

Contenuti delle lezioni:

1. Introduzione ed esempi di Equazioni alle Derivate Parziali;
2. Classificazione delle Equazioni alle Derivate Parziali (PDE)
3. Derivazione numerica
4. Metodi numerici alle differenze finite per i principali tipi di PDE
5. Metodi numerici agli elementi finiti

Equazioni alle Derivate Parziali:

Un'Equazione alle Derivate Parziali (PDE) è un'equazione che mette in relazione una funzione incognita dipendente da due (o più) variabili indipendenti alle sue derivate parziali rispetto a queste variabili.

La necessità di utilizzare PDE sta nel fatto che queste consentono di descrivere in modo più accurato determinati fenomeni naturali.

Modelli Matematici

L'uso di modelli matematici si sta diffondendo sempre di più in molti aspetti della vita quotidiana (Meteorologia, Simulatori, Collocazione degli impianti di trasmissione, ...).

Infatti quando è necessario capire l'evoluzione di un determinato fenomeno si può utilizzare un modello matematico che consiste:

1. Nell'individuare le variabili coinvolte;
2. Nell'individuare le relazioni matematiche tra tali variabili (solitamente equazioni differenziali);
3. Nel risolvere (numericamente) tali equazioni.

Esempio: Il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}u'(t) &= \alpha u(t) - \delta u(t)v(t) \\v'(t) &= \gamma v(t) + \delta u(t)v(t)\end{aligned}$$

descrive il modello preda-predatore in cui:

- $u(t)$ = numero di prede al tempo t ;
- $v(t)$ = numero di predatori al tempo t ;
- α e γ sono i fattori di riproduzione;
- δ è il fattore di predazione.

Tali equazioni non permettono di descrivere il caso in cui si cerchi di tenere conto della posizione, cioè avendo come incognite del sistema differenziale due funzioni $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$.

Qualora sia necessario descrivere un fenomeno che dipende da più variabili indipendenti è necessario utilizzare un modello differenziale alle derivate parziali.

Equazioni alle Derivate Parziali

Le equazioni alle derivate parziali (PDE in breve) rappresentano una variazione delle equazioni differenziali ordinarie in quanto si tratta di determinare una funzione u nelle variabili indipendenti x e y che soddisfa un'equazione che coinvolge le sue derivate parziali prime e seconde. Un esempio di PDE è il seguente

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

dove anche a, b, c possono essere funzioni di x, y, u e delle derivate parziali prime di u .

- Generalmente le derivate parziali possono essere indicate anche in forma più compatta:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

cosicchè la forma della PDE appena vista diviene:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

Osservazioni

Osservazione 1. Le equazioni alle derivate parziali **del secondo ordine**:

$$a(x, y, u)u_{xx} + 2b(x, y, u)u_{xy} + c(x, y, u)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

sono le più diffuse.

Un'equazione alle derivate parziali si dice di ordine p se p è il massimo ordine di derivata che vi compare.

Osservazione 2. Generalmente la scelta delle variabili indipendenti dipende dal problema fisico:

- Le variabili x, y, z indicano una posizione nello **spazio**
- La variabile t indica il **tempo**
- Più raramente anche le variabili x_1, x_2, x_3 indicano una posizione nello **spazio**.

Quindi le equazioni:

$$u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, u) = 0, \quad u_{xx} + u_{tt} + f(x, t, u) = 0$$

sono **matematicamente** equivalenti ma **fisicamente** no.

Osservazione 3. Nell'equazione del secondo ordine

$$a(x, y, u)u_{xx} + 2b(x, y, u)u_{xy} + c(x, y, u)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

non compare la derivate u_{yx} perchè, in ipotesi di continuità, applicando il Teorema di Schwarz le derivate parziali "miste" sono uguali:

$$u_{xy} = u_{yx}.$$

Osservazione 4. La presenza del termine misto

$$u_{xy}$$

generalmente viene ignorata perchè:

1. Quando $y = t$ non ha significato fisico;
2. Con un opportuno cambio di variabile la derivata mista può diventare nulla.

Operatori Differenziali

Spesso le equazioni alle derivate parziali sono rappresentati in forma più compatta utilizzando determinati operatori, come:

- **Gradiente** di $u(x, y, t)$:

$$\operatorname{grad} u(x, y, t) = \nabla u(x, y, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ u_t(x, y, t) \end{pmatrix}$$

- **Divergenza** di una funzione vettoriale $u(x, y, t) = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\operatorname{div} u(x, y, t) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial t}.$$

- **Laplaciano** di $u(x, y, t)$:

$$\nabla^2 u(x, y, t) = \text{div}(\text{grad}(u(x, y, t))) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

- **curl** della funzione vettoriale (o del campo vettoriale) $u = (u_1, u_2, u_3)$:

$$\text{curl}(u) = \text{grad}u \times u =$$

$$= \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) x + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) y + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) z.$$

che trova applicazione nelle leggi di Maxwell sull'elettromagnetismo.

Alcuni Esempi: L'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Descrive, in funzione della posizione e del tempo, lo spostamento, rispetto al punto di equilibrio, di una corda vibrante.

L'equazione descrive anche il campo elettrico o magnetico in un'onda elettromagnetica oppure l'intensità di corrente oppure il potenziale lungo una linea di trasmissione.

La quantità c è la velocità di propagazione dell'onda.

L'equazione di diffusione

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Descrive la temperatura in una regione che non contiene sorgenti di calore, e si applica anche alla diffusione di un composto chimico in un mezzo permeabile (liquido, mezzo poroso) avente concentrazione $u(x, y, t)$. La costante κ viene detta diffusività.

L'equazione di Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Può essere ottenuta dall'equazione di diffusione ponendo a zero la derivata rispetto al tempo e descrive la distribuzione di temperatura in regime stazionario di un solido privo di sorgenti di calore. L'equazione di Laplace descrive anche il potenziale elettrostatico in una regione priva di carica elettrica. Si applica anche al flusso di un fluido incomprimibile in una regione senza vortici, sorgenti o scarichi.

L'equazione di Poisson

$$\nabla^2 u = \rho(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

descrive la stessa situazione dell'equazione di Laplace ma in una regione in cui c'è carica elettrica oppure una sorgente di calore o di fluido. La funzione $\rho(x, y)$ si chiama densità di sorgente e dipende anche da costanti fisiche.

Per esempio nell'equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon}$$

$u(x, y)$ rappresenta il potenziale elettrostatico di una regione dello spazio;

$\rho(x, y)$ rappresenta la densità della carica elettrica;

ε è la permittività della sostanza.

Risoluzione analitica di PDE

- Non esistono tecniche analitiche generali per risolvere PDE;
- Per alcuni tipi di equazioni (lineari) si può scrivere l'espressione sotto forma di [Serie di Fourier](#);
- Per altri tipi di equazioni si può scrivere l'espressione sotto forma integrale ([Formula di D'Alembert](#)).

Queste sono le motivazioni che spingono a cercare tecniche numeriche per PDE.

Considerando un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine essa può essere:

1. **Lineare:**

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u + g(x, y) = 0.$$

2. **Quasi-Lineare:**

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

3. **Semi-Lineare:**

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Classificazione di PDE

Consideriamo l'equazione del secondo ordine:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0 \quad (1)$$

e definiamo il seguente valore:

$$\Delta = b^2 - ac.$$

Un modo di classificare le PDE è quello in base al segno di Δ :

1. Se $\Delta < 0$ allora l'equazione si dice **Ellittica**;
2. Se $\Delta = 0$ allora l'equazione si dice **Parabolica**;
3. Se $\Delta > 0$ allora l'equazione si dice **Iperbolica**.

Tale classificazione (per la verità un po' superata) dipende solo dall'analogia formale tra la (??) e l'equazione di una conica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

che rappresenta

1. un'ellisse se $b^2 - ac < 0$;
2. una parabola se $b^2 - ac = 0$;
3. un'iperbole se $b^2 - ac > 0$.

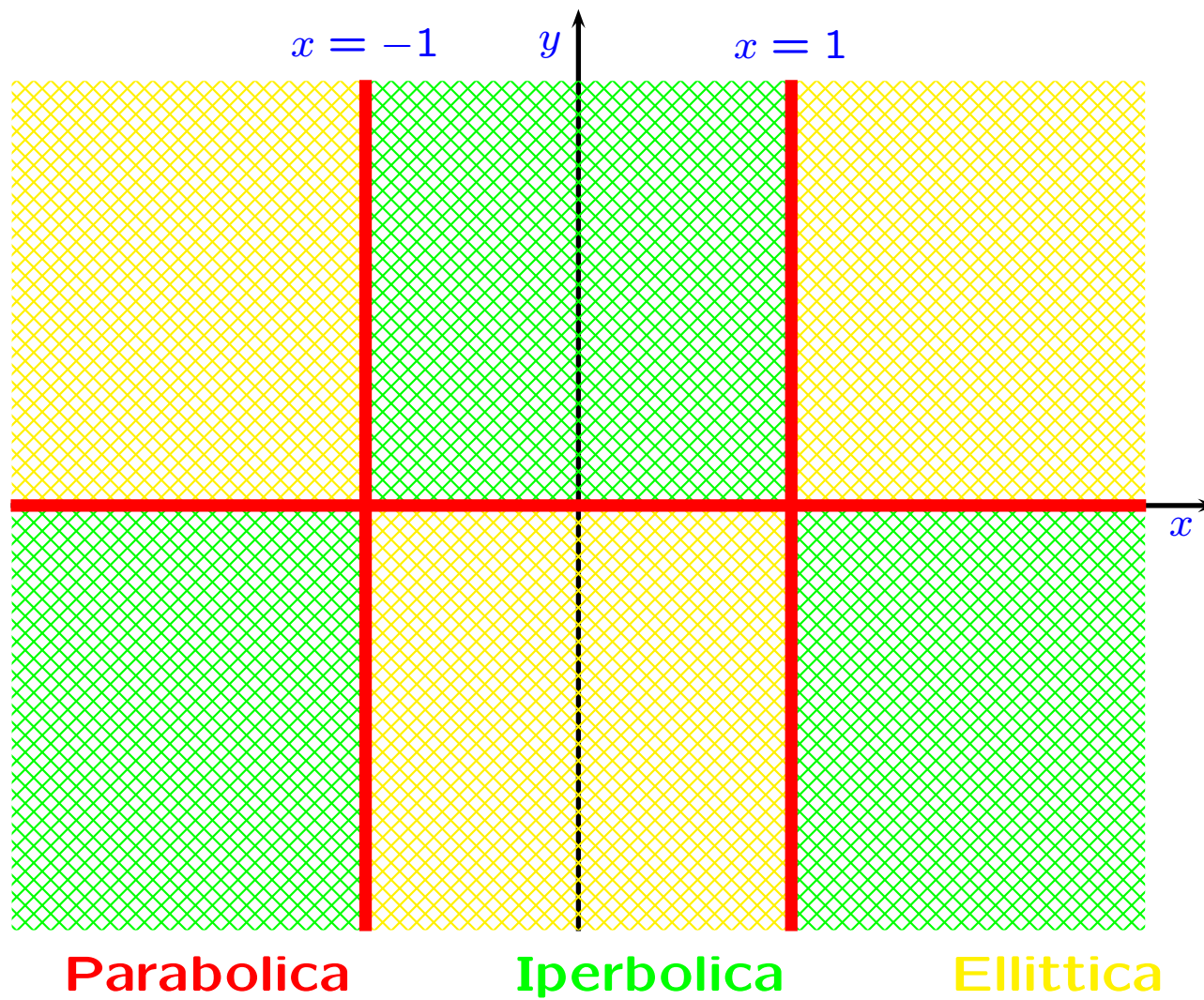
Si tratta di una classificazione non univoca perchè se i coefficienti a, b, c dipendono da x e y allora potrebbe accadere che il tipo di equazione dipende dal dominio. Consideriamo per esempio l'equazione del secondo ordine:

$$y(x^2 + 1)u_{xx} + (x^2 - 1)u_{yy} + 3x + y = 0$$

con $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. In questo caso

$$\Delta = -y(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

cosicchè si ha la situazione schematizzata nel seguente grafico.



Classificazione alternativa

1. **Equazioni stazionarie**: quelle in cui tutte le derivate sono di tipo spaziale e descrivono fenomeni che non sono dipendenti dal tempo (**Equazioni ellittiche**);
2. **Equazioni di evoluzione**: quelle in cui sono presenti anche derivate di tipo temporale (**Equazioni paraboliche ed iperboliche**);

Esempi:

- L'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

è **Stazionaria** ed **Ellittica** ($\Delta = -1$);

- L'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

è **Stazionaria** ed **Ellittica** ($\Delta = -1$);

- L'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \mu > 0$$

è di **Evoluzione** ed **Iperbolica** ($\Delta = \mu$);

- L'equazione di diffusione

$$\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

è di **Evoluzione** e **Parabolica** ($\Delta = 0$);

- L'equazione di Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

è di **Evoluzione**.

Anche se l'ultimo tipo di equazione non rientra nella classificazione vista in precedenza si può verificare che è di tipo Iperbolico, perchè l'equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Risoluzione numerica di PDE

Principalmente esistono tre classi di metodi numerici per PDE.

1. Metodi alle differenze finite
2. Metodi di Semi-Discretizzazione
3. Metodi agli elementi e ai volumi finiti

Metodi alle Differenze Finite

Si sostituisce al dominio continuo un dominio discreto, cioè un insieme finito di punti, si approssimano le derivate parziali su questi punti e si impone che tali approssimazioni soddisfano l'equazione alle derivate parziali.

Vantaggi:

- Si tratta di un metodo molto semplice;
- Si possono ottenere metodi di tipo *Esplicito*, che forniscono la soluzione senza la risoluzione di sistemi lineari;

Svantaggi:

- La tecnica non è molto efficiente quando il dominio Ω non è poligonale;
- Poco efficiente nel caso di equazioni non lineari.

Metodi di Semi-Discretizzazione

Si discretizzano solo le derivate parziali spaziali cosicchè l'equazione alle derivate parziali diventa un sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$u'_i(t) = f_i(t, u_1(t), \dots, u_N(t))$$

Vantaggi:

- Le equazioni differenziali ordinarie possono essere risolte più agevolmente rispetto a quelle alle derivate parziali;

Svantaggi:

- Le equazioni differenziali ordinarie sono solitamente di tipo **stiff** (più difficili da risolvere);
- Il sistema di equazioni differenziali ha una grande dimensione.

Metodi agli elementi finiti (2 dimensioni)
Metodi ai volumi finiti (3 o più dimensioni)

Si definisce uno spazio di funzioni continue $L(\Omega)$ in un dominio Ω e una base di tale spazio $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, definite in Ω o in un suo sottinsieme. Si cerca di approssimare la funzione u con una funzione $u_h \in L$, tale che:

$$\|u - u_h\| = \min_{v \in L(\Omega)} \|u - v\|,$$

con

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Esempio: Si può scegliere come spazio $L(\Omega)$ quello dei polinomi di grado 1, in questo caso la base è:

$$\mathcal{B}_{L(\Omega)} = \{1, x, y\},$$

oppure l'insieme dei polinomi di grado 3:

$$\mathcal{B}_{L(\Omega)} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}.$$

Gli spazi più utilizzati sono quelli delle cosiddette funzioni **polinomiali a tratti**, cioè quelle che sono polinomi ma in sottodomini di Ω .

Vantaggi:

- Il metodo è molto flessibile ed è applicabile a qualsiasi tipo di dominio in due o in tre dimensioni;

Svantaggi:

- È necessario riformulare l'equazione in termini variazionali;
- È necessario risolvere sistemi di grandi dimensioni.