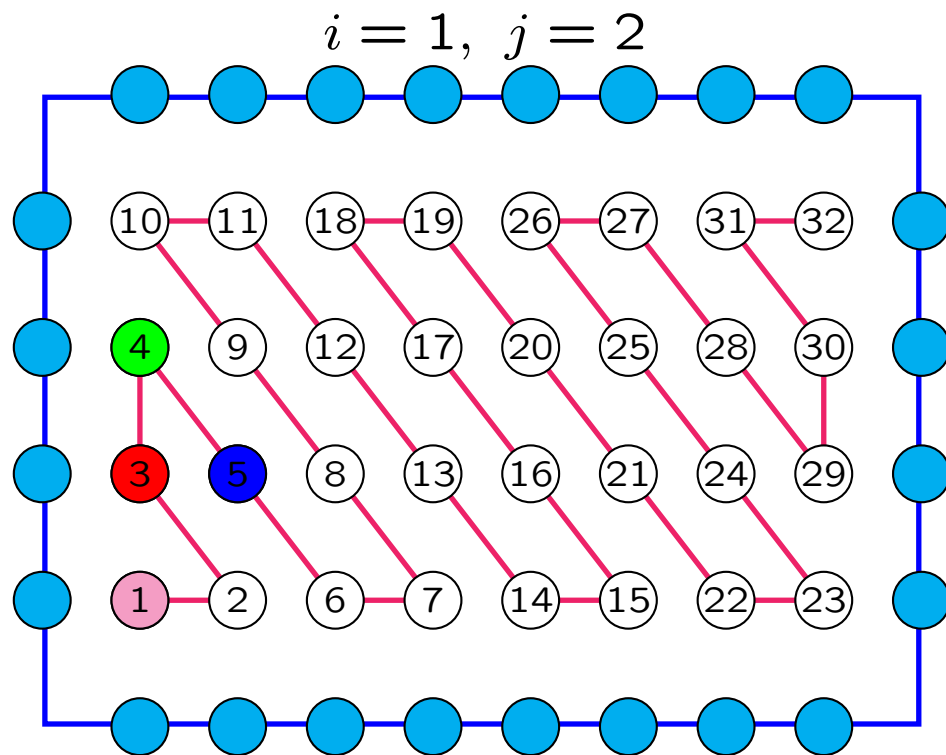


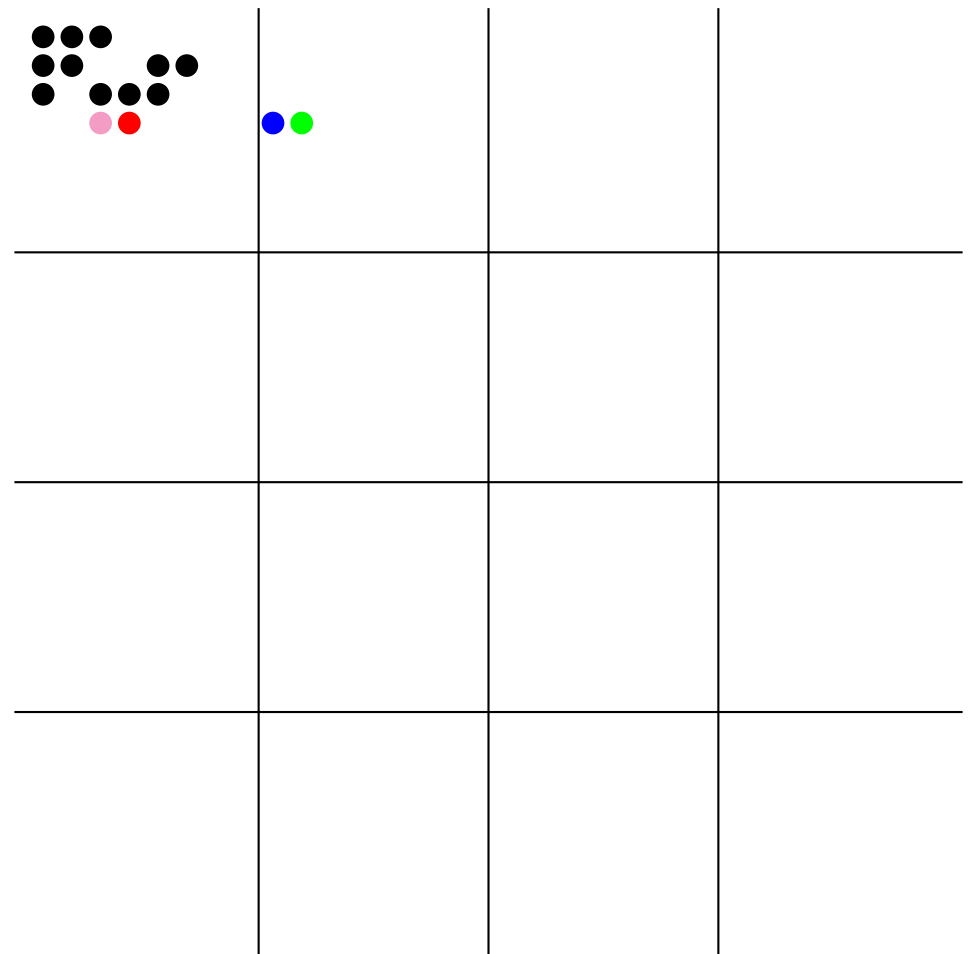
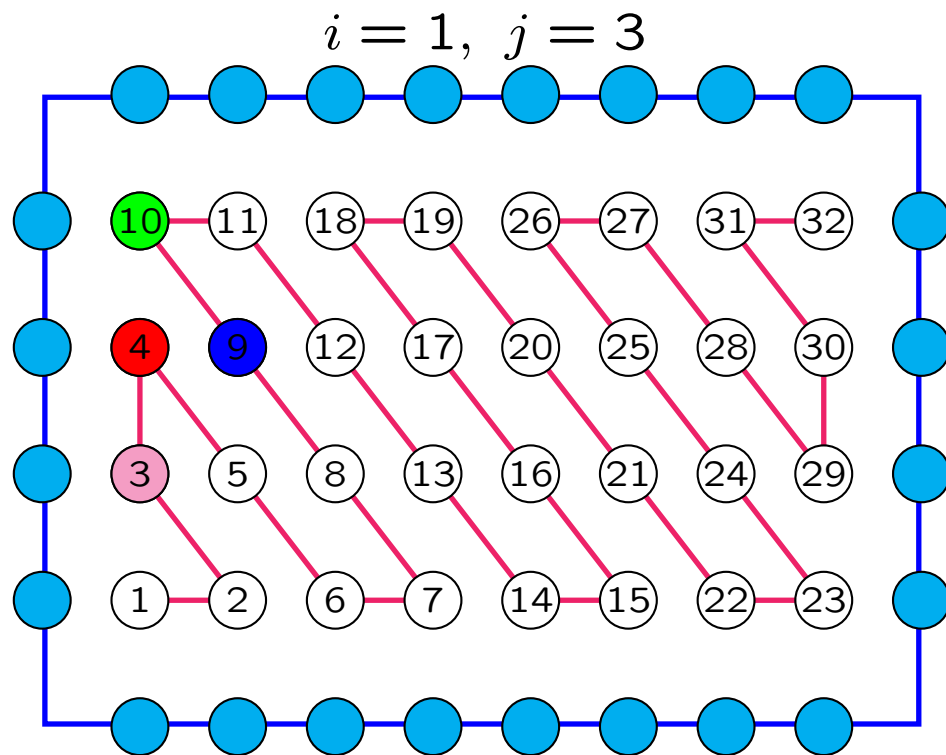


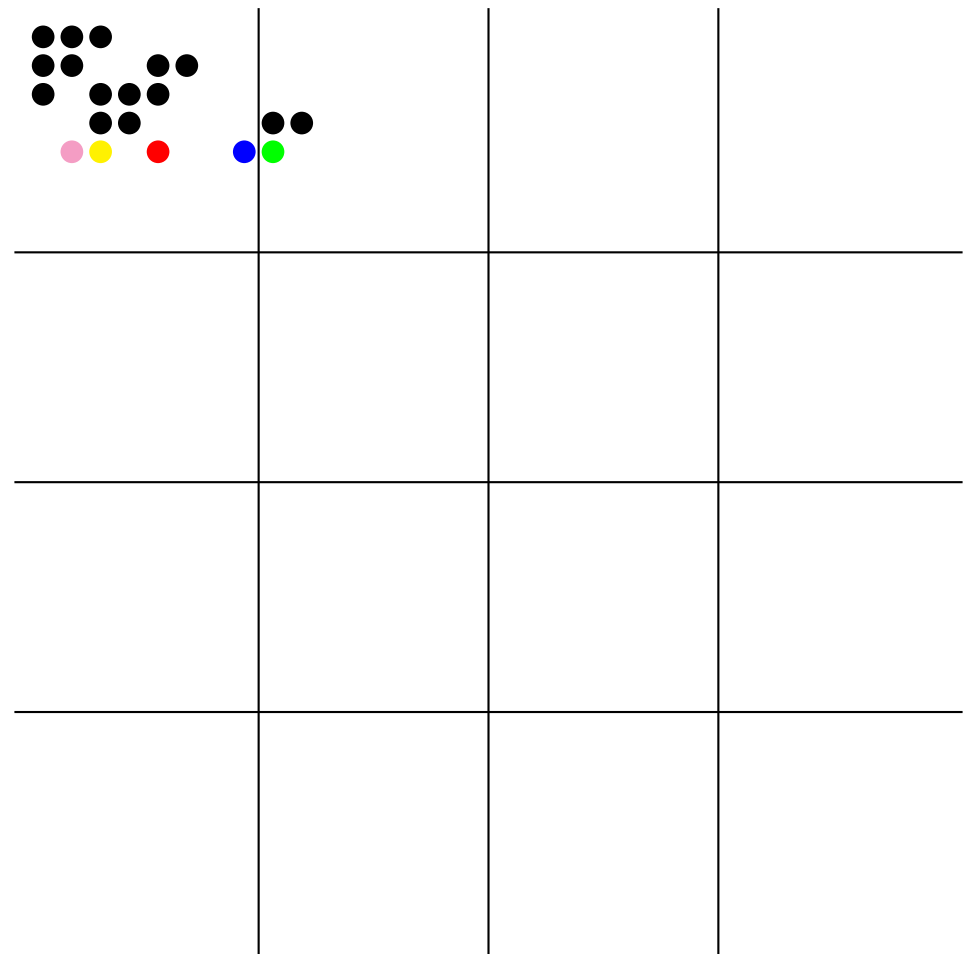
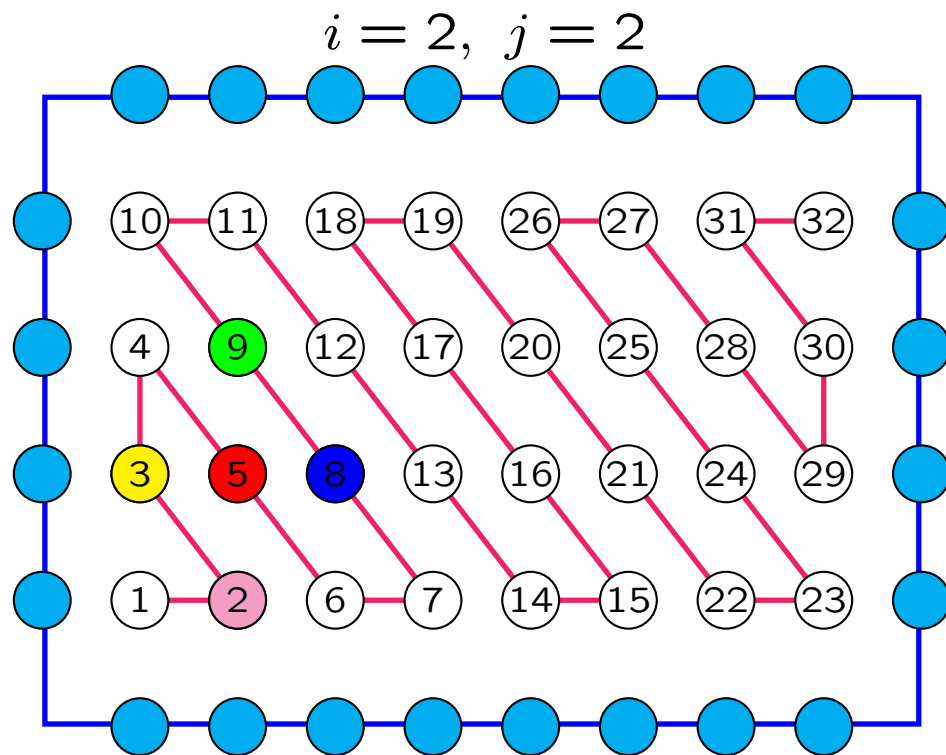


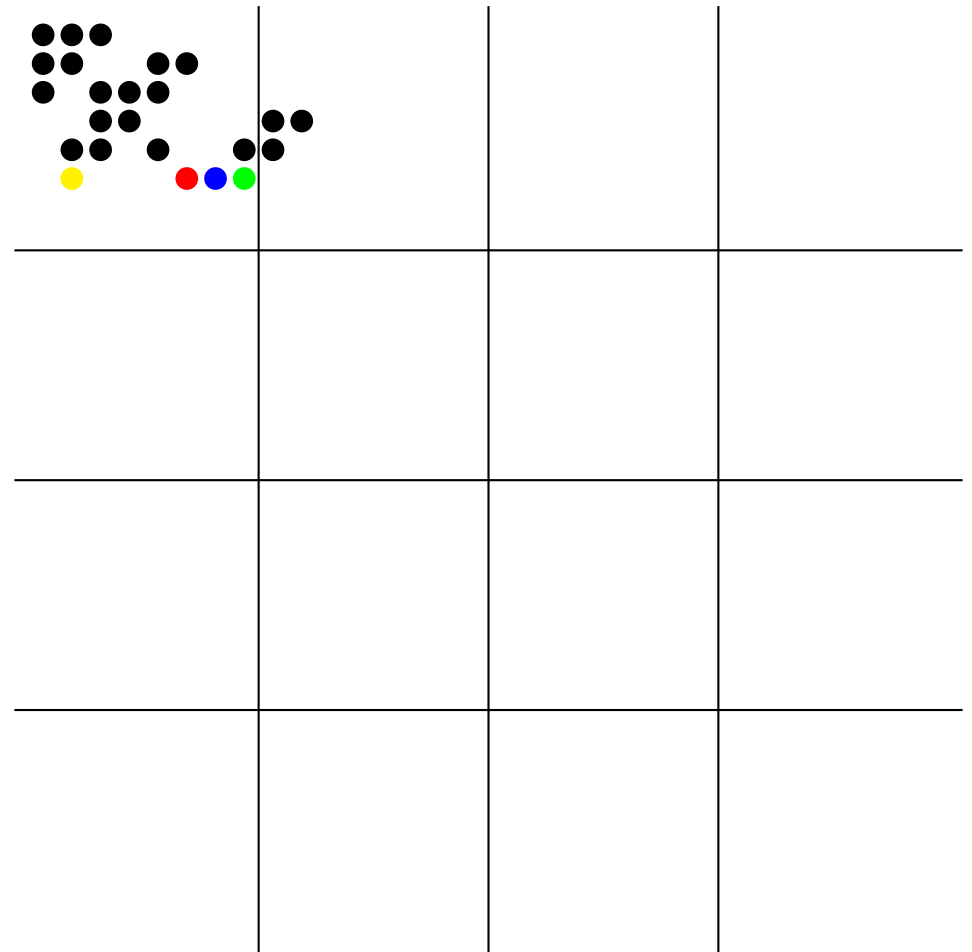
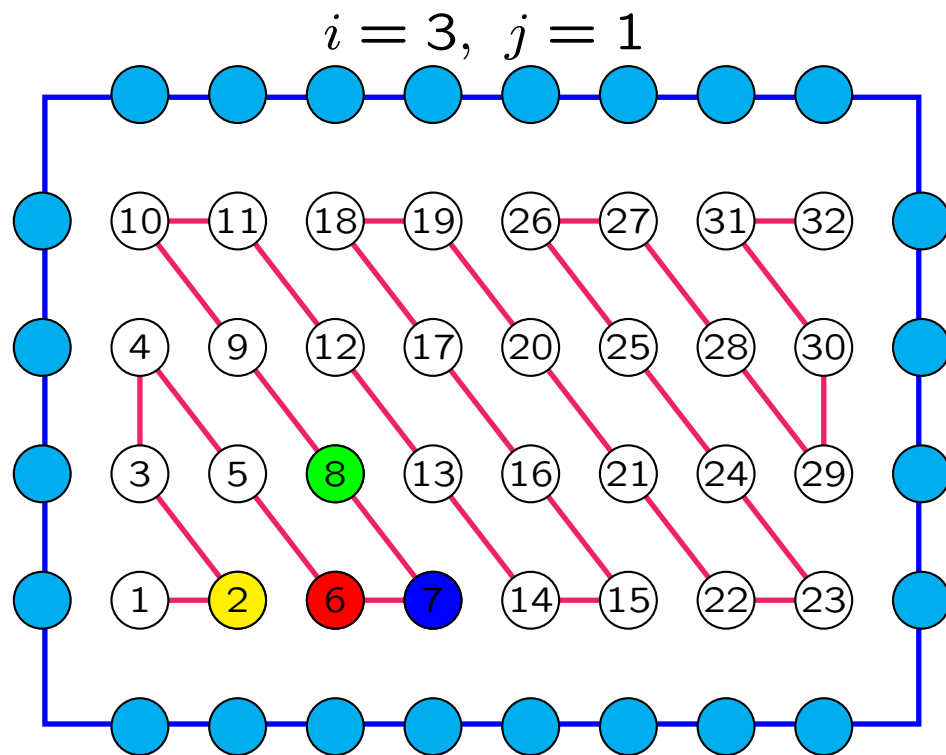


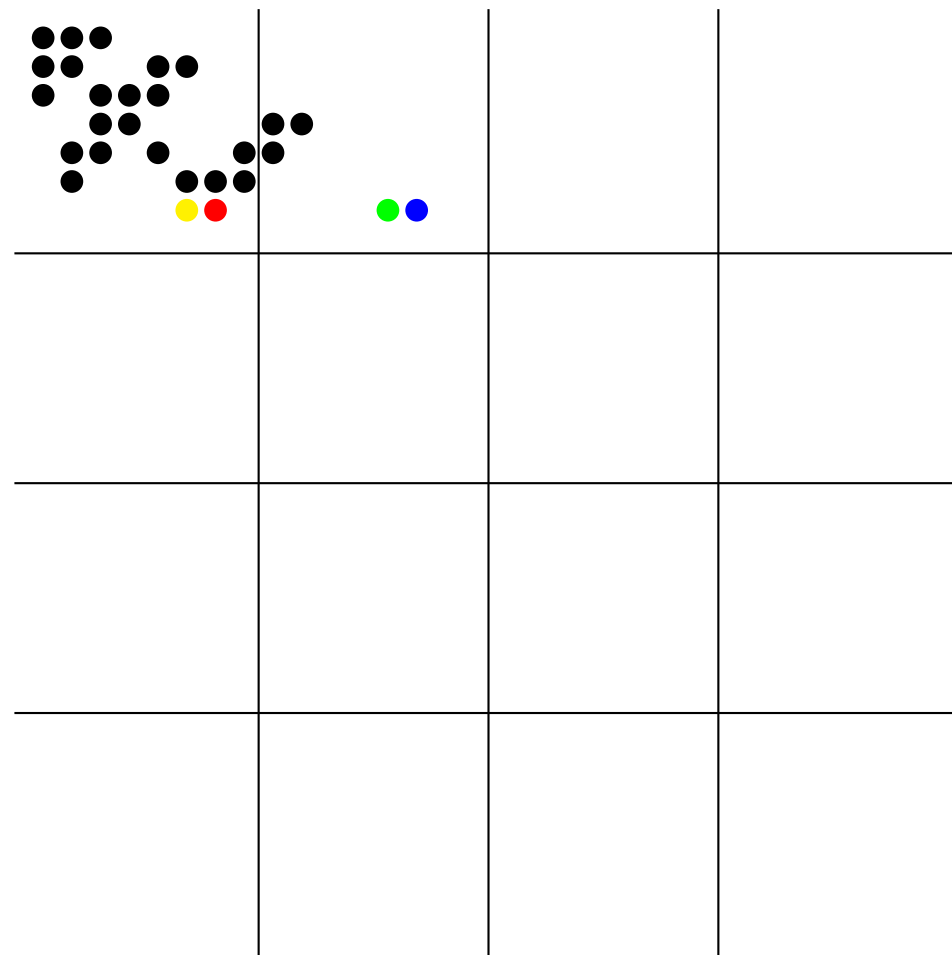
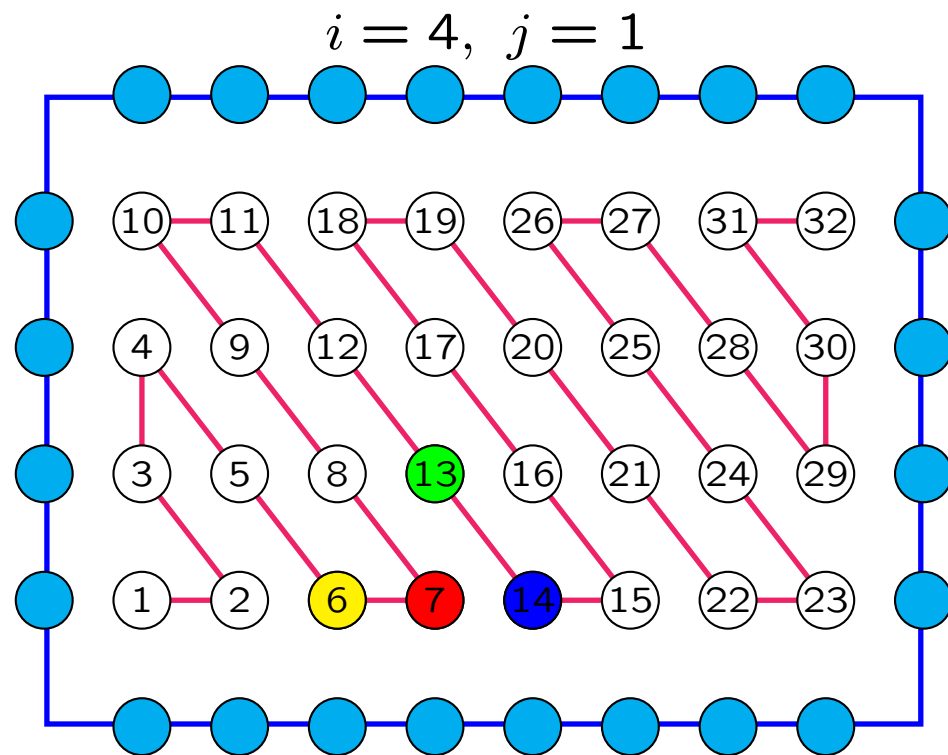


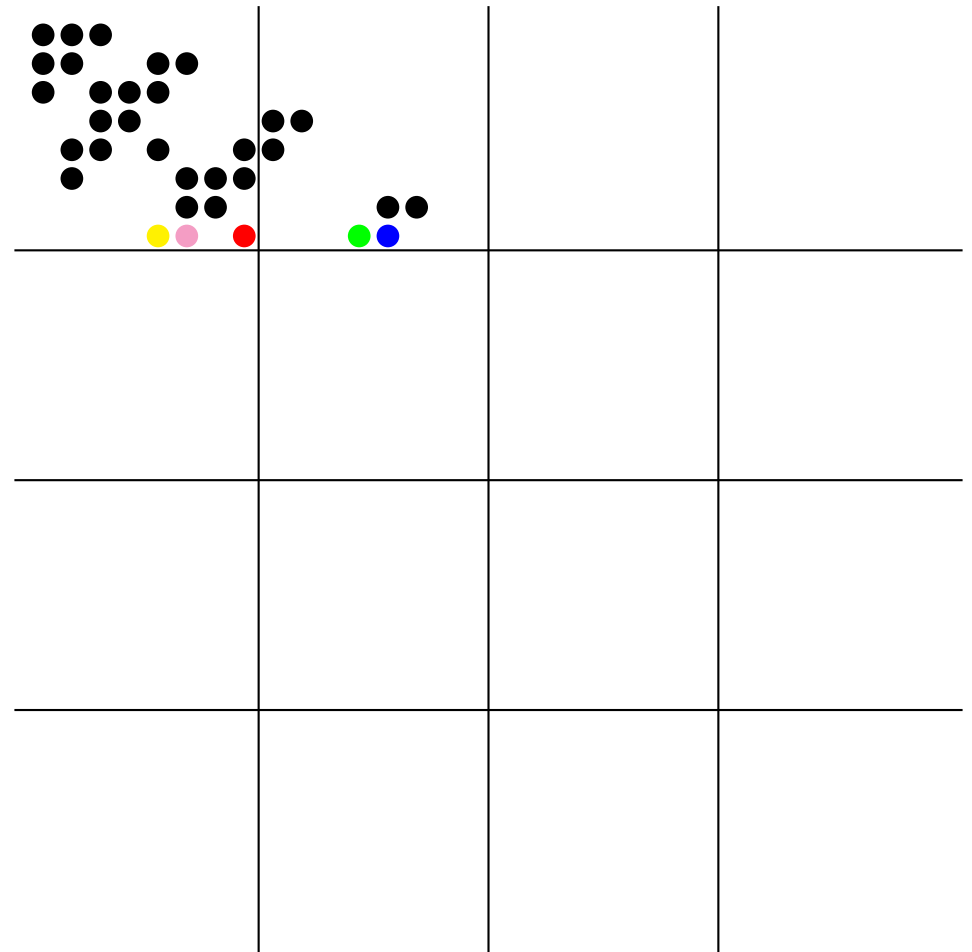
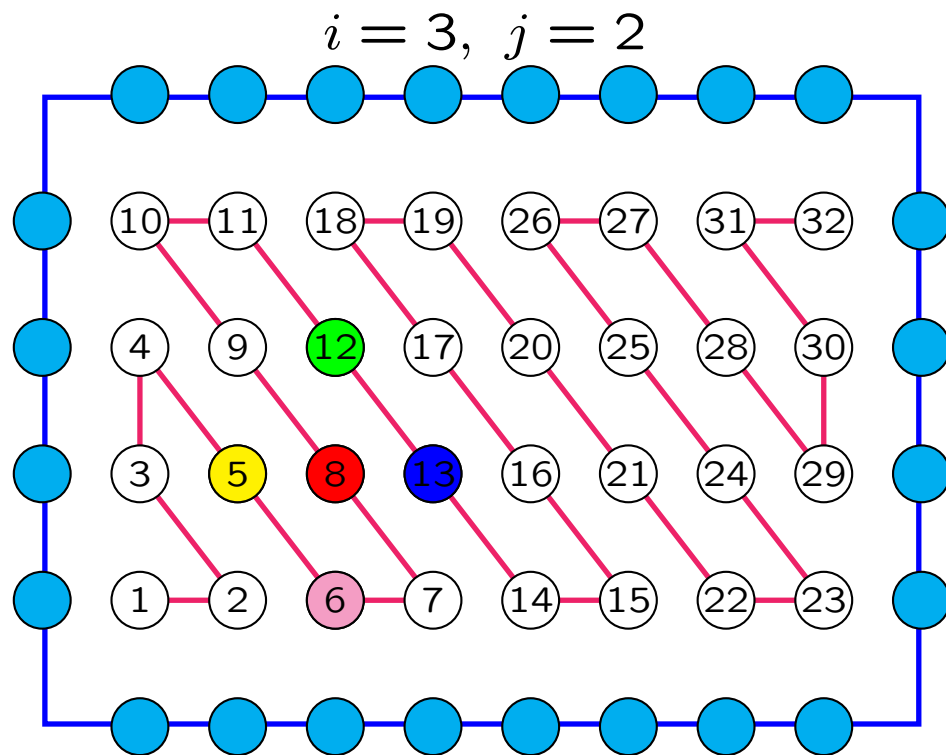


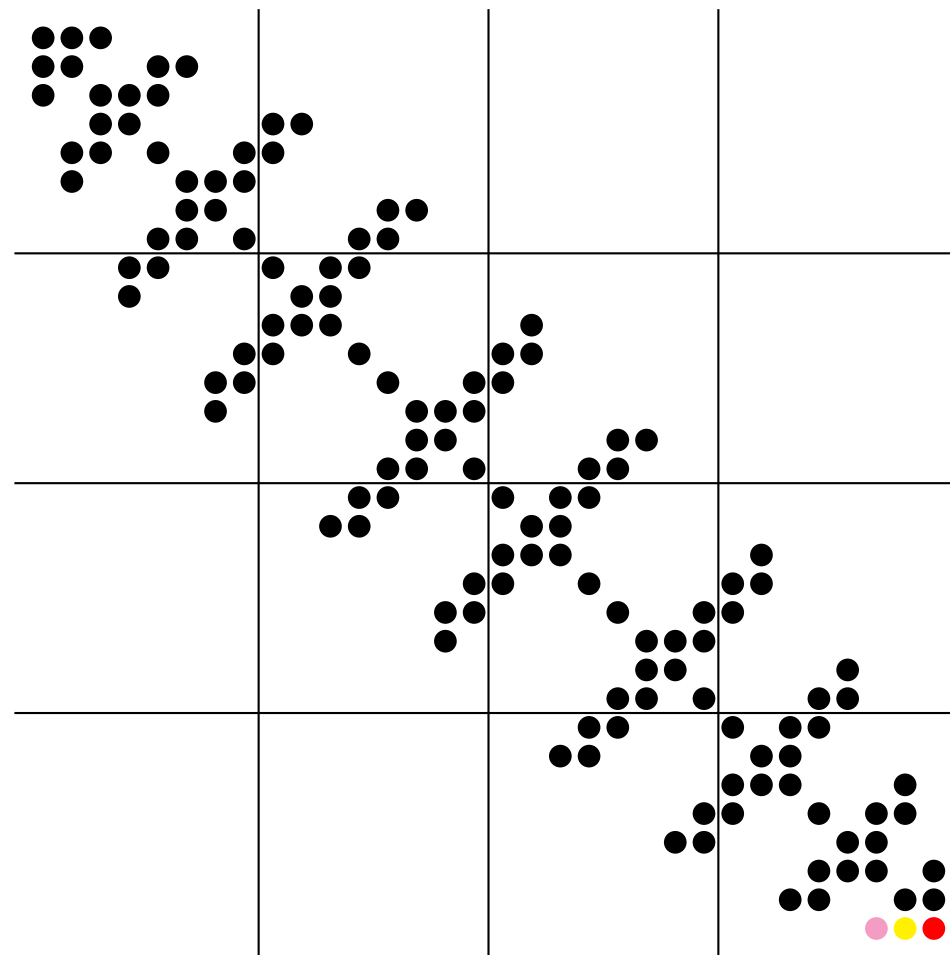
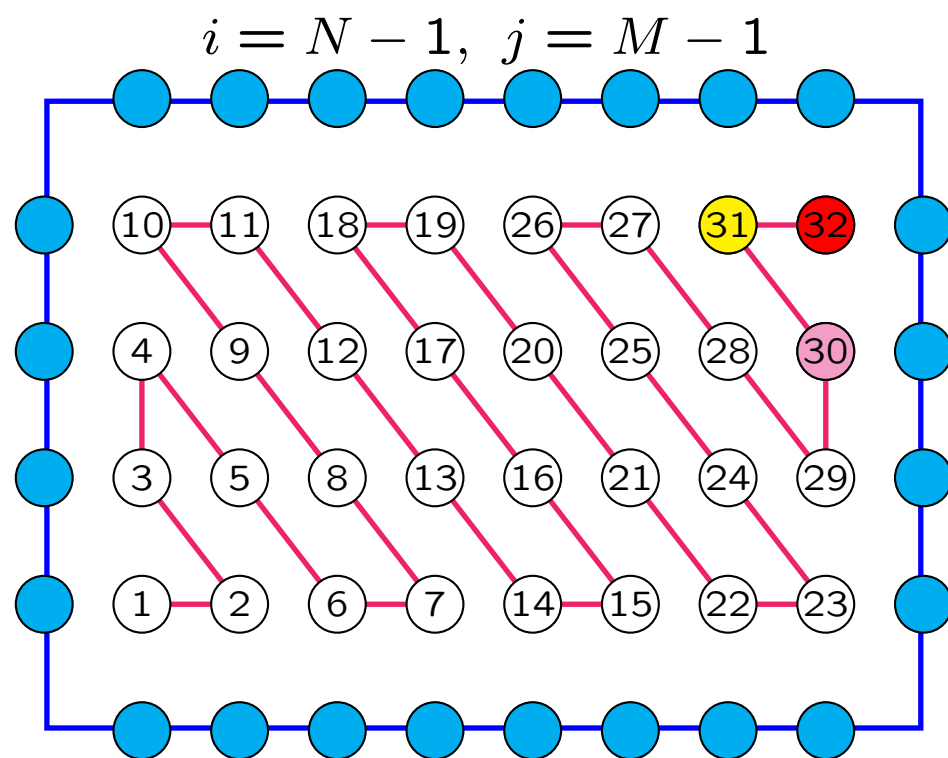












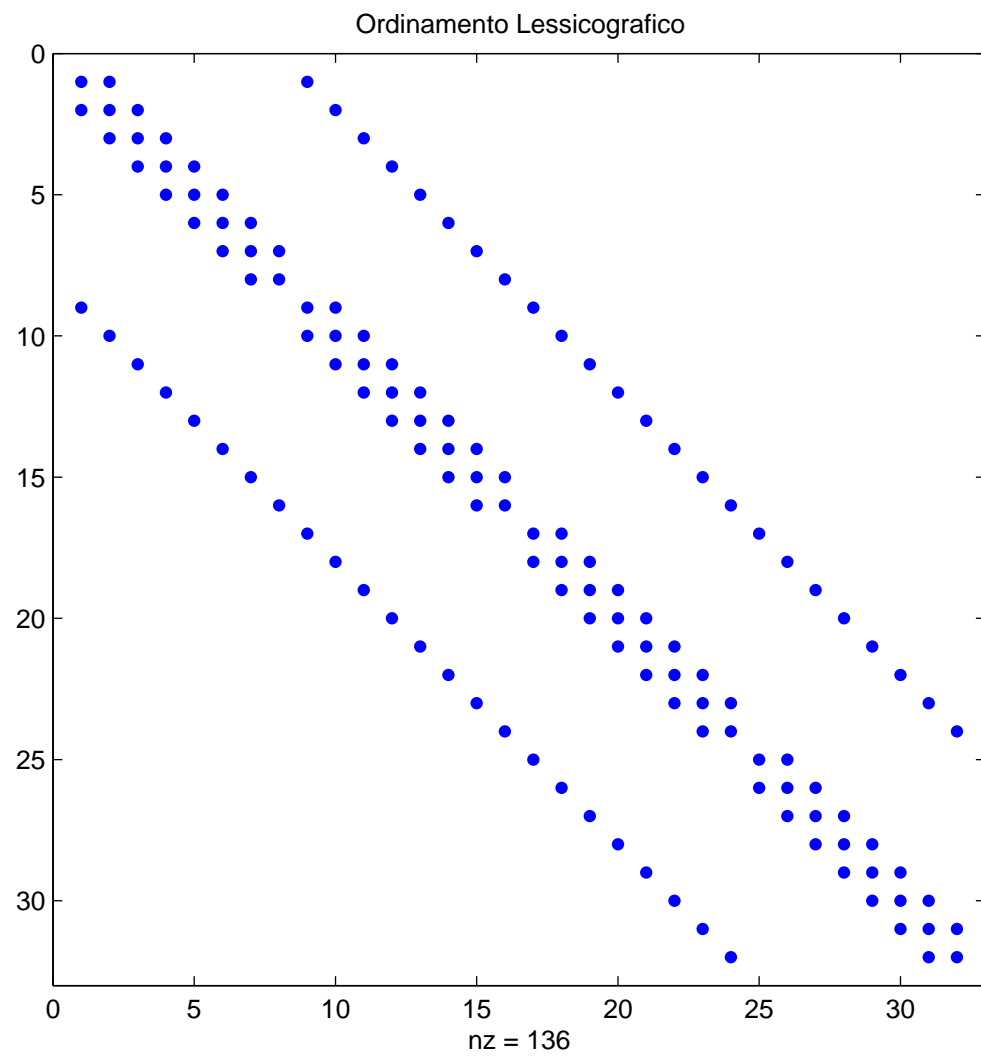
La struttura della matrice che si ottiene applicando il metodo a 5 punti all'equazione di Laplace dipende da:

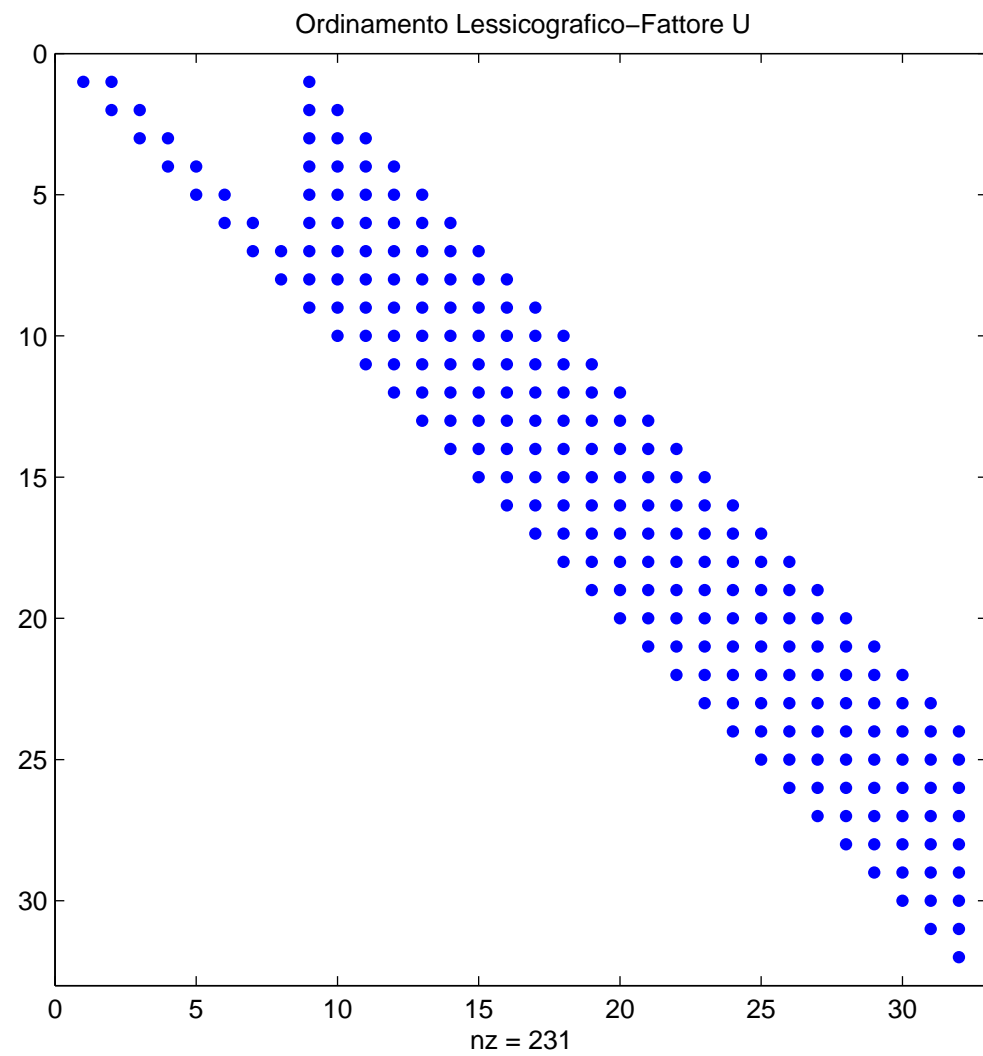
- La forma del dominio
- Il tipo di ordinamento utilizzato.

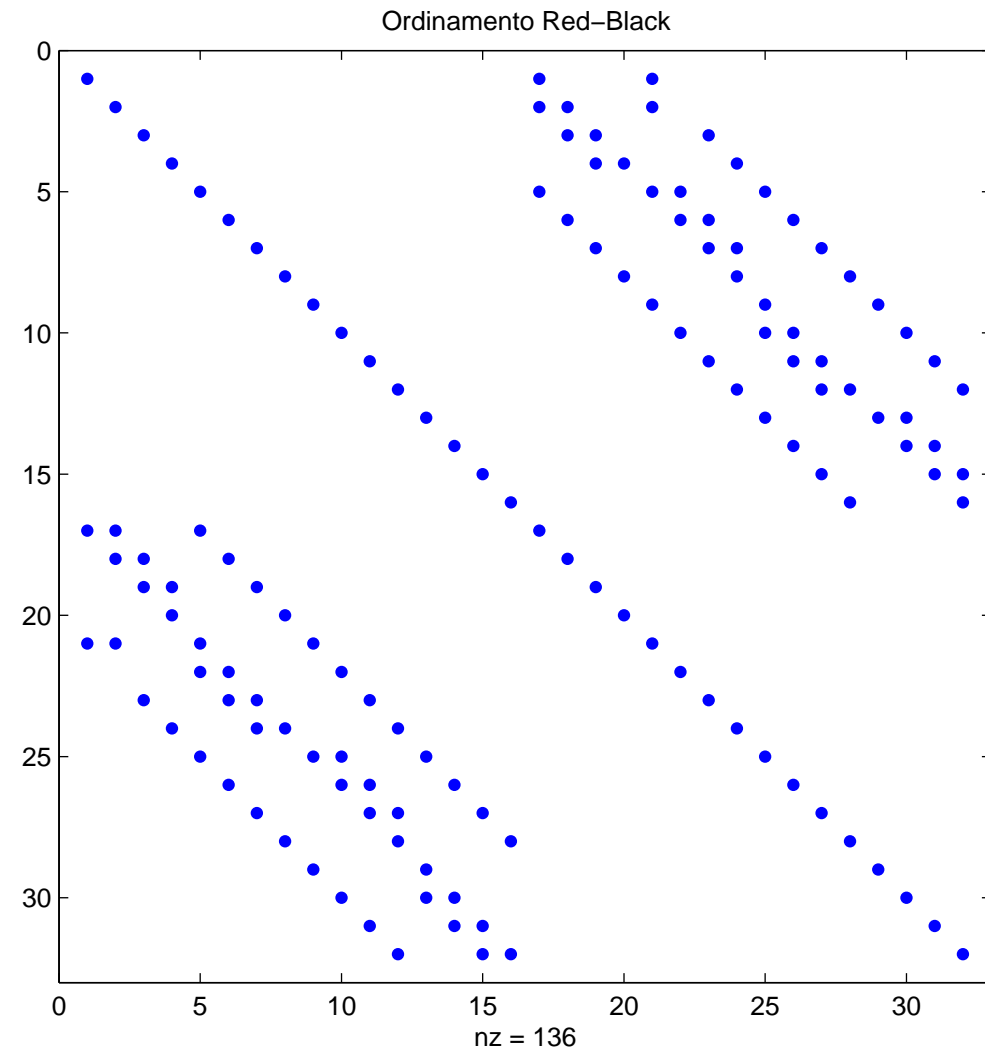
La struttura della matrice influisce anche sull'efficienza del metodo che si deve utilizzare per risolvere il sistema lineare.

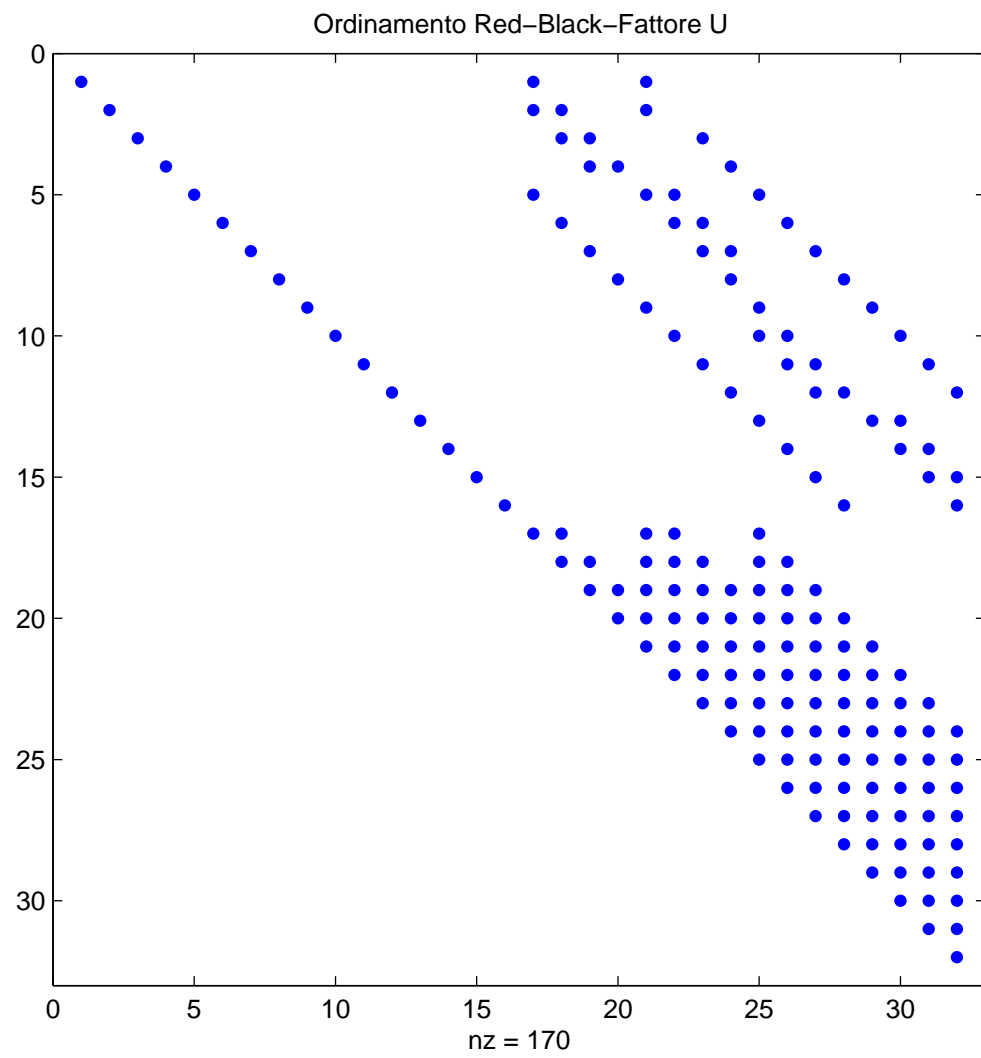
Infatti la matrice A ha dimensioni molto elevate ma il numero di elementi diversi da zero è piuttosto basso.

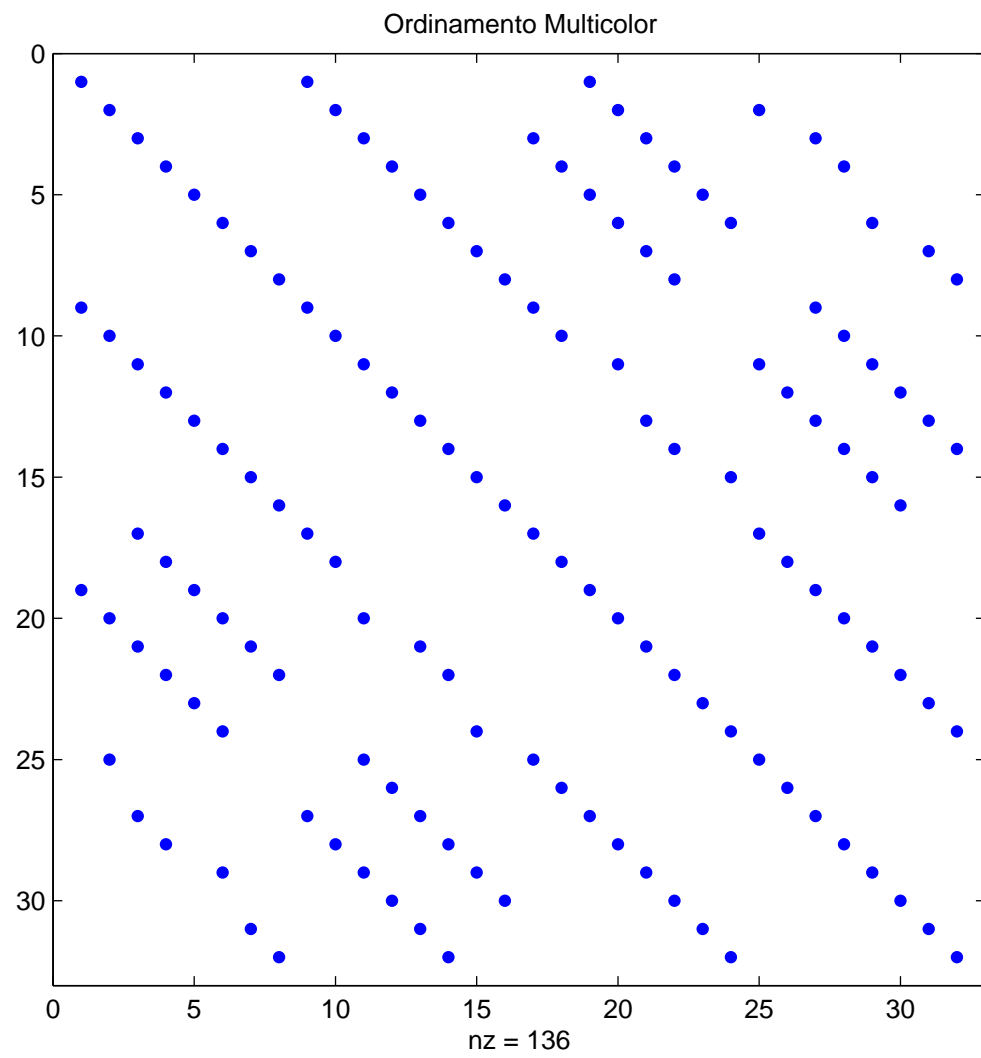
Se si utilizza un algoritmo di fattorizzazione per risolvere il sistema (Fattorizzazione LU , di Choleski) si sarebbe auspicabile che anche i fattori abbiano un numero di elementi diversi da zero che sia il più basso possibile.

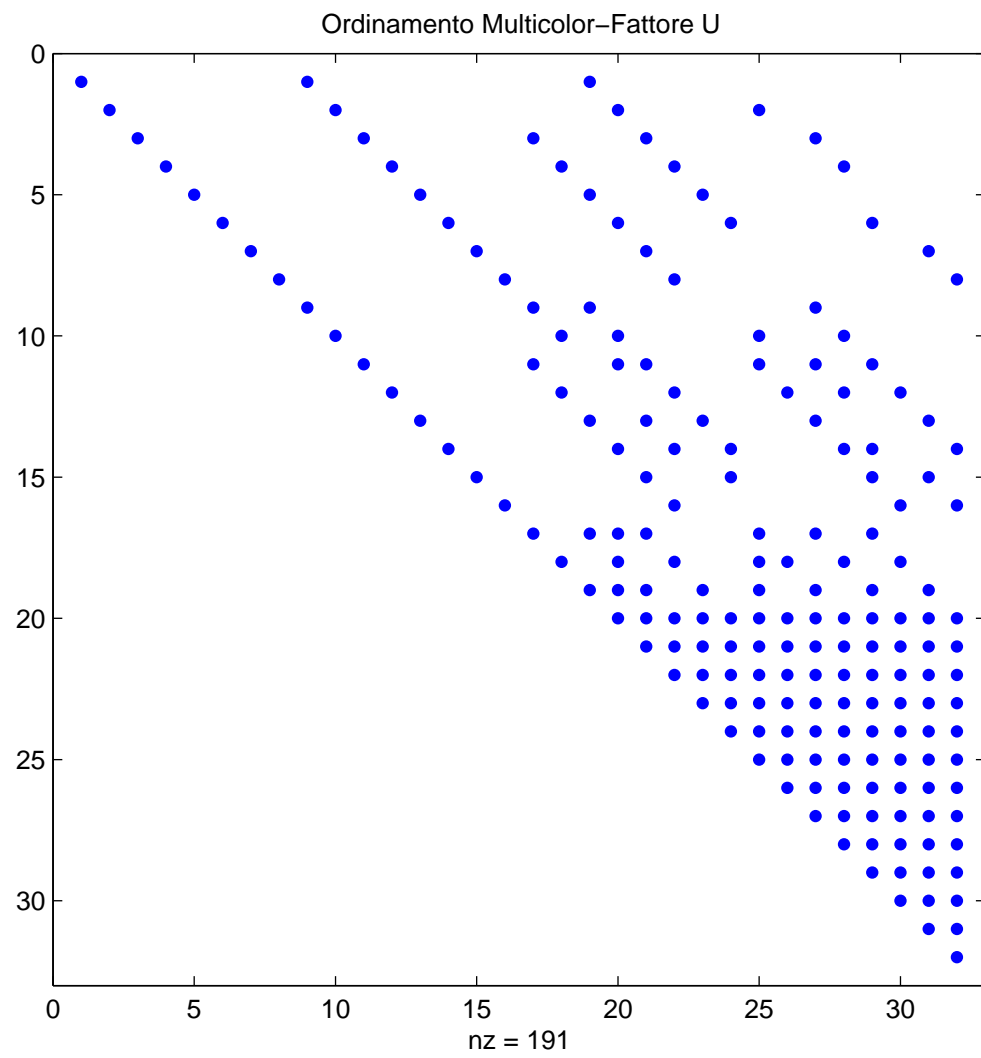


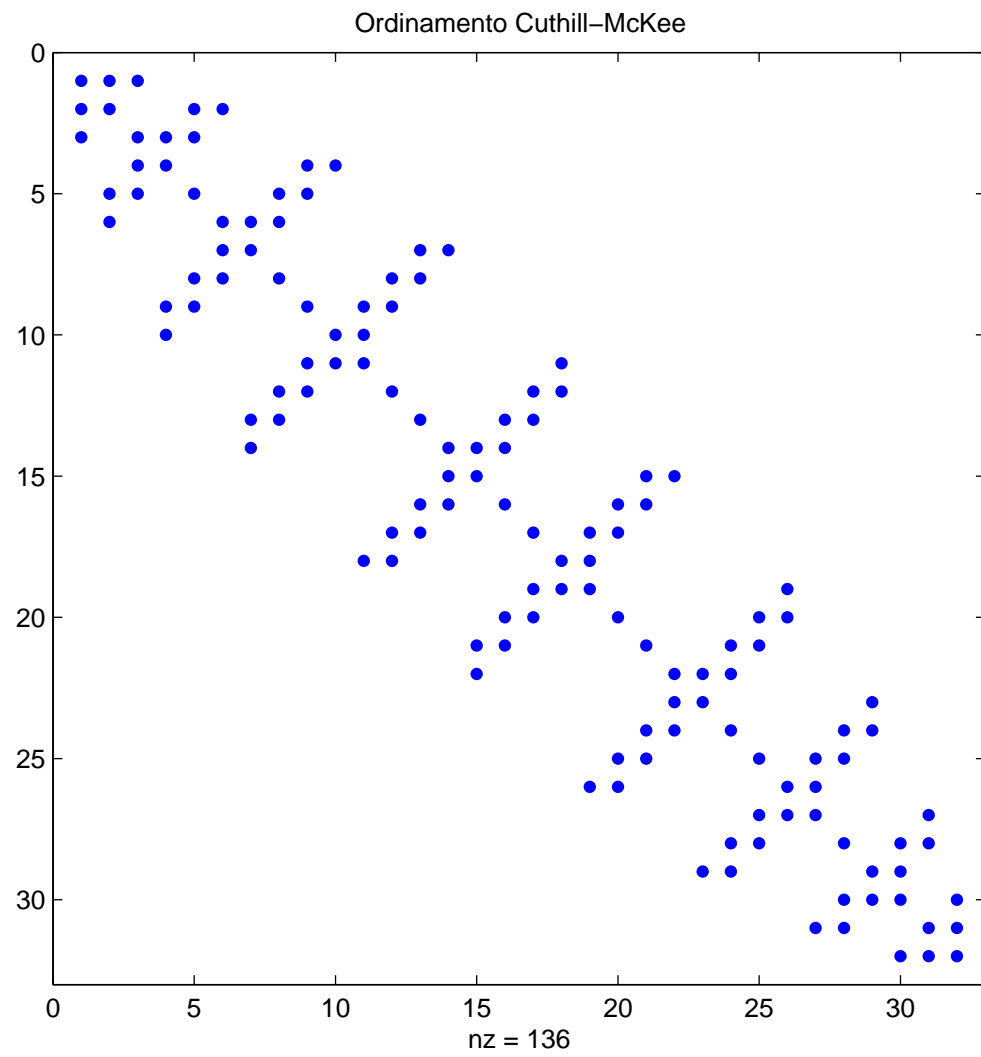


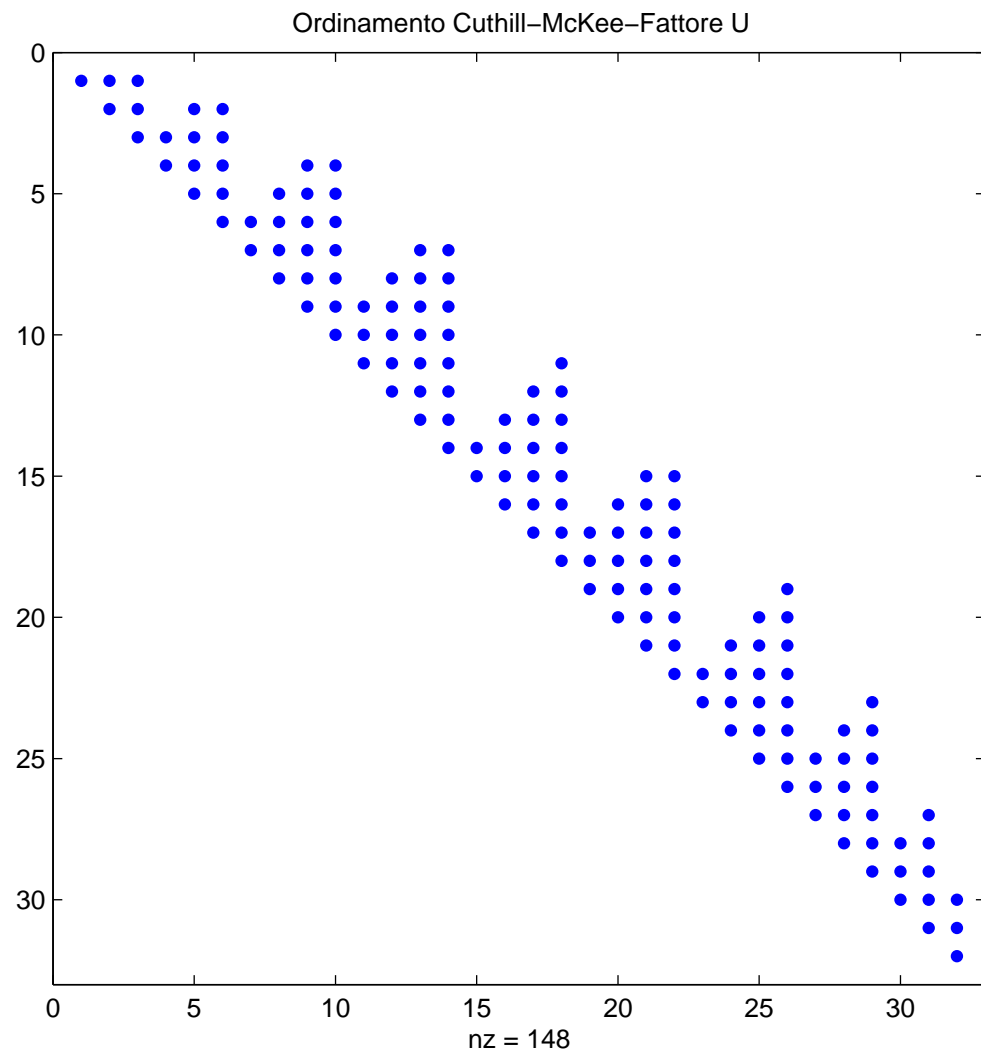












Il metodo a 5 punti per l'equazione di Laplace su un rettangolo

- Il dominio continuo viene discretizzato e le derivate parziali seconde sono approssimate negli $(N - 1)(M - 1)$ punti del dominio discreto;
- Applicando la tecnica lessicografica di ordinamento delle incognite si deve risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

dove la matrice A ha la seguente struttura tridiagonale a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} T & J & & & \\ J & T & J & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & J & T & J \\ & & & J & T \end{pmatrix}$$

dove $J = h^2 I_{N-1}$, ed I_{N-1} è la matrice identità di ordine $N - 1$, e T è la seguente matrice tridiagonale di dimensione $N - 1$:

$$T = \begin{pmatrix} -2(h^2 + k^2) & k^2 & & & & \\ k^2 & -2(h^2 + k^2) & k^2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & k^2 & -2(h^2 + k^2) & k^2 & \\ & & & k^2 & -2(h^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

- Il sistema da risolvere è di grandi dimensioni e ha struttura sparsa, cioè solo pochi elementi sono diversi da zero.
- Se il dominio è quadrato oppure si può scegliere $h = k$ in questo caso l'espressione del metodo a 5 punti si semplifica ulteriormente:

$$u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0$$

e la struttura della matrice A è indipendente da h e k :

$$A = \begin{pmatrix} T & I_{N-1} & & & \\ I_{N-1} & T & I_{N-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I_{N-1} & T & I_{N-1} \\ & & & I_{N-1} & T \end{pmatrix}$$

mentre T è la seguente matrice tridiagonale di dimensione $N - 1$:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Per risolvere questo tipo di sistemi sono necessari metodi diversi da quelli di tipo diretto (occorrerebbe gestire una quantità di memoria molto elevata).

Metodi di ordine elevato per equazioni ellittiche

- Consideriamo per semplicità l'equazione ellittica di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y)$$

definita sul quadrato $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

- Il metodo a 5 punti ovviamente può essere applicato anche all'equazione di Poisson. La matrice dei coefficienti è la stessa che abbiamo visto nel caso dell'equazione di Laplace, cambia il termine noto del sistema lineare che è uguale ai valori della funzione $g(x, y)$ calcolata nei punti del dominio discreto.

- Avendo definito l'equazione su un quadrato possiamo scegliere un numero di punti uguale sia per la variabile x che per y (e quindi $h = k$), ottenendo una matrice dei coefficienti indipendente dal valore del passo di discretizzazione.
- Il metodo a 5 punti ha ordine 2 perchè l'errore di discretizzazione dipende da h^2 .
- Si possono ottenere metodi di ordine superiore cercando di approssimare in modo più accurato le derivate parziali seconde.

Un'approssimazione di ordine 4 per le derivate seconde

Se $f(x)$ è una funzione di classe $C^{vi}([a, b])$ allora la seguente formula approssima la derivata seconda nel punto x_i :

$$f''(x_i) \simeq \frac{1}{h^2} \left[-\frac{1}{12}f_{i-2} + \frac{4}{3}f_{i-1} - \frac{5}{2}f_i + \frac{4}{3}f_{i+1} - \frac{1}{12}f_{i+2} \right]$$

con un errore

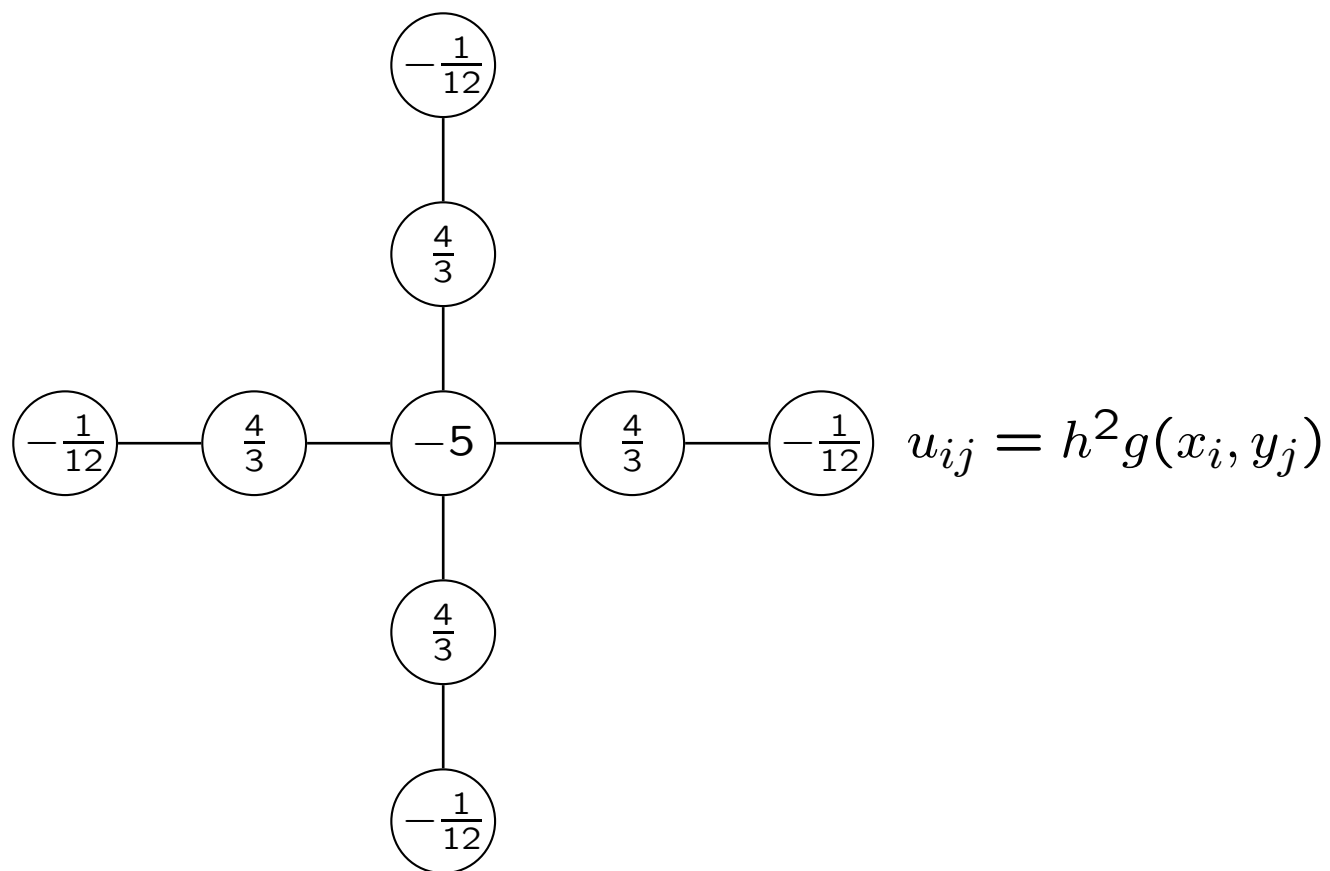
$$E(f''(x_i)) = ch^4 f^{(vi)}(\xi_i), \quad c \in \mathbb{R},$$

e pertanto ha ordine 4.

Utilizzare questa formula per le derivate parziali seconde porta al seguente metodo

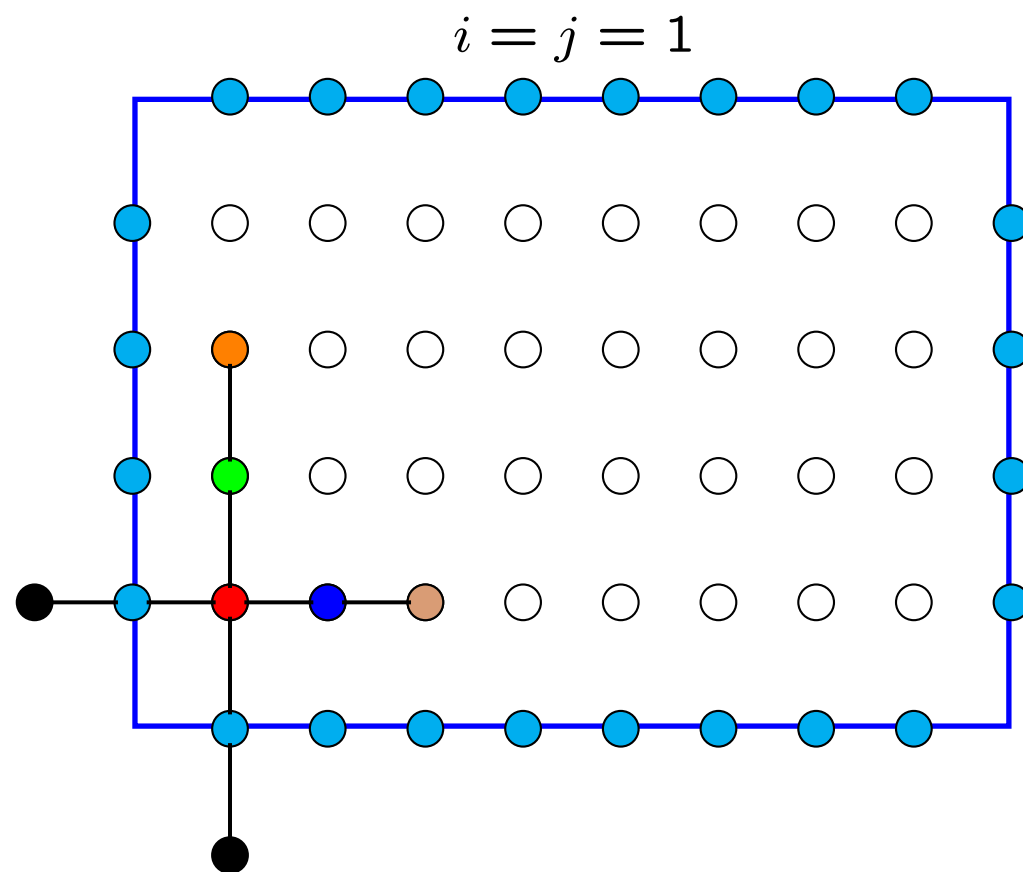
$$-\frac{1}{12}u_{i,j-2} + \frac{4}{3}u_{i,j-1} - \frac{1}{12}u_{i-2,j} + \frac{4}{3}u_{i-1,j} - 5u_{i,j} + \frac{4}{3}u_{i+1,j} \\ - \frac{1}{12}u_{i+2,j} + \frac{4}{3}u_{i,j+1} - \frac{1}{12}u_{i,j+2} = h^2 g(x_i, y_j)$$

Il metodo può essere descritto dal seguente stencil:



Osservazioni

- Il metodo è più preciso del metodo a 5 punti ma ci sono problemi quando viene applicato in prossimità della frontiera come si evince dalla seguente immagine.



- Il sistema lineare

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

che si deve risolvere ha una struttura più complessa di quello ottenuto con il metodo a 5 punti.

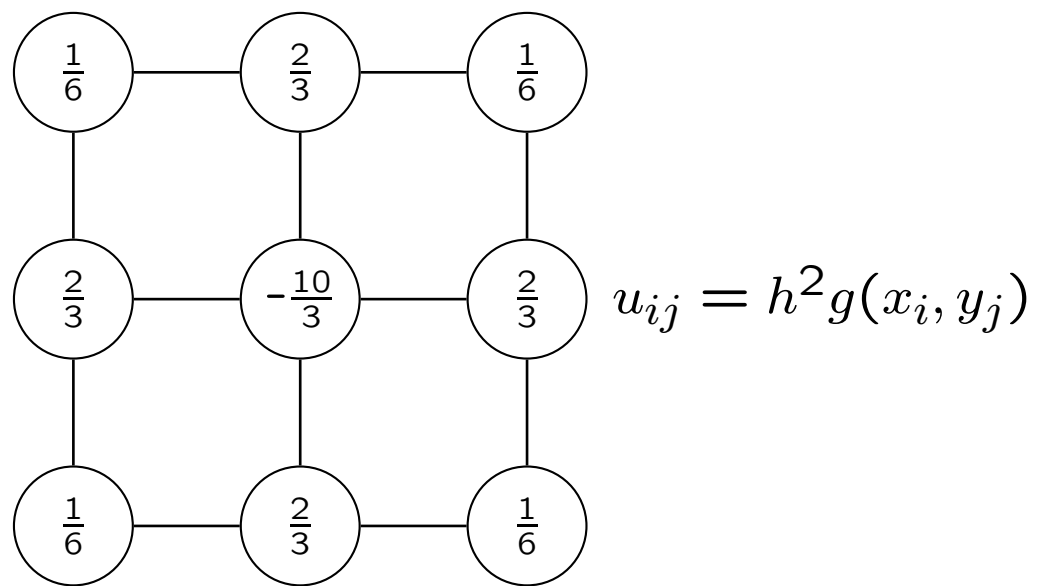
La matrice dei coefficienti è la seguente

$$A = \begin{pmatrix} T_0 & J_0 & O & & & & \\ J_1 & T & J_1 & J_2 & & & \\ J_2 & J_1 & T & J_1 & J_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & J_2 & J_1 & T & J_1 & J_2 \\ & & & J_2 & J_1 & T & J_1 \\ & & & & O & J_0 & T_0 \end{pmatrix}$$

dove, utilizzando l'ordinamento lessicografico, la matrice T ha una struttura a 5 diagonali (**pentadiagonale**), la matrice T_0 è tridiagonale, mentre le matrici J_0 , J_1 e J_2 sono matrici diagonali.

Il Metodo a 9 punti

Utilizzando una diversa approssimazione delle derivate parziali seconde della funzione $u(x, y)$ si può derivare uno schema numerico che utilizza nove punti collocati intorno al nodo di riferimento. Senza descrivere in dettaglio tale tecnica, lo stencil del metodo applicato con lo stesso passo di discretizzazione rispetto alle variabili x e y , è il seguente:



Osservazioni

- Il metodo è preciso quanto il metodo a 5 punti (l'errore dipende da h^2) ma l'uso di maggiori informazioni (l'approssimazione coinvolge appunto 9 punti) consente di ottenere in pratica risultati migliori;
- Il sistema lineare

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

che si deve risolvere ha una struttura più complessa di quello ottenuto con il metodo a 5 punti.

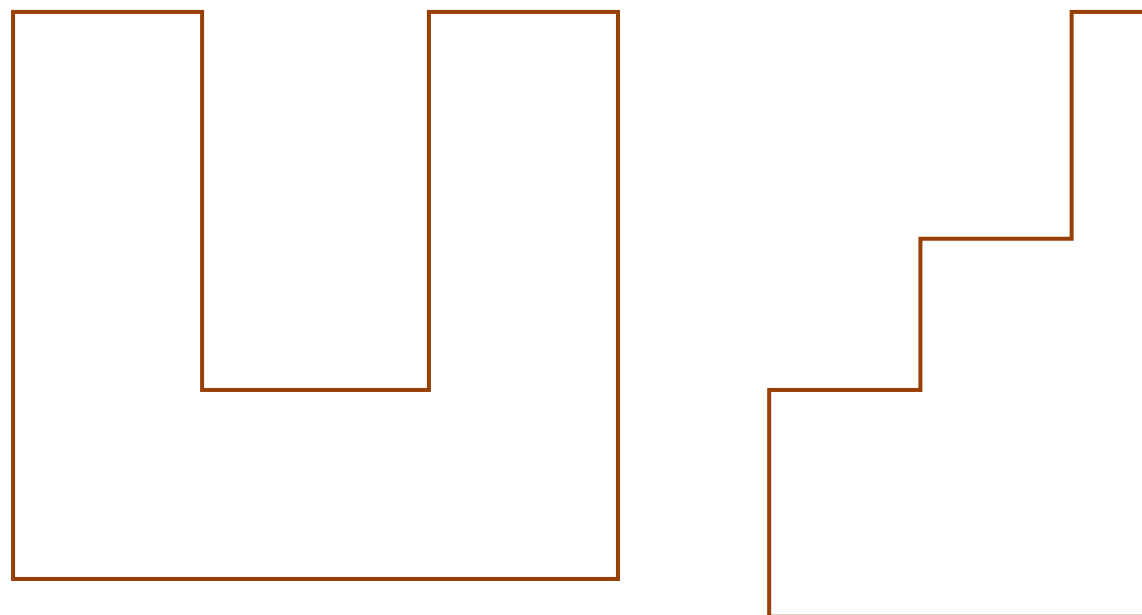
La matrice dei coefficienti è la seguente

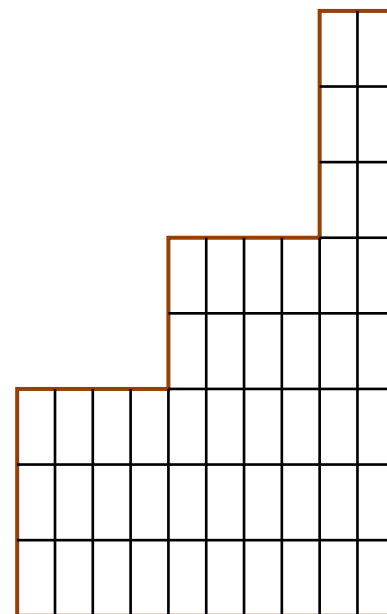
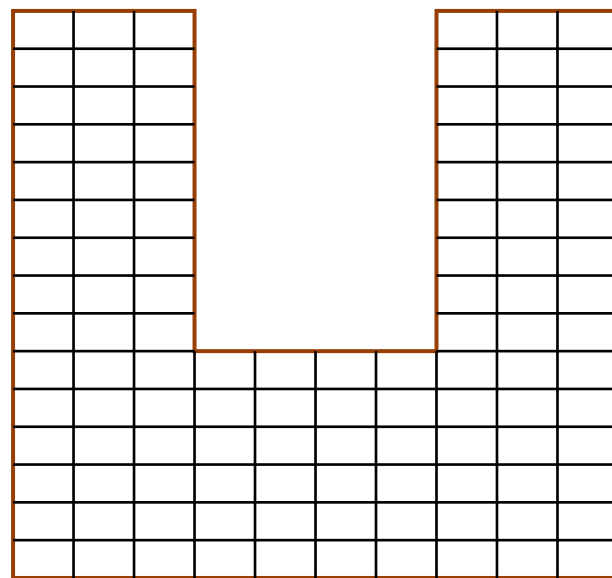
$$A = \begin{pmatrix} T & J & & & & & \\ J & T & J & & & & \\ & J & T & J & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & J & T & J & \\ & & & & J & T & J \\ & & & & & J & T \end{pmatrix}$$

dove, utilizzando l'ordinamento lessicografico, le matrici T e J sono entrambe tridiagonali.

L'equazione di Laplace su domini non rettangolari

Il metodo a 5 punti funziona bene quando il dominio Ω è un rettangolo, oppure un quadrato o un poligono che può essere scomposto come un'unione di quadrati o rettangoli.





Un altro caso favorevole è quello in cui il dominio Ω coincide con un cerchio e Γ è una circonferenza, per esempio:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e

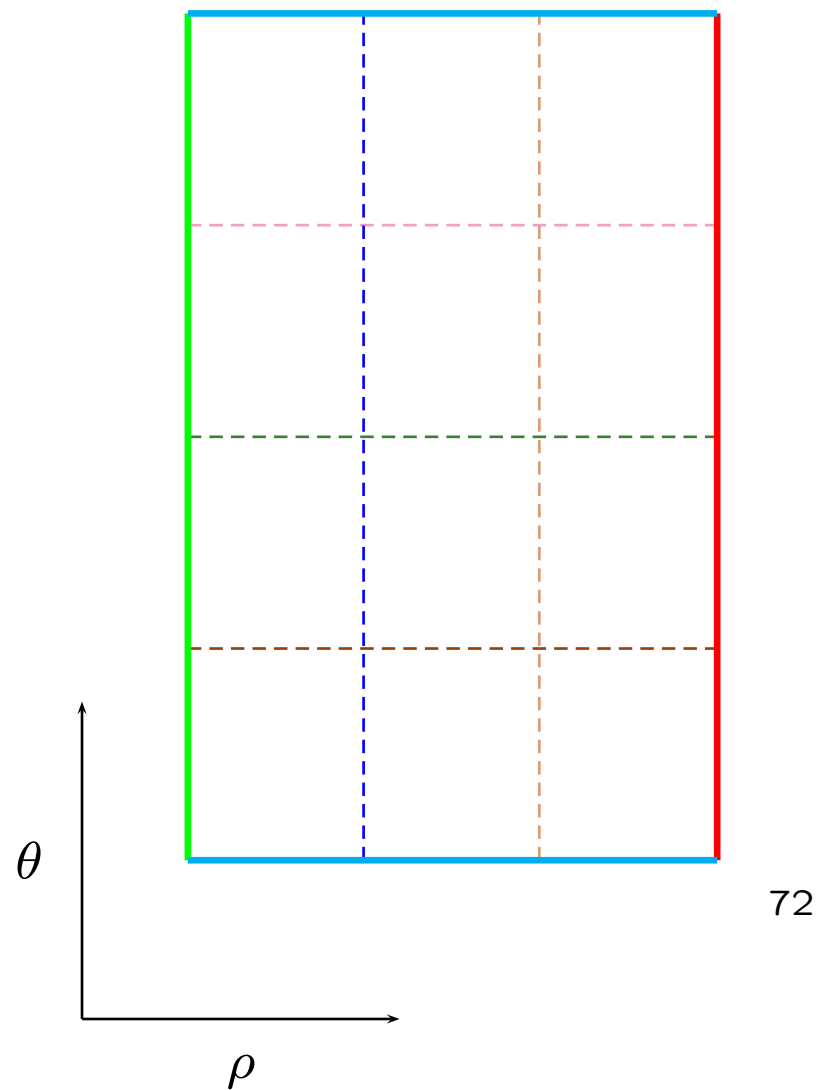
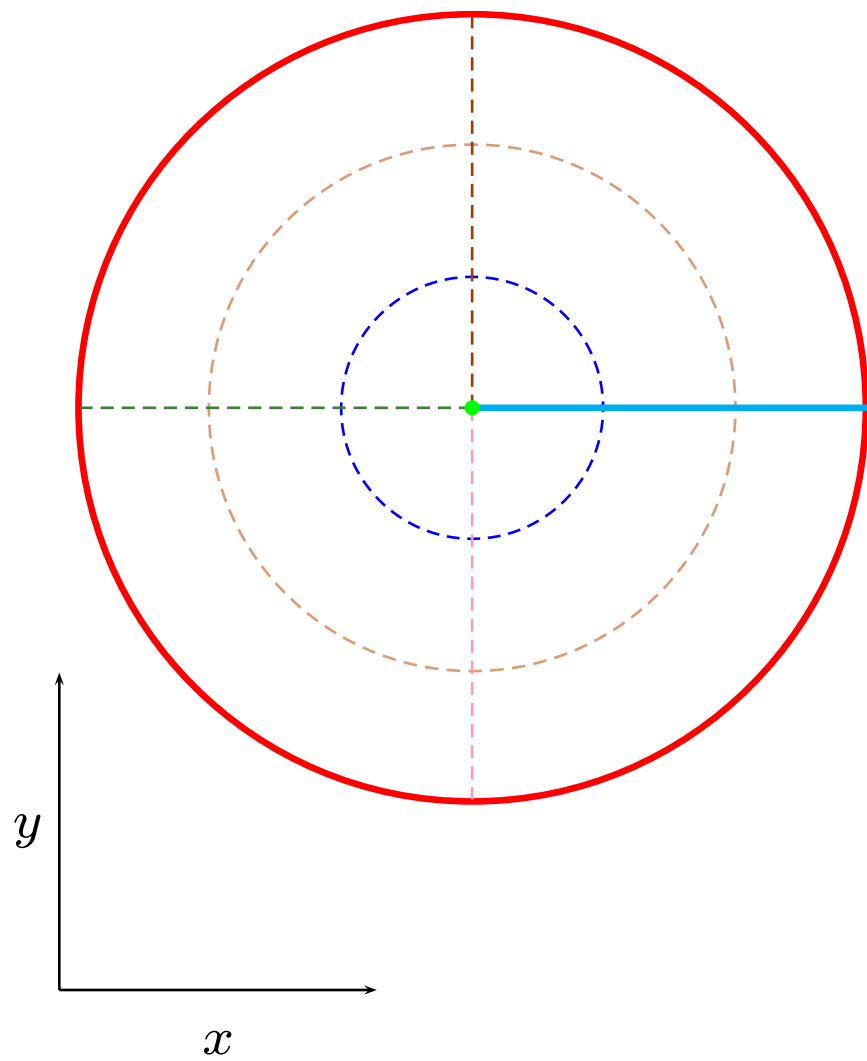
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

In questo caso il dominio può essere trasformato in un rettangolo cambiando le coordinate cartesiane in polari:

$$\Omega = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

e

$$\Gamma = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho = 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$



I problemi che sorgono sono di due tipi:

- Scrivere l'equazione di Laplace in coordinate polari:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0.$$

- Condizioni iniziali:

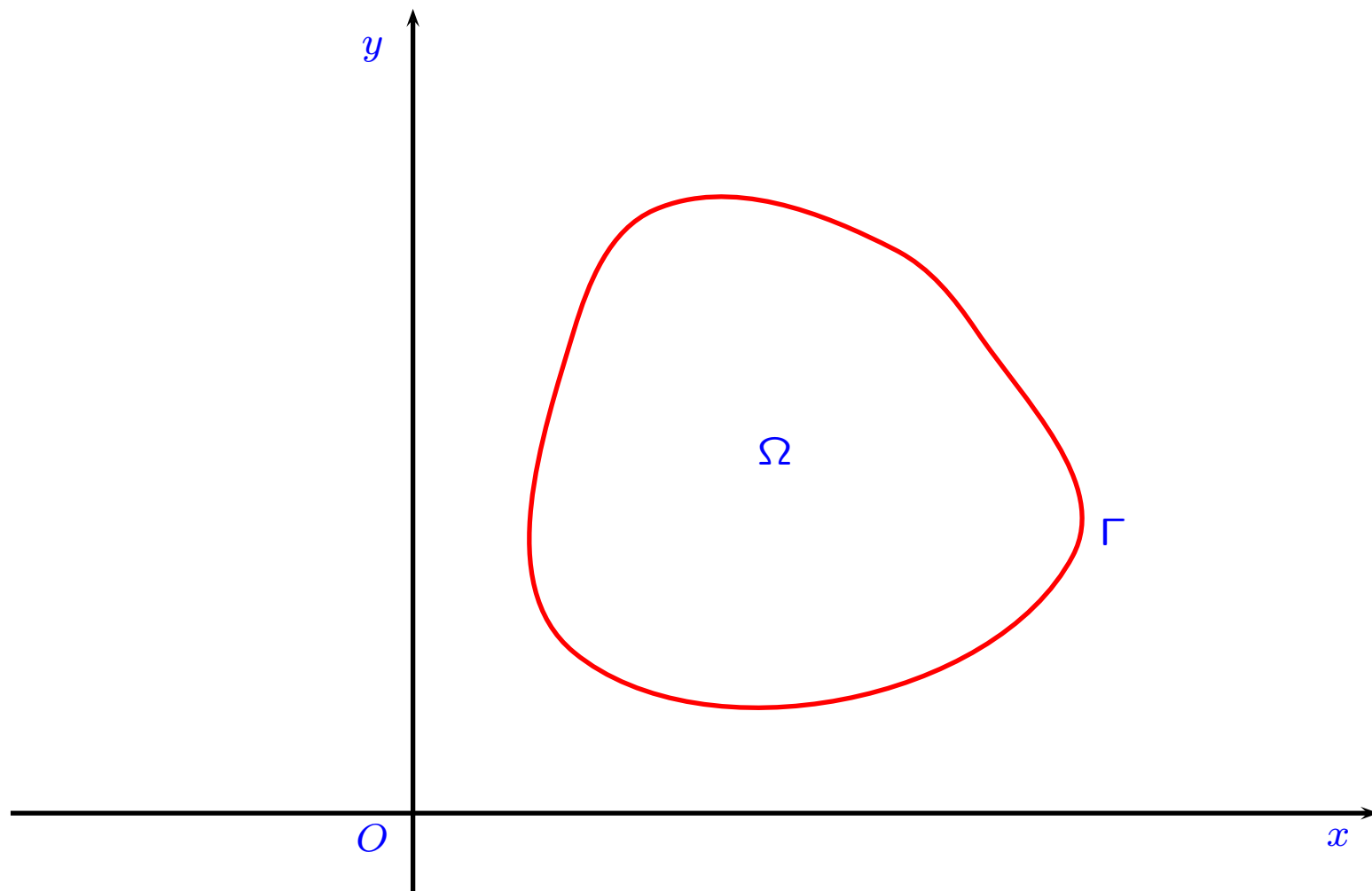
$$v(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), \quad v(0, \theta) = \text{costante}, \quad v(1, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta).$$

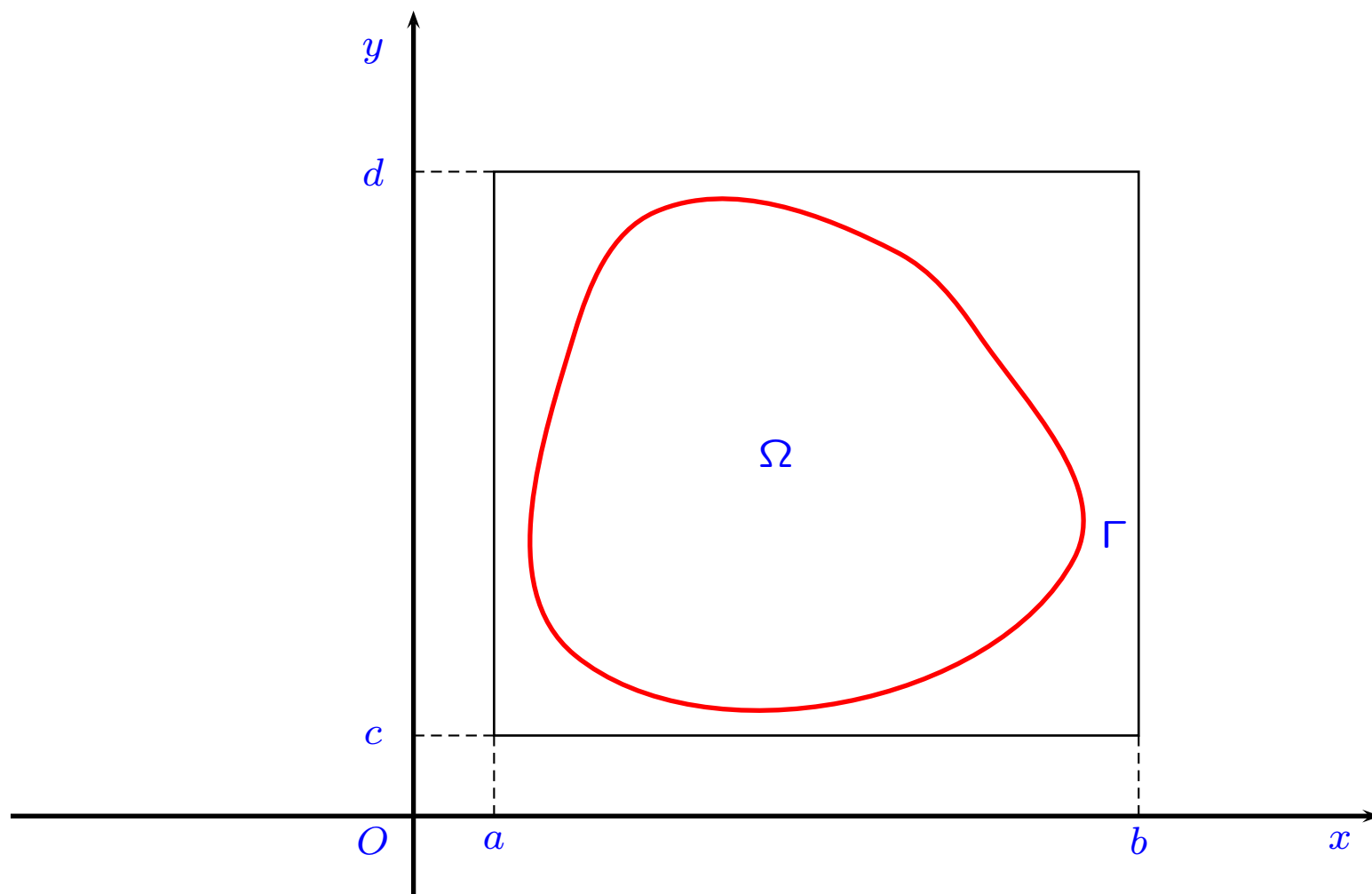
dove $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

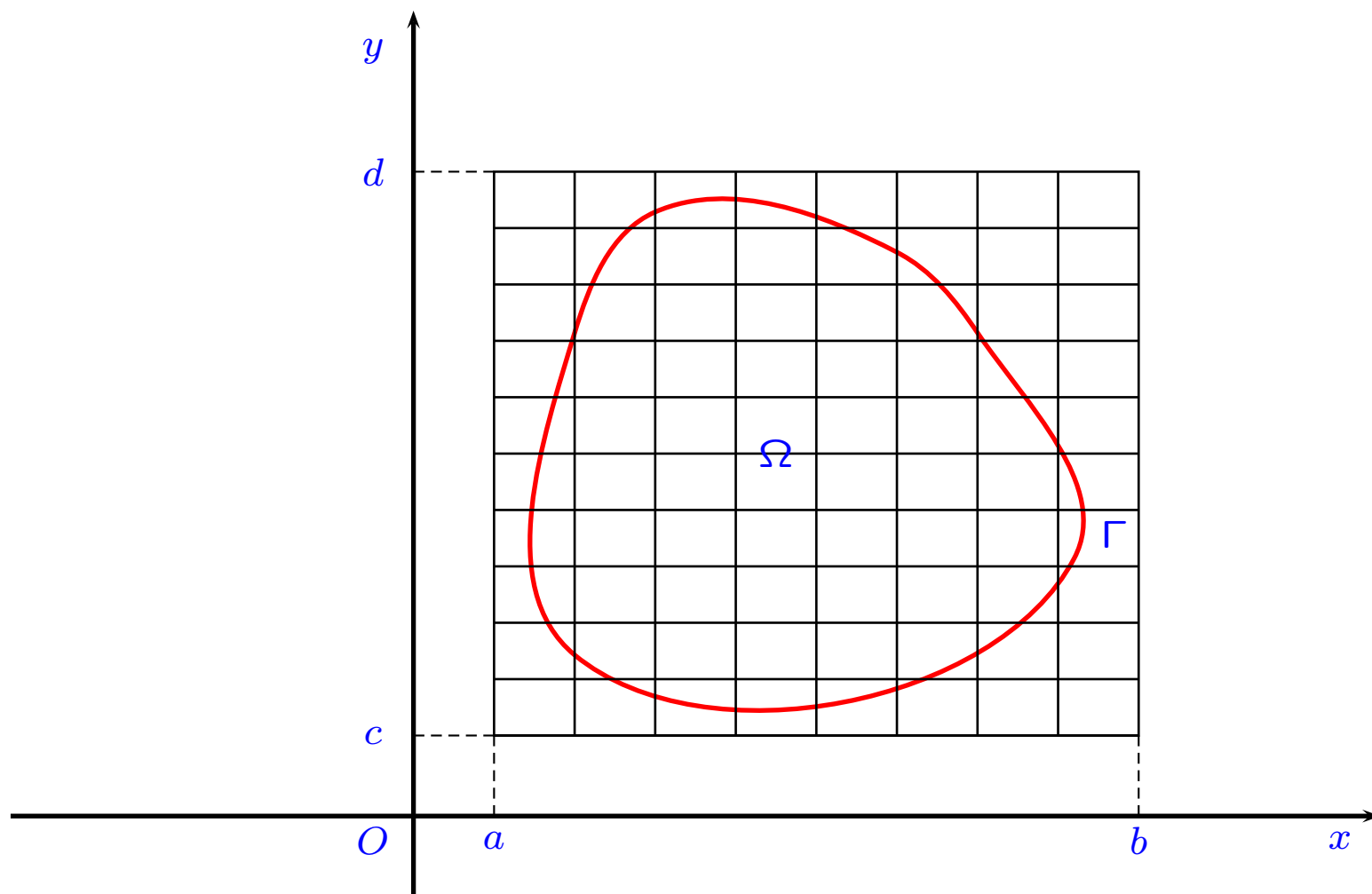
Risoluzione dell'Equazione di Laplace su domini irregolari

Analizziamo ora il caso in cui la frontiera del dominio Ω sia una curva chiusa e regolare senza una particolare forma. In questo caso si considera un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ tale da contenere sia Ω che Γ e si discretizza tale regione come già visto in precedenza, definendo l'insieme discreto:

$$\mathcal{R}_{N+1,M+1} = \left\{ (x_i, y_j) \in [a, b] \times [c, d] \mid i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M \right\}.$$







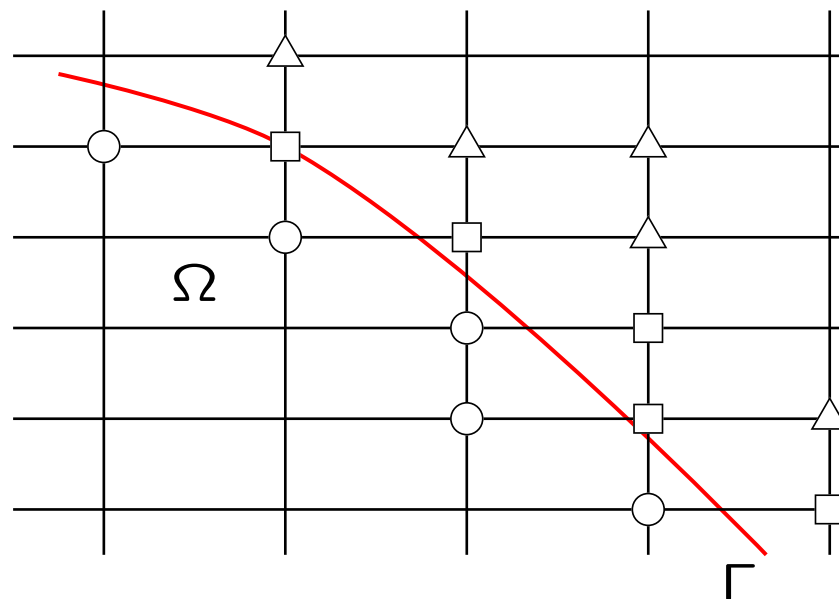
L'insieme dei punti discreti che appartengono sia al rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ che al dominio Ω si denota con

$$\Omega_{hk} = \mathcal{R}_{N+1, M+1} \cap \Omega.$$

Tale insieme viene detto *insieme dei punti interni*. Ogni punto interno (x_i, y_j) ha quattro punti vicini, cioè $(x_{i\pm 1}, y_j)$ e $(x_i, y_{j\pm 1})$.

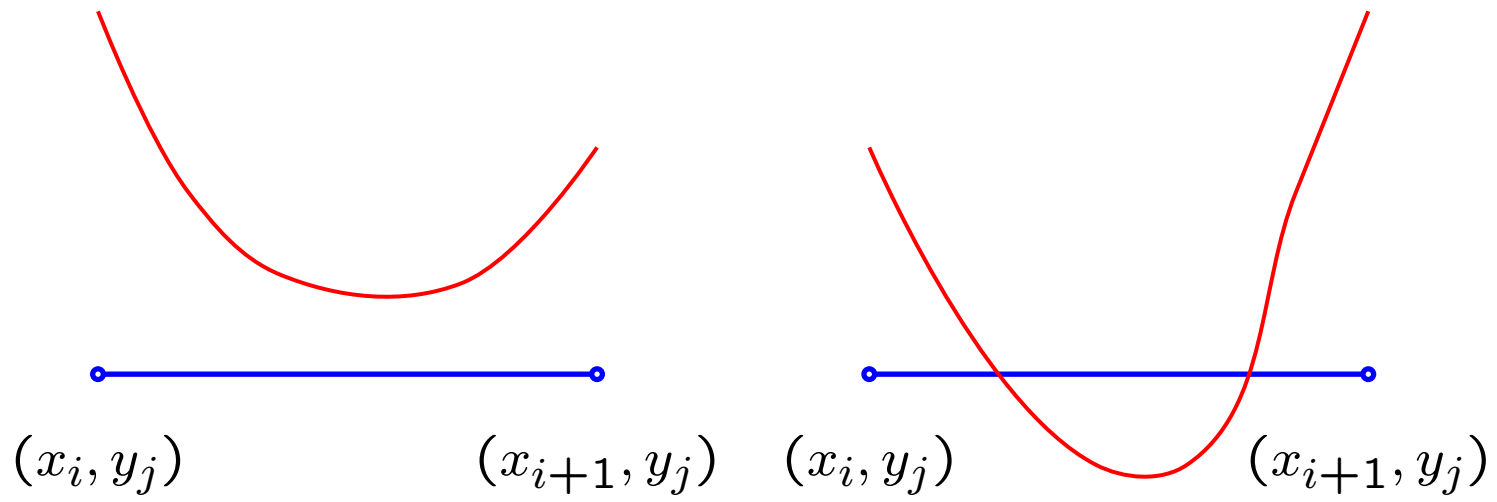
Un punto vicino ad un punto interno che non appartiene a Ω_{hk} si dice *punto di confine*. L'insieme dei punti di confine si indica con Γ_{hk} .

I *punti angolari* sono invece i punti dell'insieme $\mathcal{R}_{N+1, M+1}$ che non sono nè interni nè di confine, ma risultano essere vertici di una cella che contiene almeno un punto interno.



- Punti di confine
- △ Punti angolari
- Punti interni

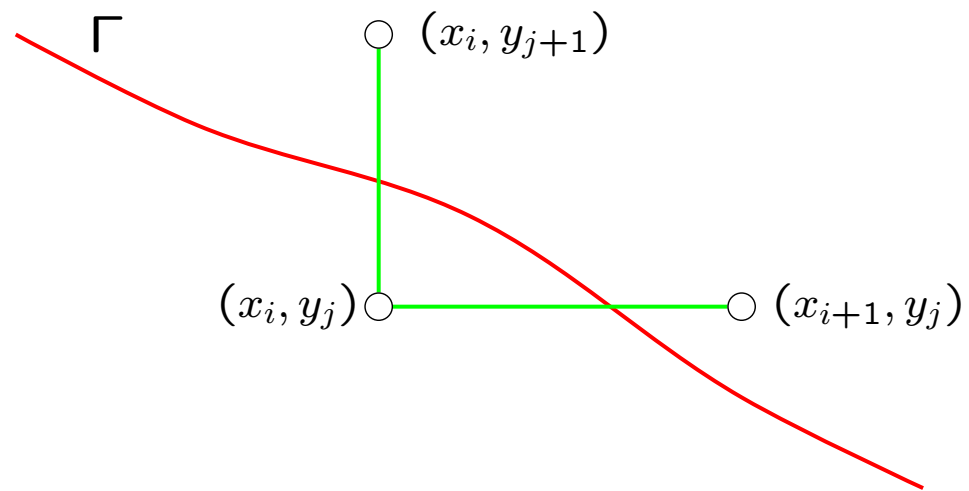
I punti angolari non hanno alcun ruolo nella soluzione numerica di equazioni ellittiche. La griglia deve essere tale che i segmenti che congiungono i punti interni devono essere interamente contenuti nel dominio Ω . Si evita cioè il caso evidenziato dal secondo grafico:



Di solito tale situazione può essere evitata scegliendo opportunamente il passo di discretizzazione oppure effettuando un opportuno cambio di variabile (per esempio una rotazione degli assi).

Il problema dei domini irregolari sorge quando nelle approssimazioni delle derivate seconde intervengono valori della funzione calcolati nei punti di confine. Per ovviare a tale inconveniente ci sono diverse tecniche, due sono le più usate:

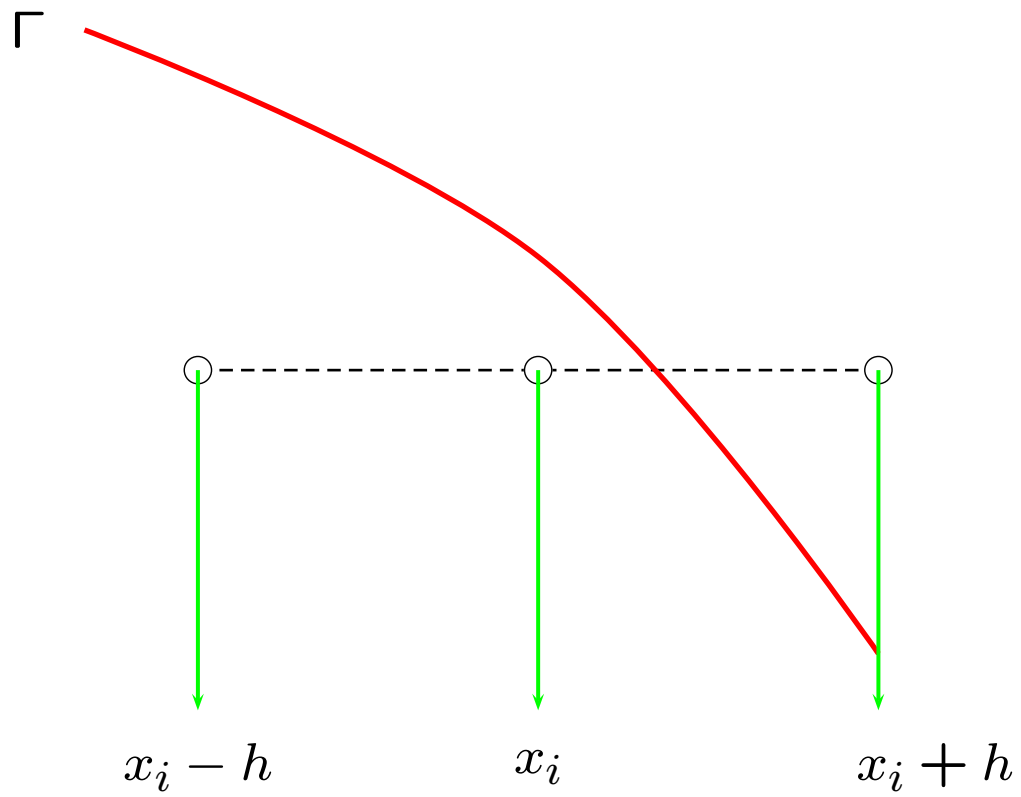
1. come valori nei punti di confine si utilizzano gli stessi valori assunti dalla condizione al contorno;
2. si utilizza il valore della condizione al contorno nel punto sulla curva Γ più vicino al punto interno.

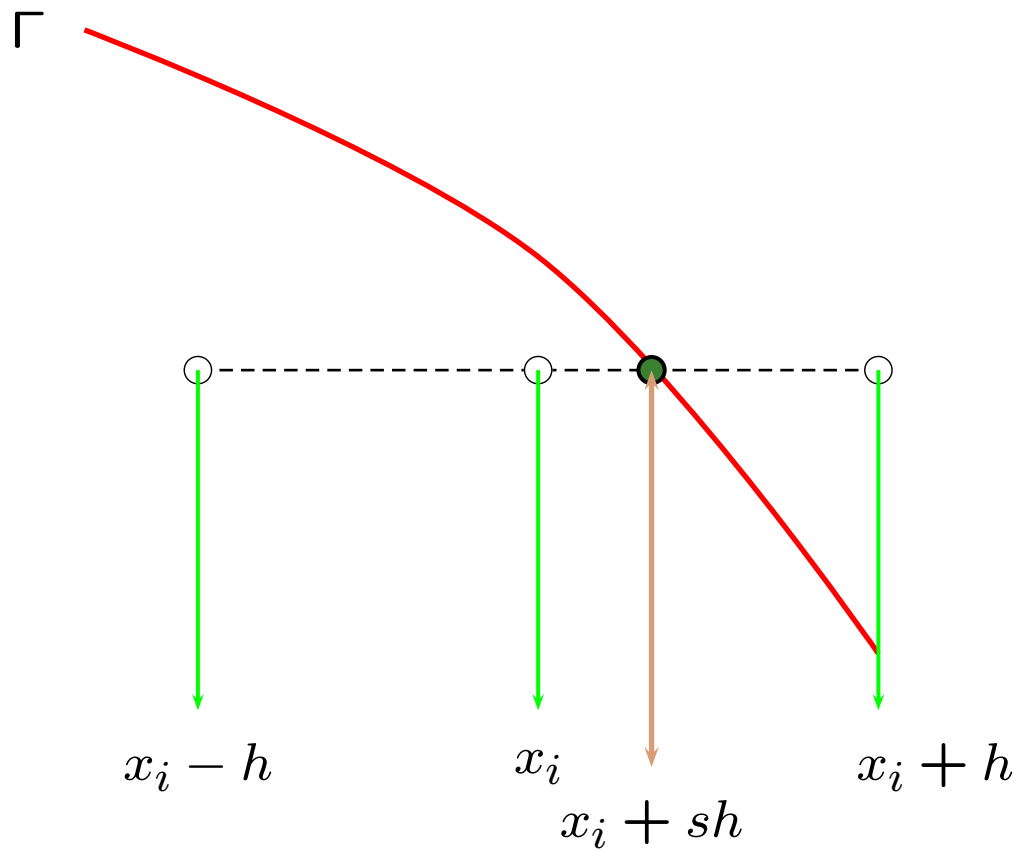


si pone:

$$u(x_i, y_{j+1}) = f(x_i, y_{j+1}), \quad u(x_{i+1}, y_j) = f(x_{i+1}, y_j).$$

Tale assegnazione rappresenta, dal punto di vista matematico, una forzatura, poichè in realtà non è noto neanche se la funzione $f(x, y)$ sia calcolabile in tali punti.





Approssimazione della derivata seconda su griglie non uniformi

Consideriamo il problema di approssimare la derivata seconda della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_i ma considerando i valori della funzione in punti non equidistanti $x_i - h$ e $x_i + sh$, con $0 < s < 1$.

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $f(x_i + sh)$ prendendo come punto iniziale x_i :

$$f(x_i + sh) = f(x_i) + shf'(x_i) + \frac{s^2h^2}{2}f''(x_i) + \frac{s^3h^3}{6}f'''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_i + sh]$$

e procediamo in modo analogo per $f(x_{i-1})$:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Moltiplichiamo per s quest'ultima espressione

$$sf(x_{i-1}) = sf(x_i) - shf'(x_i) + \frac{sh^2}{2}f''(x_i) - \frac{sh^3}{6}f'''(\eta_i)$$

e sommiamola con quella di $f(x_i + sh)$:

$$\begin{aligned} f(x_i + sh) + sf(x_{i-1}) &= f(x_i)(1 + s) + \frac{h^2}{2}f''(x_i)s(1 + s) \\ &\quad + \frac{sh^3}{6} [s^2f'''(\xi_i) - f'''(\eta_i)] \end{aligned}$$

Si ricava l'espressione della derivata seconda in x_i :

$$f''(x_i) = 2 \frac{f(x_i + sh) - f(x_i)(1 + s) + sf(x_{i-1})}{sh^2(1 + s)} +$$

$$+ \frac{h}{3(1 + s)} [f'''(\eta_i) - s^2 f'''(\xi_i)]$$

e, trascurando l'ultimo termine, l'approssimazione della derivata seconda è:

$$f''(x_i) \simeq 2 \frac{f(x_i + sh) - f(x_i)(1 + s) + sf(x_{i-1})}{sh^2(1 + s)}$$

mentre l'errore vale:

$$E(f''(x_i)) = \frac{h}{3(1 + s)} [f'''(\eta_i) - s^2 f'''(\xi_i)] .$$

Applicando tale risultato ad una funzione in due variabili si otterrebbe l'approssimazione:

$$u_{xx}(x_i + sh, y_j) \simeq 2 \frac{u(x_i + sh, y_j) - (1 + s)u(x_i, y_j) + su(x_{i-1}, y_j)}{sh^2(1 + s)}.$$

Ovviamente si procederebbe in modo analogo per approssimare la derivata seconda $u_{yy}(x_i, y_j + tk)$, $0 < t < 1$:

$$u_{yy}(x_i, y_j + tk) \simeq 2 \frac{u(x_i, y_j + tk) - (1 + t)u(x_i, y_j) + tu(x_i, y_{j-1})}{tk^2(1 + t)}.$$

Osservazioni

- Per $s = 1$ (o $t = 1$) la formula è la stessa già vista in precedenza;
- L'approssimazione vista è del primo ordine perchè l'errore dipende da h (o da k);
- L'approssimazione della soluzione sarà meno precisa sulla frontiera di Ω ;
- La struttura della matrice dei coefficienti non cambia perchè è coinvolto lo stesso numero di punti sia nel caso dei punti interni che di frontiera.

Volendo ottenere un'altra approssimazione si può utilizzare la seguente formula, della quale omettiamo la dimostrazione, che utilizza l'ulteriore valore $f(x_{i-2})$ ma è di ordine 2:

$$f''(x_i) \simeq \frac{1}{h^2} \left[\frac{s-1}{s+2} f(x_{i-2}) + \frac{2(2-s)}{s+1} f(x_{i-1}) - \frac{3-s}{s} f(x_i) + \frac{6f(x_i + sh)}{s(s+1)(s+2)} \right].$$

Osservazioni

- L'approssimazione vista è del secondo ordine perchè l'errore dipende da h^2 (o da k^2);
- L'approssimazione della soluzione sarà precisa allo stesso modo su tutti i punti del dominio;
- La struttura della matrice dei coefficienti cambia in prossimità dei punti sulla frontiera perchè viene utilizzato un punto in più.