Equazioni Iperboliche

Le equazioni iperboliche rappresentano probabilmente la classe che descrive il più ampio numero di fenomeni in diversi campi della fisica fisica (fluidodinamica, acustica, elettromagnetismo e così via). Le equazioni di Eulero per fluidi comprimibili, le equazioni di Einstein per la relatività generale, l'equazione di Burgers per onde transoniche, sono esempi di equazioni iperboliche, quasi tutte non lineari.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + f(x,t,u) = 0$$

un'equazione è iperbolica se:

$$B^2 - AC > 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0,\ AC < 0.$$

L’Equazione d’Onda

L’equazione del secondo ordine di tipo iperbolico più nota è sicuramente l’equazione d’onda:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad c \neq 0,$$

infatti

$$\Delta = c^2 > 0.$$

L’equazione d’onda ammette una formulazione come equazione del primo ordine:

$$u_t(x,t) + c u_x(x,t) = 0, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Infatti derivando l'equazione rispetto al tempo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0,$$

e rispetto allo spazio

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Sostituendo la derivata mista nella prima equazione si ricava appunto l'equazione del secondo ordine.

In entrambe le equazioni c rappresenta una costante prefissata, cioè la velocità di propagazione dell'onda (per un'onda sonora che si propaga nell'aria il valore c è pari a circa 340 m/sec, in genere il valore dipende dal tipo di onda).
La funzione $u(x,t)$ esprime l'ampiezza dell'onda, una misura della sua intensità in funzione della posizione x al tempo t. Per un'onda sonora nell'aria $u(x,t)$ esprime la pressione dell'aria in diversi punti dello spazio, per una corda vibrante esprime lo spostamento fisico della corda rispetto alla posizione di riposo.

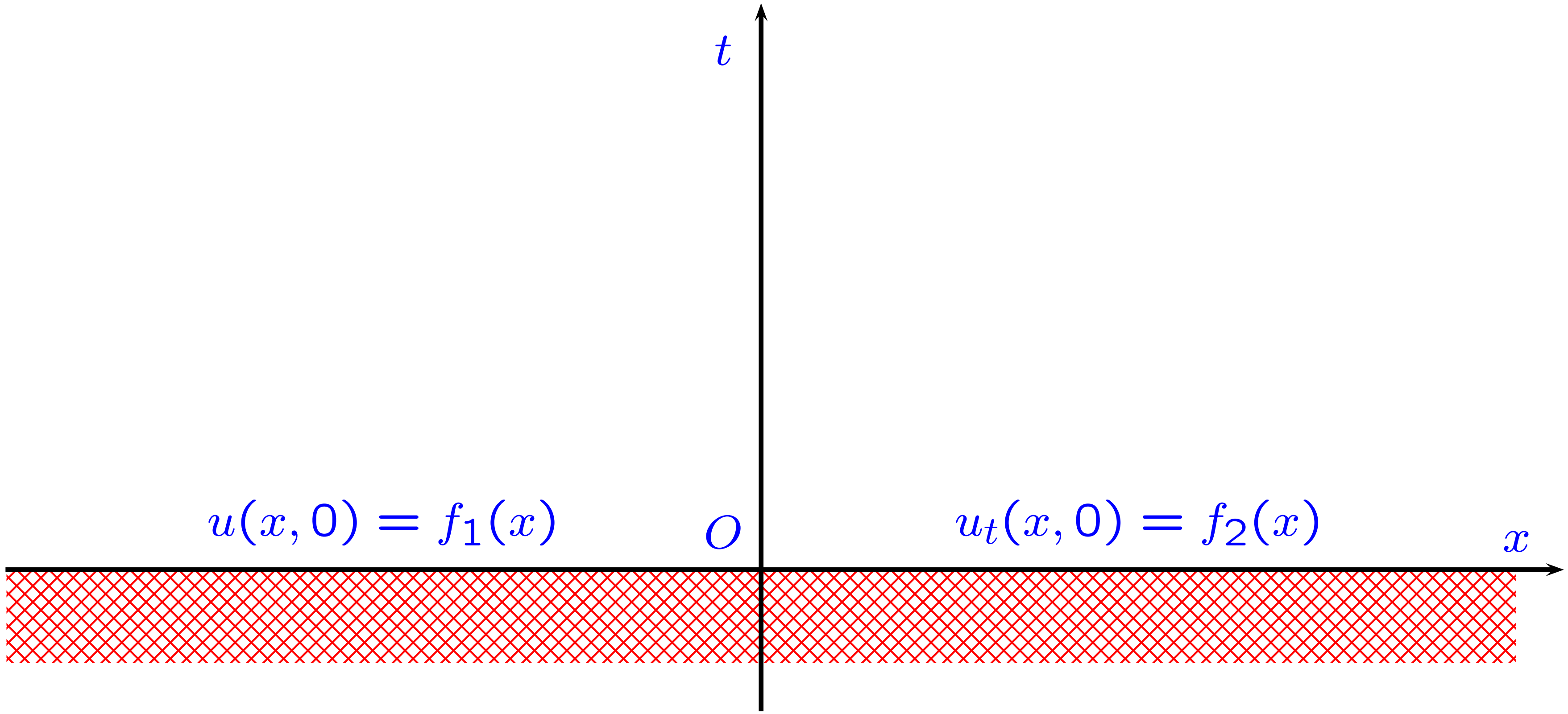
Ovviamente se il dominio spaziale è bidimensionale (l'onda si propaga nel piano xy) l'equazione d'onda può essere conseguentemente modificata:

$$u_{tt}(x,t) = c^2(u_{xx}(x,t) + u_{yy}(x,t)), \qquad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Il problema ai valori iniziali (Problema di Cauchy)

Si tratta di trovare una funzione $u(x,t)$, definita e continua per $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, che soddisfi l'equazione delle onde per $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ e le condizioni iniziali:

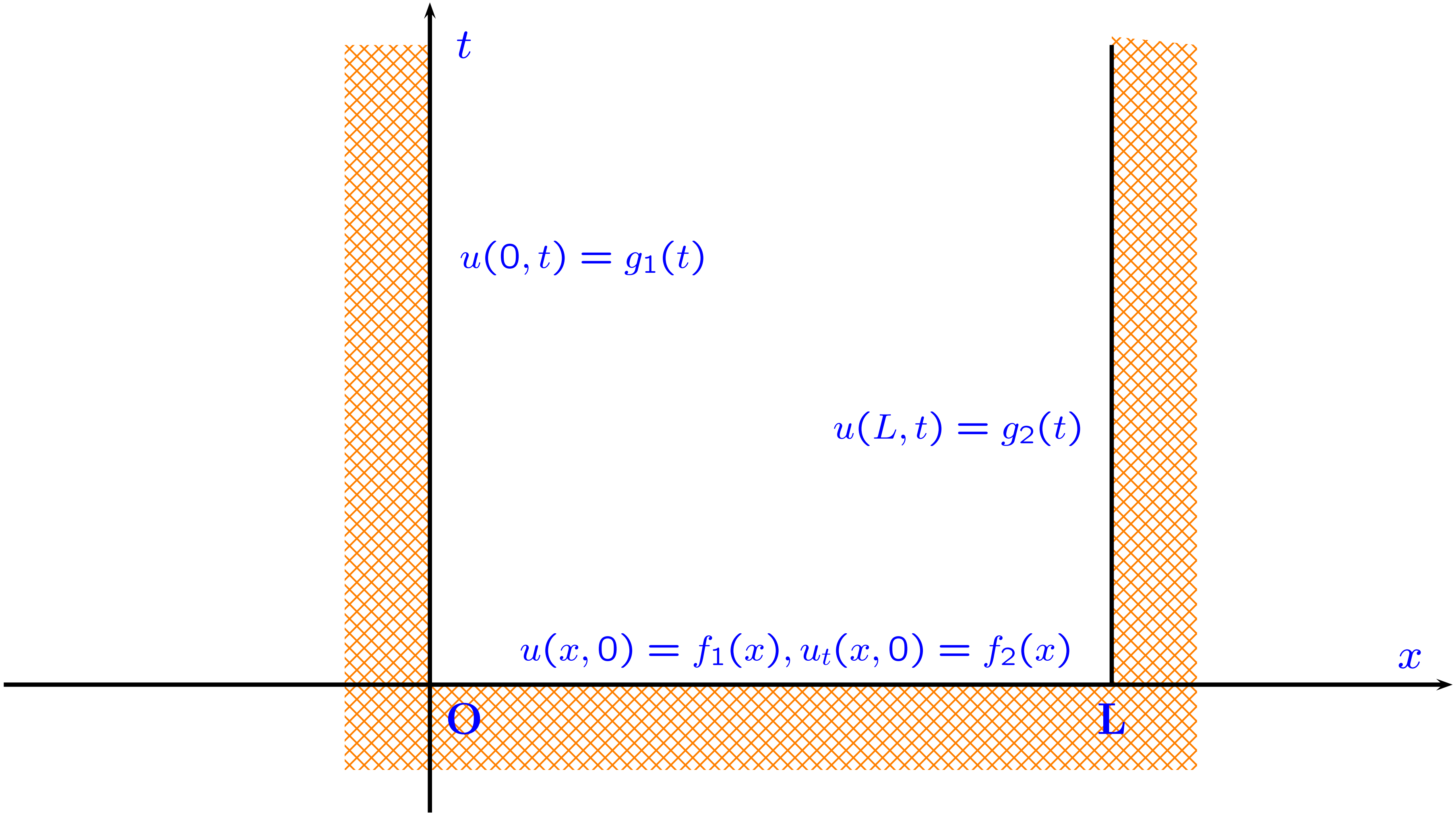
$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x) \qquad && x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= f_2(x) \qquad && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$


t
$u(x,0) = f_1(x)$
O
$u_t(x,0) = f_2(x)$
x

Il problema ai valori iniziali e al contorno

Assegnata una costante $L > 0$ si deve trovare una funzione $u(x,t)$, definita e continua per $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, che soddisfi l'equazione delle onde per $0 < x < L$ e $t > 0$ e le condizioni iniziali:

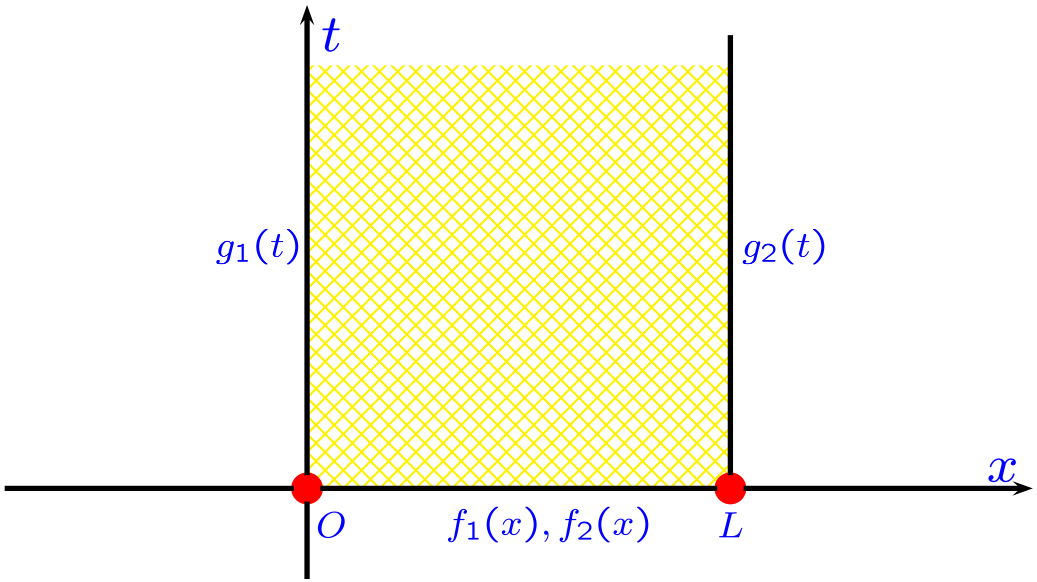
$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= f_1(x) && 0 \leq x \leq L \\
u_t(x,0) &= f_2(x) && 0 \leq x \leq L \\
u(0,t) &= g_1(t) && t \geq 0 \\
u(L,t) &= g_2(t) && t \geq 0.
\end{aligned}
$$



t
u(0, t) = g1(t)
u(L, t) = g2(t)
u(x, 0) = f1(x), ut(x, 0) = f2(x)
x
O
L

Anche per le equazioni iperboliche le funzioni che definiscono le condizioni iniziali devono soddisfare le condizioni di omogeneità agli angoli del dominio:

$$f_1(0) = g_1(0), \quad f_1(L) = g_2(0), \quad f_2(0) = g_1'(0), \quad f_2(L) = g_2'(0).$$



La formula di D'Alembert

La risoluzione per via analitica del problema di Cauchy è possibile effettuando il seguente cambio di variabile:

$$\xi = x + t, \qquad \psi = x - t$$

supponendo $c = 1$ e definendo la funzione

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = u(x(\xi, \psi), t(\xi, \psi)) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \psi), \frac{1}{2}(\xi - \psi)\right).$$

Osserviamo innazitutto che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \psi} = 0.$$

Infatti

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

e, calcolando la derivata parziale seconda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \xi \partial \psi} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) + \frac{\partial t}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0.\end{aligned}$$

L'uguaglianza a zero deriva dall'ipotesi che la funzione $u(x, t)$ soddisfa l'equazione d'onda e dall'uguaglianza delle derivate parziali miste.

Poichè $\mathcal{U}_{\xi\psi} = 0$ possiamo considerare la derivata $\mathcal{U}_\xi$ come funzione della sola variabile ξ quindi integrando rispetto a ψ si ottiene:

$$\mathcal{U}_\xi = F_1(\xi)$$

e, integrando nuovamente rispetto a ξ:

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = \int_0^\xi F_1(z)dz + G_2(\psi),$$

dove F_1 e G_2 sono due funzioni arbitarie differenziabili. Posto

$$G_1(\xi) = \int_0^\xi F_1(z)dz$$

risulta

$$\mathcal{U}(\xi, \psi) = G_1(\xi) + G_2(\psi).$$

Tornando alle variabili x e t si ha che la soluzione deve essere:

$$u(x,t) = G_1(x+t) + G_2(x-t).$$

Sostituendo le condizioni iniziali risulta:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= G_1(x) + G_2(x) = f_1(x) \\ u_t(x,0) &= G_1'(x) - G_2'(x) = f_2(x). \end{aligned}$$

e, differenziando la prima equazione:

$$G_1'(x) + G_2'(x) = f_1'(x)$$

si ricava agevomente:

$$\begin{aligned} G_1'(x) &= \frac{1}{2}\left[f_1'(x) + f_2(x)\right] \\ G_2'(x) &= \frac{1}{2}\left[f_1'(x) - f_2(x)\right], \end{aligned}$$

da cui, integrando rispetto a x, risulta:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1}{2}\left[f_1(x) + \int_0^x f_2(z)dz\right] \\ G_2(x) &= \frac{1}{2}\left[f_1(x) - \int_0^x f_2(z)dz\right]. \end{aligned}$$

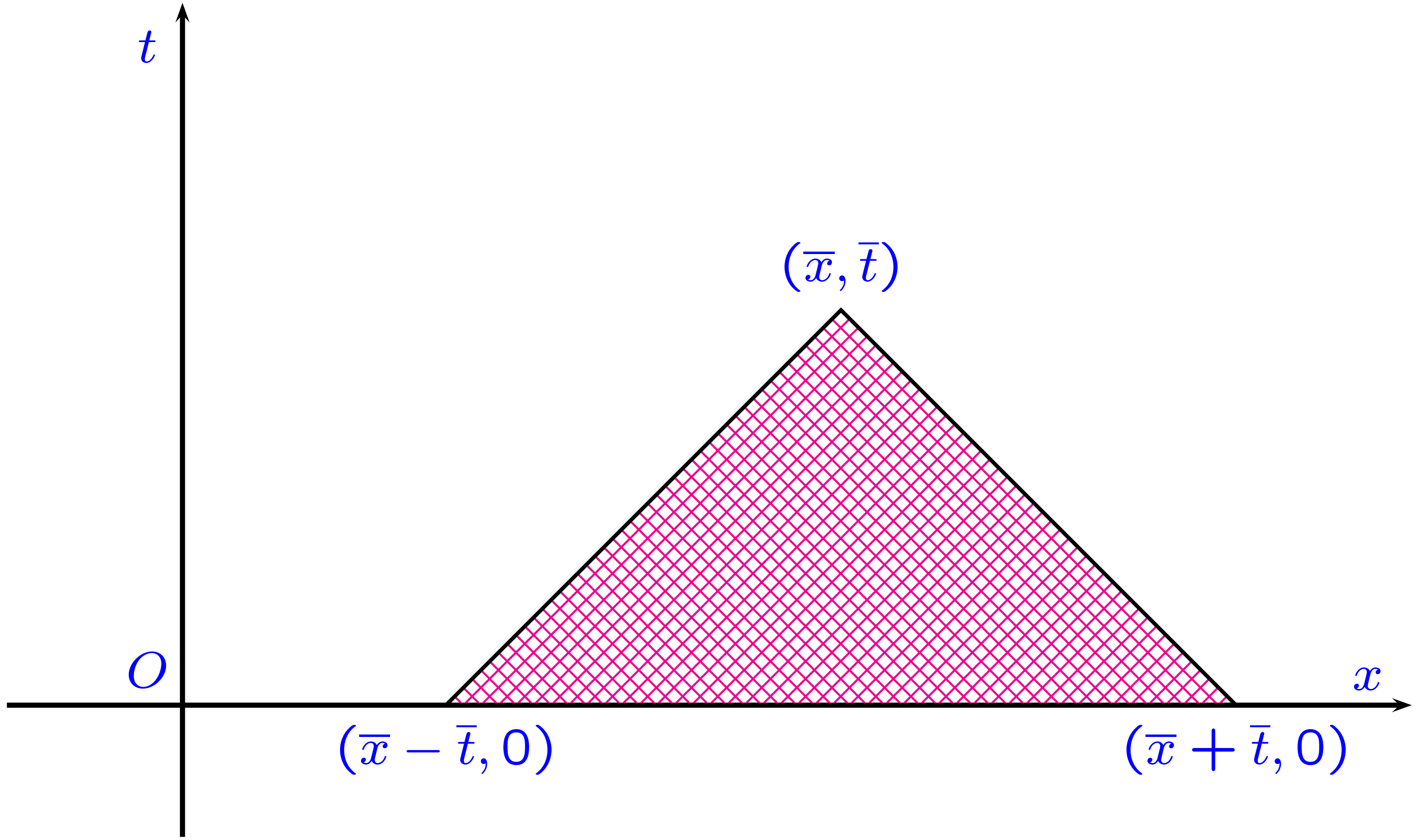
Sostituendo tali formule nell'espressioni di $u(x,t)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f_1(x+t) + \int_0^{x+t} f_2(z)dz\right] + \frac{1}{2}\left[f_1(x-t) - \int_0^{x-t} f_2(z)dz\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[f_1(x+t) + f_1(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} f_2(z)dz\right]. \end{aligned}$$

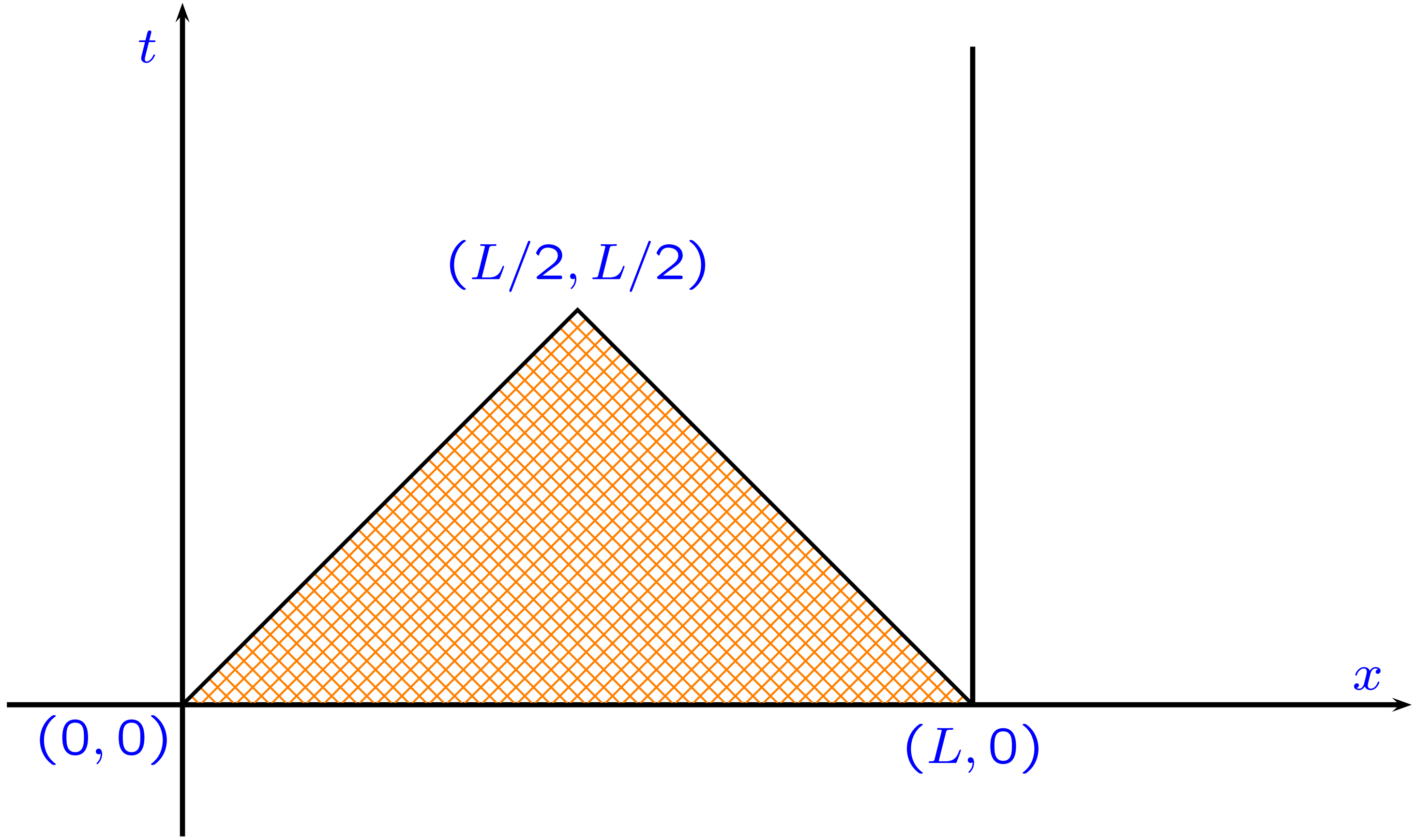
che prende il nome di **Formula di D'Alembert**.

Intervallo e regione di dipendenza

Dalla formula di D'Alembert segue che la funzione $u(\overline{x}, \overline{t})$ è determinata univocamente in base alla conoscenza delle funzioni f_1 ed f_2 tra i punti $(\overline{x} - \overline{t}, 0)$ e $(\overline{x} + \overline{t}, 0)$. L'intervallo $[\overline{x} - \overline{t}, \overline{x} + \overline{t}]$ viene detto intervallo di dipendenza del punto $(\overline{x}, \overline{t})$. La regione interna al triangolo di vertici $(\overline{x}, \overline{t})$, $(\overline{x} - \overline{t}, 0)$ e $(\overline{x} + \overline{t}, 0)$ ed evidenziata nella figura seguente si chiama Regione di dipendenza.


t
$(\overline{x}, \overline{t})$
O
x
$(\overline{x} - \overline{t}, 0)$
$(\overline{x} + \overline{t}, 0)$

Le rette congiungenti i punti $(\overline{x}, \overline{t})$ e $(\overline{x} - \overline{t}, 0)$, $(\overline{x}, \overline{t})$ e $(\overline{x} + \overline{t}, 0)$ sono dette rette caratteristiche dell'equazione d'onda in $(\overline{x}, \overline{t})$.
Osserviamo che, nel caso in cui il problema sia ai valori al contorno, la formula di D'Alembert può essere usata per calcolare la soluzione solo nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(L, 0)$ e $(L/2, L/2)$.


t
$(L/2, L/2)$
x
$(0,0)$
$(L,0)$

Il caso $c \neq 1$

Se la velocità c è diversa da 1 allora la formula di D'Alembert ha la seguente espressione:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_1(x+ct) + f_1(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(z)dz \right]$$

mentre le rette caratteristiche hanno equazione:

$$x = \overline{x} + ct, \qquad x = \overline{x} - ct.$$

Una proprietà fondamentale è che lungo una delle due rette caratteristiche la soluzione è costante rispetto al tempo. Consideriamo infatti l'equazione d'onda del primo ordine e supponiamo $c > 0$:

$$u_t + cu_x = 0$$

e la retta caratteristica

$$x(t) = \overline{x} + ct.$$

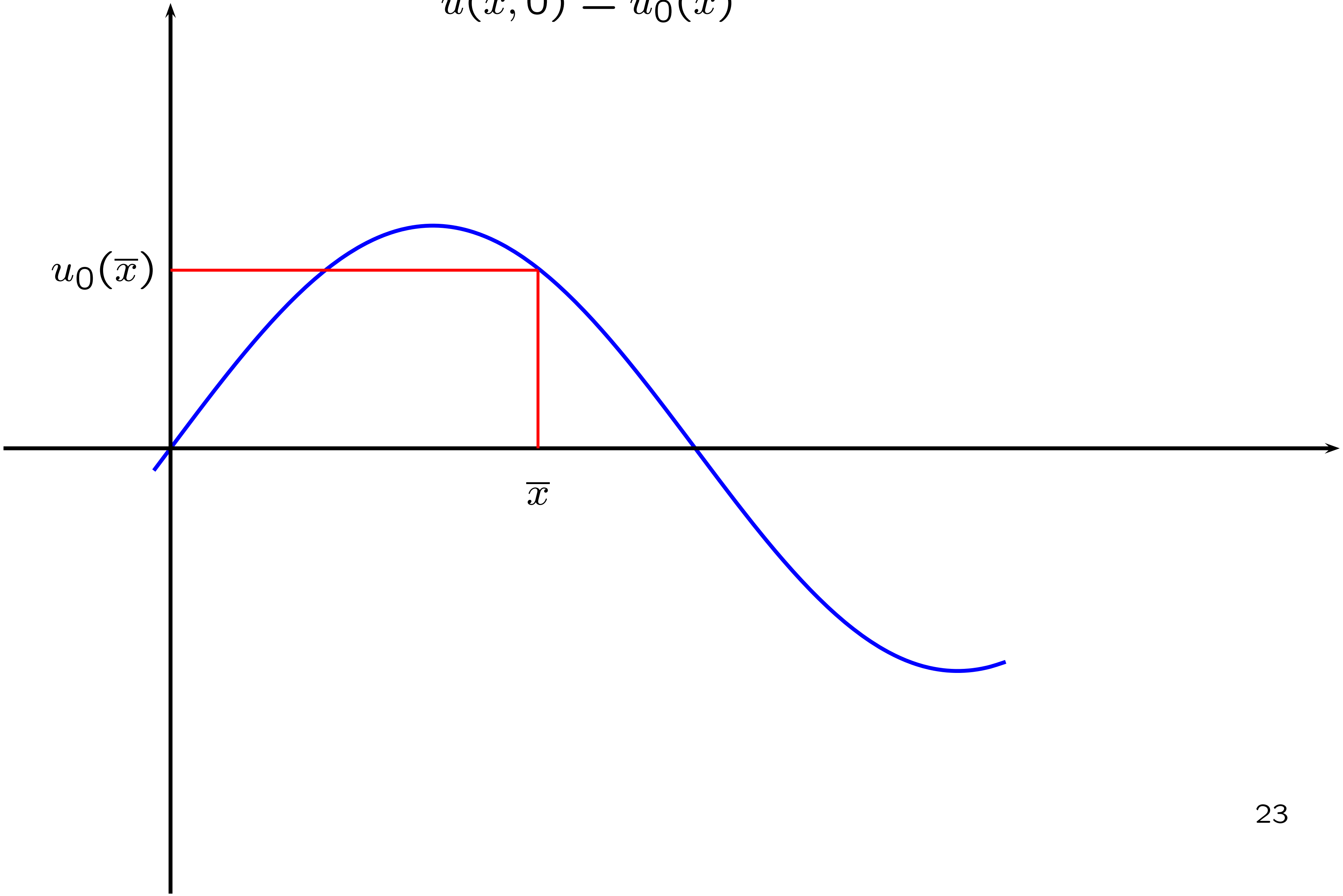
Derivando $u(x(t), t)$ rispetto al tempo

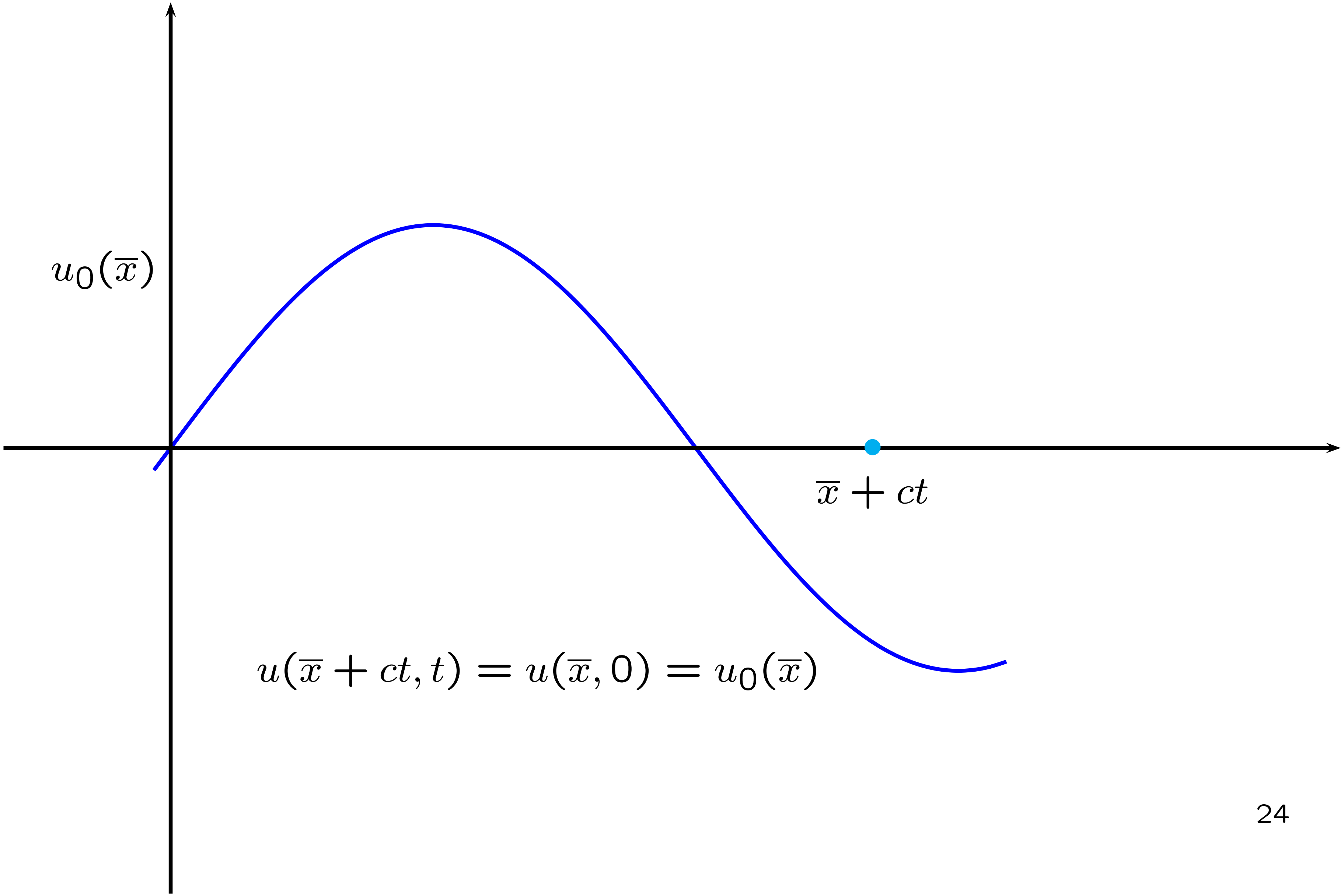
$$\frac{du}{dt}(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

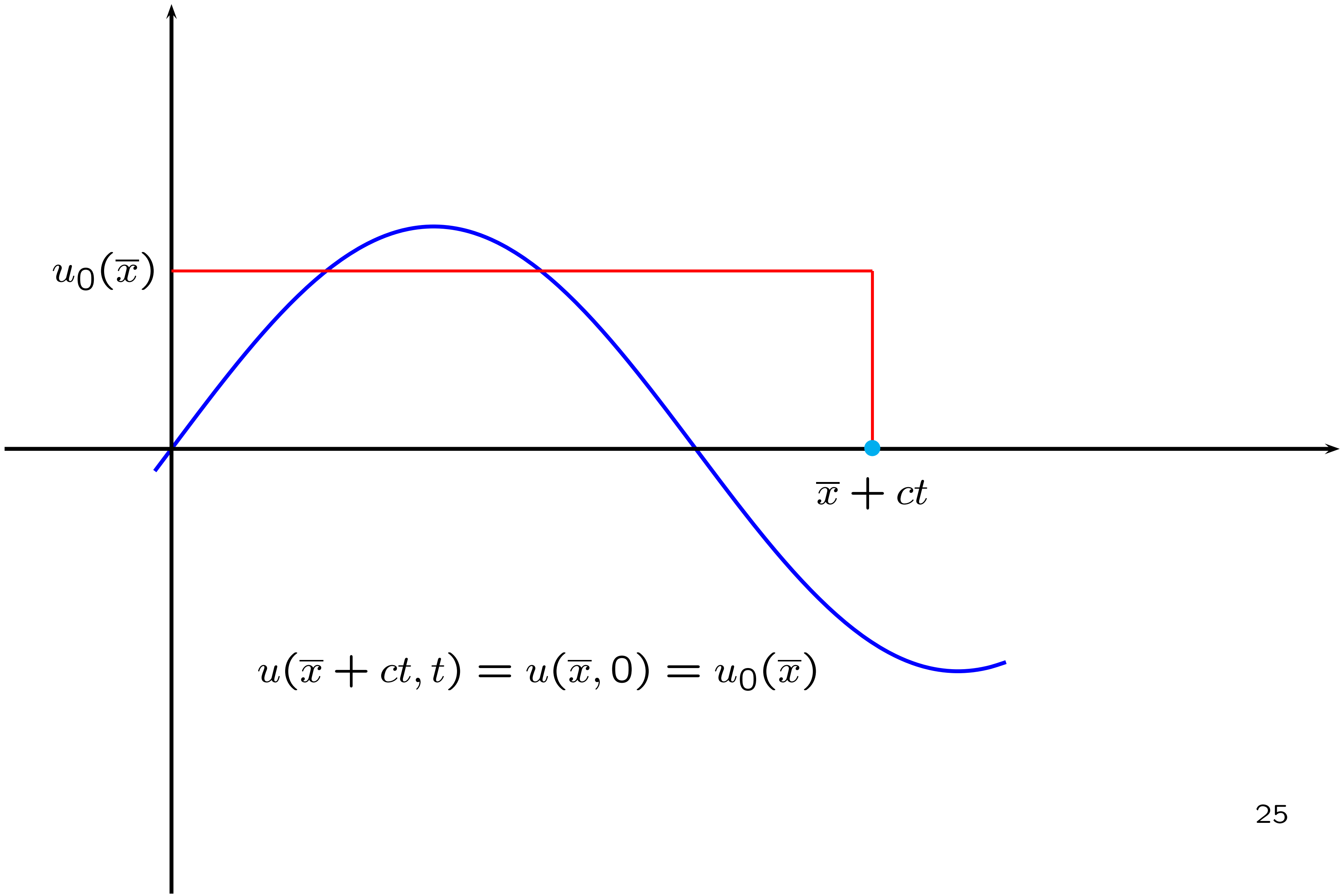
Il metodo delle caratteristiche

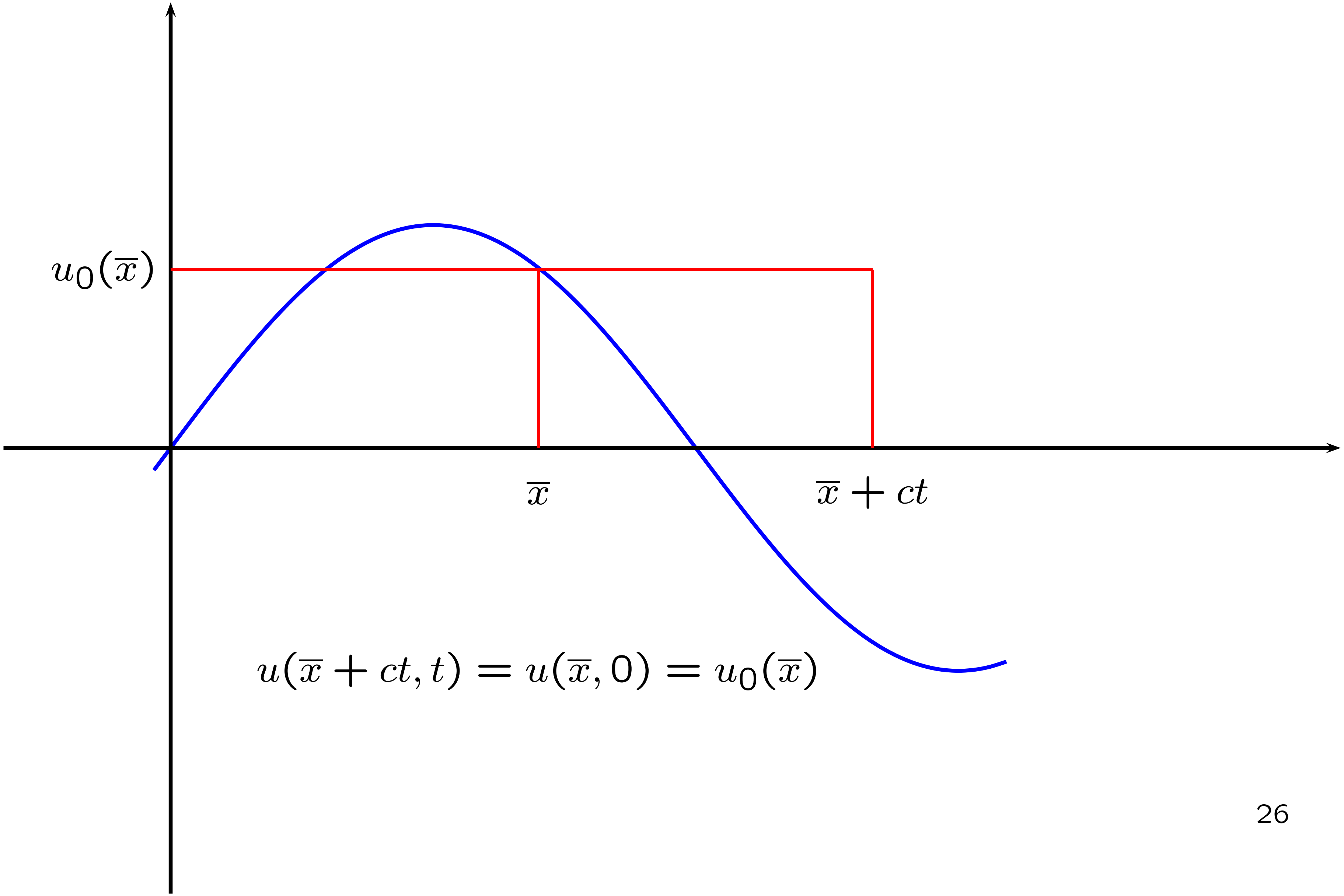
Questa proprietà consente di determinare la soluzione in ogni punto della regione di piano dove e definita l'equazione alle derivate parziali. Supponiamo che $u_0(x)$ sia la condizione iniziale. Tracciamo, nel piano (x, u) tale soluzione:

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

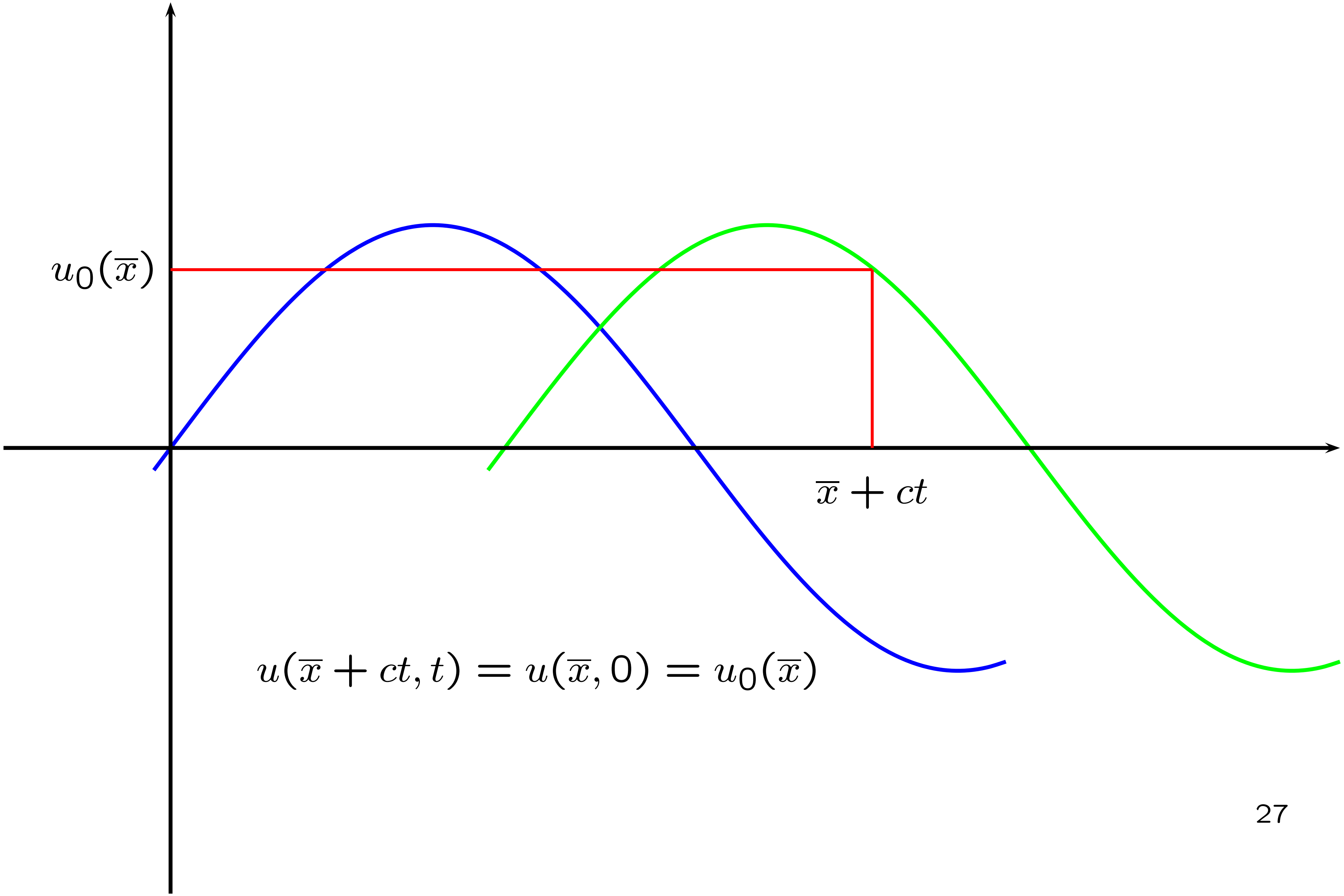



$u_0(\overline{x})$
$\overline{x} + ct$
$u(\overline{x} + ct, t) = u(\overline{x}, 0) = u_0(\overline{x})$


$u_0(\overline{x})$
$\overline{x} + ct$
$u(\overline{x} + ct, t) = u(\overline{x}, 0) = u_0(\overline{x})$

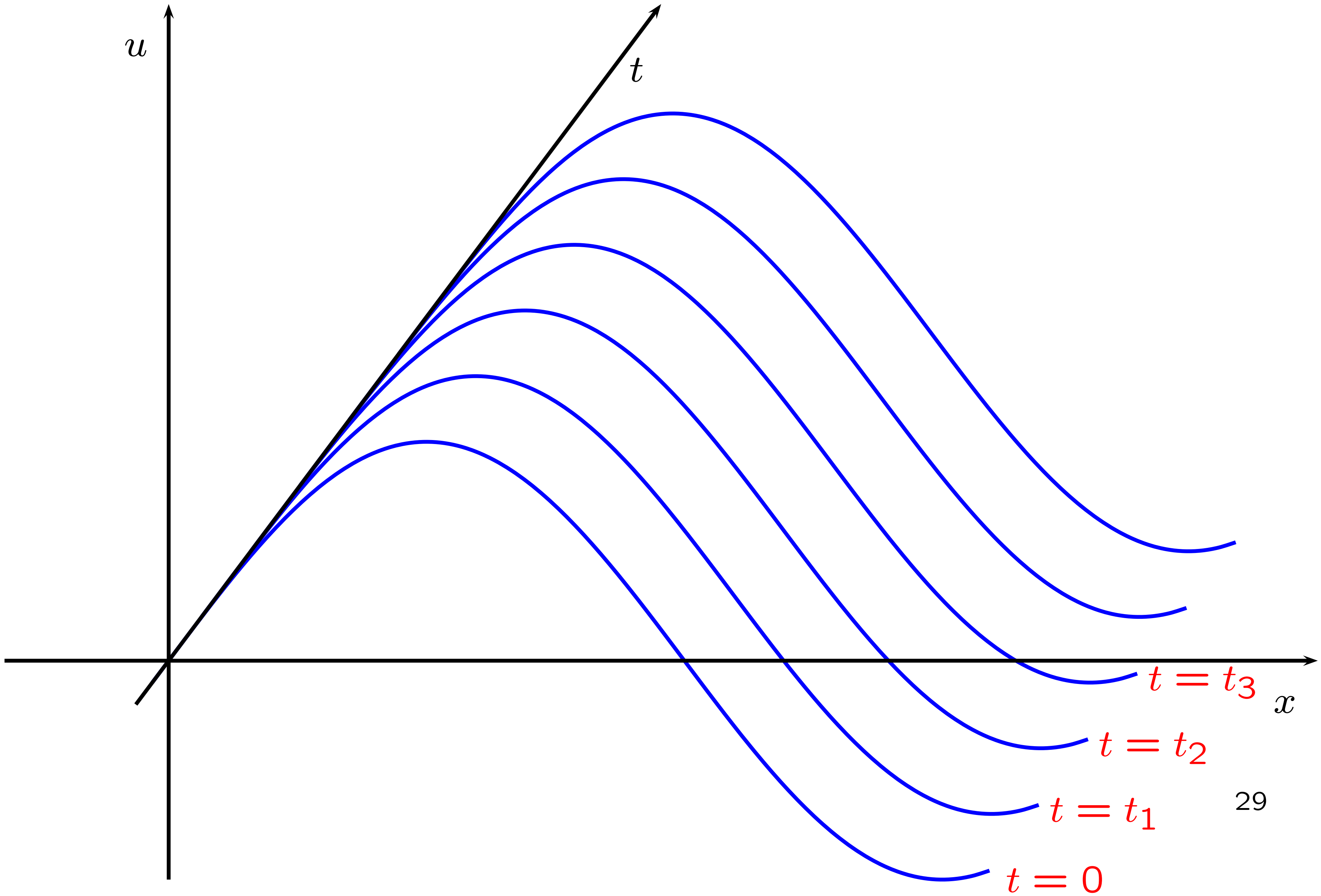


$$u(\overline{x} + ct, t) = u(\overline{x}, 0) = u_0(\overline{x})$$


$u_0(\overline{x})$
$\overline{x} + ct$
$u(\overline{x} + ct, t) = u(\overline{x}, 0) = u_0(\overline{x})$

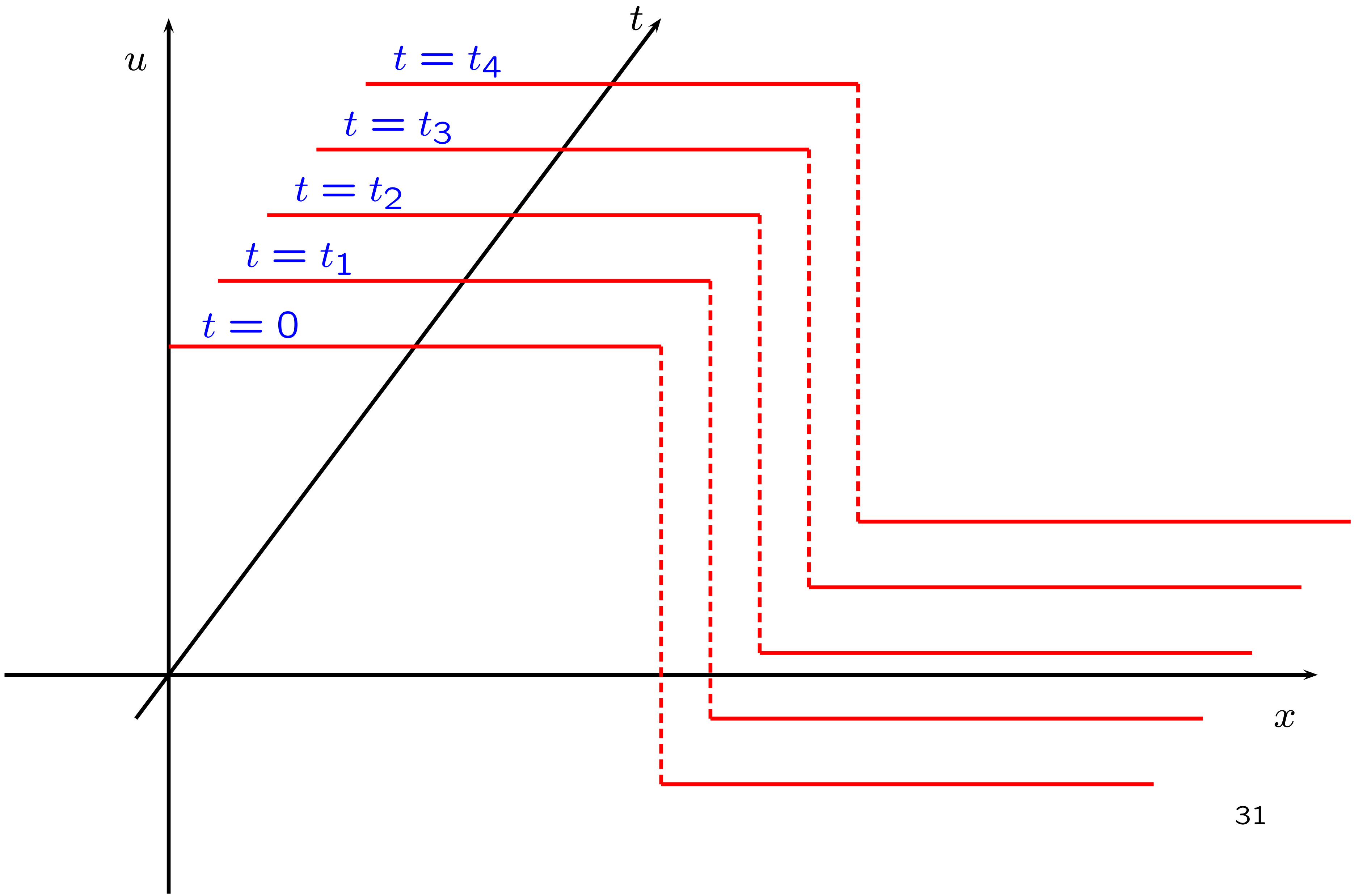
Osservazioni sul Metodo delle Caratteristiche

Nel caso in cui la velocità c è positiva (e l'onda si propaga a velocità costante verso destra) le curve caratteristiche sono rette parallele:



u
t
x
$t = t_3$
$t = t_2$
$t = t_1$
$t = 0$

Se la condizione iniziale è discontinua (per esempio presenta un salto) allora anche la discontinuità si propaga alla medesima velocità dell'onda.
L'uso del metodo delle caratteristiche non crea problemi alla risoluzione di problemi con condizione iniziale non continua.



u
t
$t = t_4$
$t = t_3$
$t = t_2$
$t = t_1$
$t = 0$
x

Il metodo di Lax-Friedrichs

Un primo modo per risolvere numericamente l'equazione d'onda del primo ordine potrebbe essere quello di approssimare la derivata temporale con la formula alle differenze in avanti e la derivata spaziale con quella alle differenze centrali, ottenendo la seguente formula:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Tale metodo risulta instabile (basta applicare l'analisi di von Neumann).

Il metodo di Lax-Friedrichs consiste nello stabilizzare tale metodo sostituendo il valore l'approssimazione u_j^n con il valor medio:

$$u_j^n \longrightarrow \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$$

ottenendo la seguente espressione:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Il metodo di Lax-Wendroff

Il metodo di Lax-Wendroff, esplicito, risolve numericamente l'equazione partendo dall'espansione in serie di Taylor della funzione $u(x_j, t_n + \Delta t)$ rispetto alla variabile temporale e prendendo (x_j, t_n) come punto iniziale:

$$u(x_j, t_n + \Delta t) \simeq u(x_j, t_n) + \Delta t u_t(x_j, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_j, t_n).$$

Sostituendo la derivata prima rispetto a t:

$$u(x_j, t_n + \Delta t) \simeq u(x_j, t_n) - c\Delta t u_x(x_j, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_j, t_n)$$

La funzione $u(x,t)$ risolve anche l'equazione del secondo ordine, quindi

$$u(x_j, t_n + \Delta t) \simeq u(x_j, t_n) - c\Delta t u_x(x_j, t_n) + \frac{(c\Delta t)^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n).$$

Le derivate spaziali vengono approssimate usando la solita formula per $u_{xx}(x_j, t_n)$ e quella alle differenze centrali per la derivata prima.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{(c\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right).$$

Posto

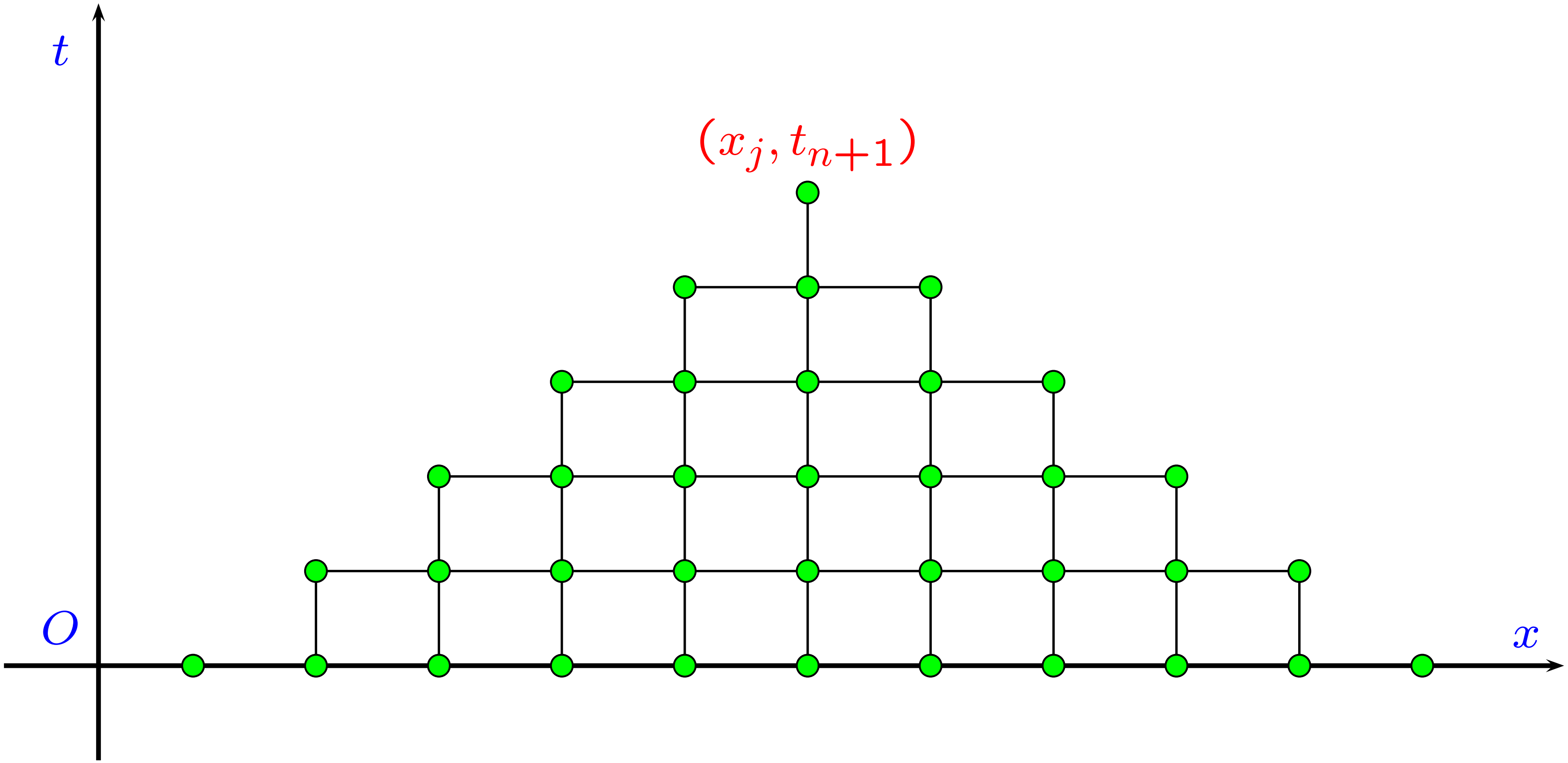
$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

si ottiene lo schema

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}(1+\alpha)u_{j-1}^n + (1-\alpha^2)u_j^n - \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)u_{j+1}^n. \end{aligned}$$

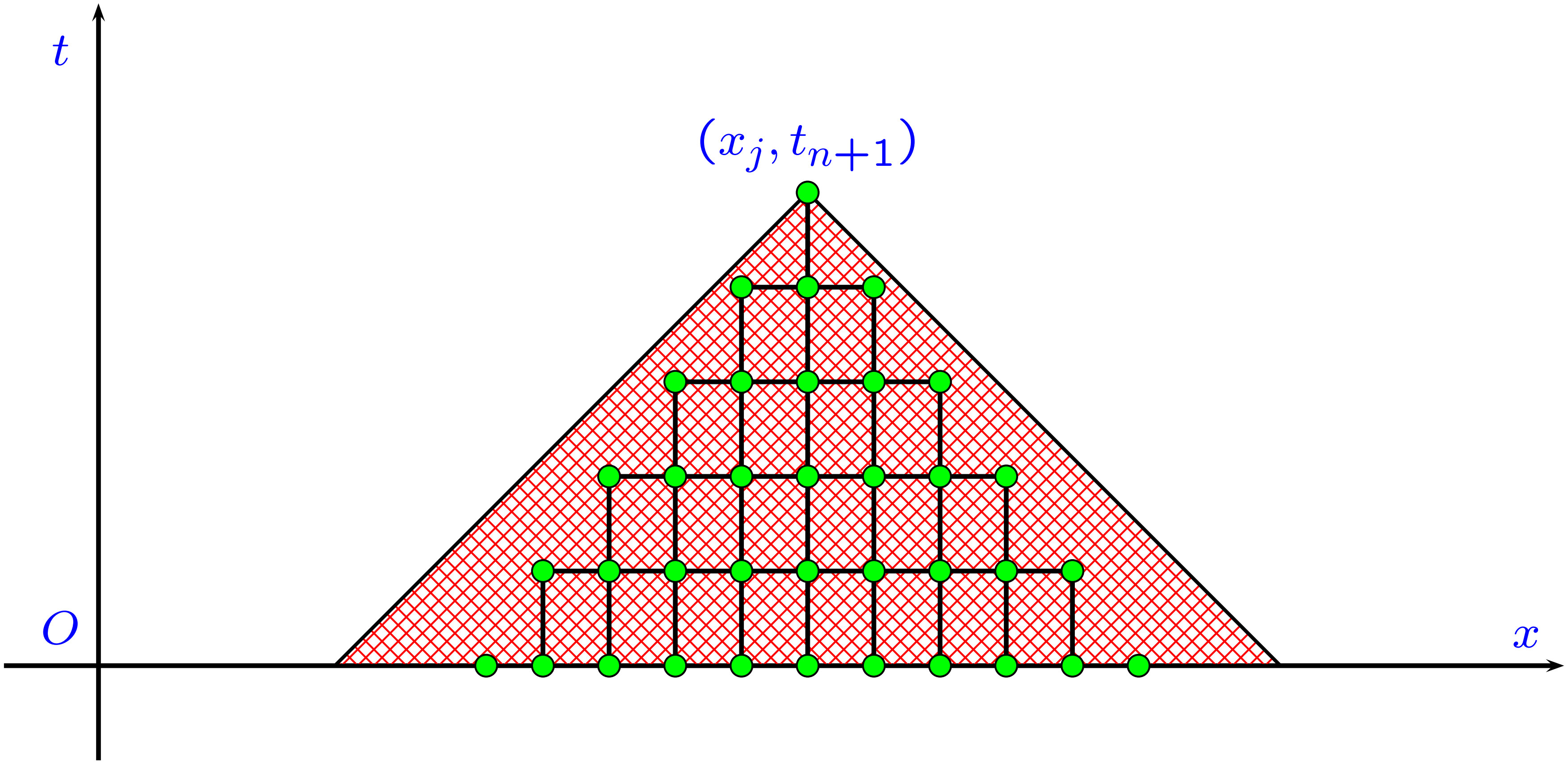
Condizione di Courant, Friedrichs e Lewy

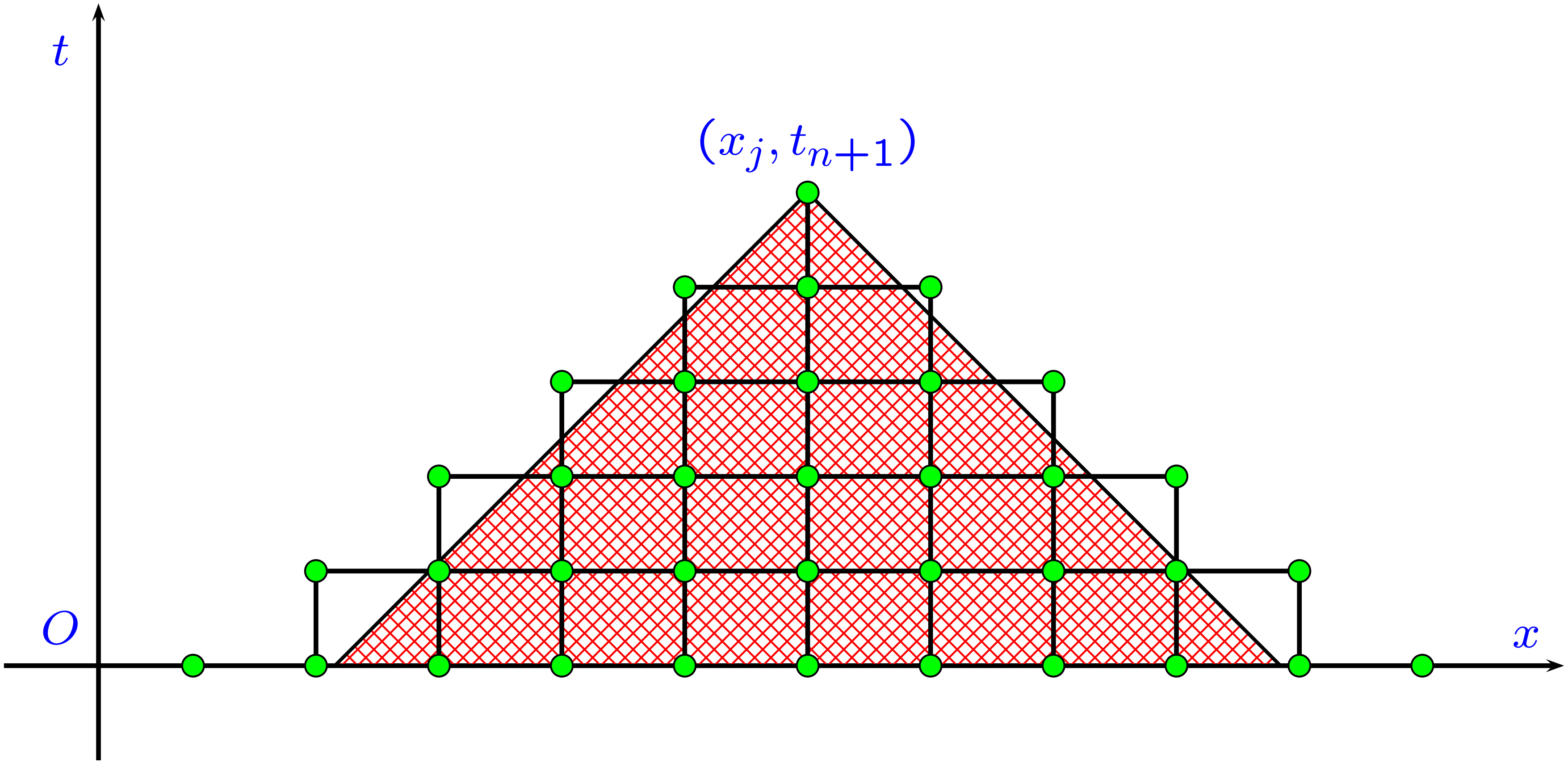
Supponiamo di dover risolvere numericamente l'equazione d'onda e consideriamo $c = 1$.
L'approssimazione u_j^{n+1} dipende, comunemente, da approssimazioni al livello precedente n, in particolare da u_j^n, u_{j-1}^n e u_{j+1}^n. A loro volta tali approssimazioni dipendono da altre al livello $n - 1$, in particolare da $u_{j\pm k,n-1}$, con $k = -2, \ldots, 2$, così via. In questo modo procedendo a ritroso è possibile definire una specie di dominio di dipendenza discreto che contiene tutte le approssimazioni, dal livello 0 al livello n, necessarie al calcolo di u_j^n.


t
(x_j, t_{n+1})
O
x

Appare ovvio che tale insieme di approssimazioni, che possiamo considerare come se fosse una specie di dominio di dipendenza discreto, debba avere necessariamente un legame con quello continuo che abbiamo definito in precedenza.
Si presentano due possibilità:

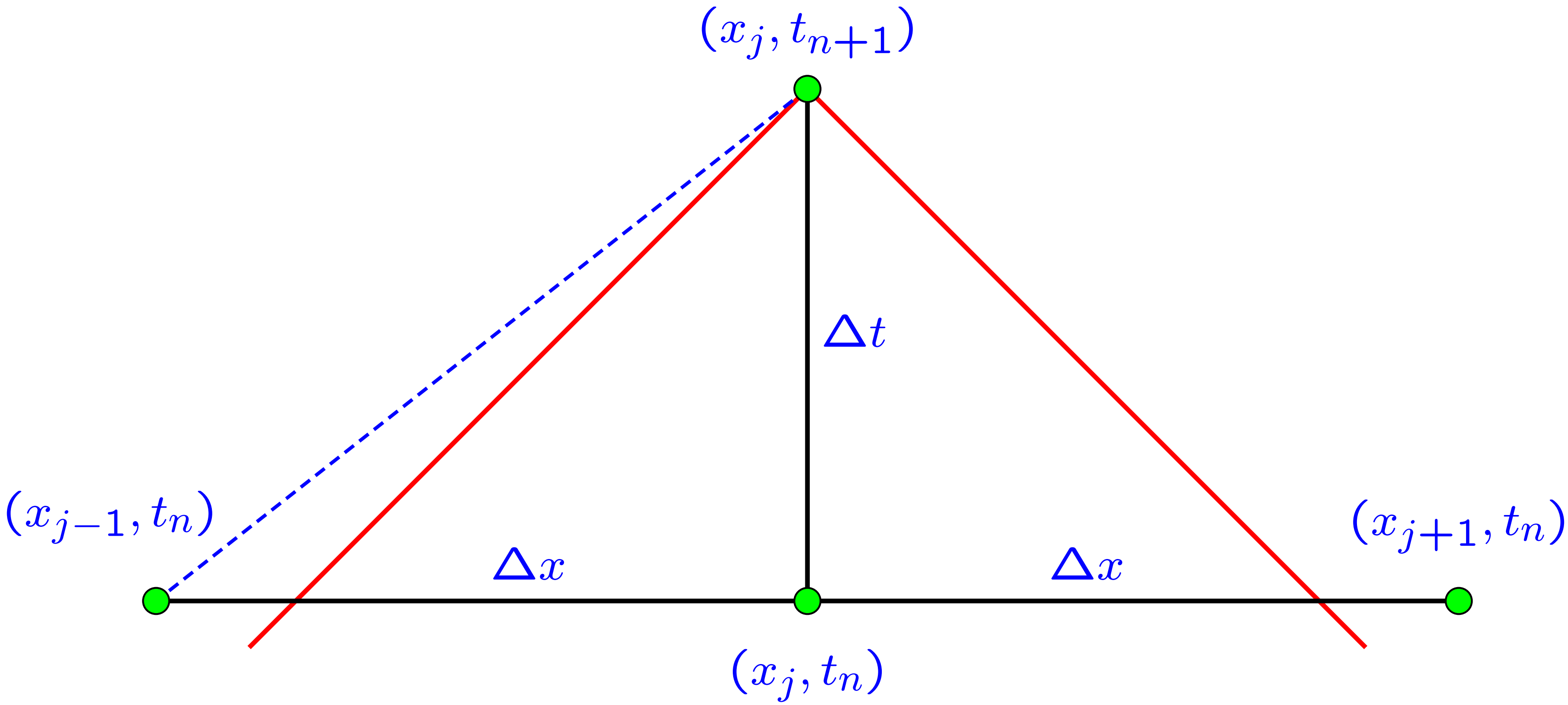
1. Il dominio continuo contiene quello discreto
2. Il dominio continuo non contiene interamente quello discreto.


t
(x_j, t_{n+1})
O
x


t
(x_j, t_{n+1})
O
x

Se il dominio continuo includesse quello discreto questo vorrebbe dire che l'approssimazione u_j^{n+1} è stata ottenuta considerando solo una parte dei valori da cui dipende il valore teorico $u(x_j, t_{n+1})$, sicuramente tale approssimazione numerica non può essere un valore affidabile. Al contrario se il dominio discreto contiene quello continuo significa che la soluzione numerica ha utilizzato effettivamente tutti i dati necessari (e anche altri).

Dal punto di vista matematico si deve richiedere che tale situazione si verifichi, imponendo opportune condizioni sui passi di discretizzazione spaziale e temporale. Infatti è necessario richiedere che la retta caratteristica passante per (x_j, t_{n+1}) intersechi la retta di dipendenza del metodo numerico.


(x_j, t_{n+1})
Δt
(x_{j-1}, t_n)
Δx
Δx
(x_{j+1}, t_n)
(x_j, t_n)

La condizione viene verificata se la retta tratteggiata blu ha un coefficiente angolare inferiore rispetto a quello della retta caratteristica (che in questo caso vale 1), cioè se

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Tale relazione prende il nome di Condizione di Courant, Friedrichs e Lewy.

Se $c \neq 1$ allora la condizione diventa

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Un metodo esplicito per l'equazione d'onda

Consideriamo ora l'equazione d'onda del secondo ordine:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0.$$

Come al solito si costruisce la griglia suddividendo l'intervallo $[0, L]$ in sottointervalli di ampiezza

$$\Delta x = \frac{L}{N+1}$$

e definendo gli istanti di tempo multipli di un valore Δt:

$$x_j = j\Delta x, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N{+}1, \qquad t_n = n\Delta t, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Le derivate parziali seconde sono approssimate nel modo consueto:

$$u_{xx}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{tt}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

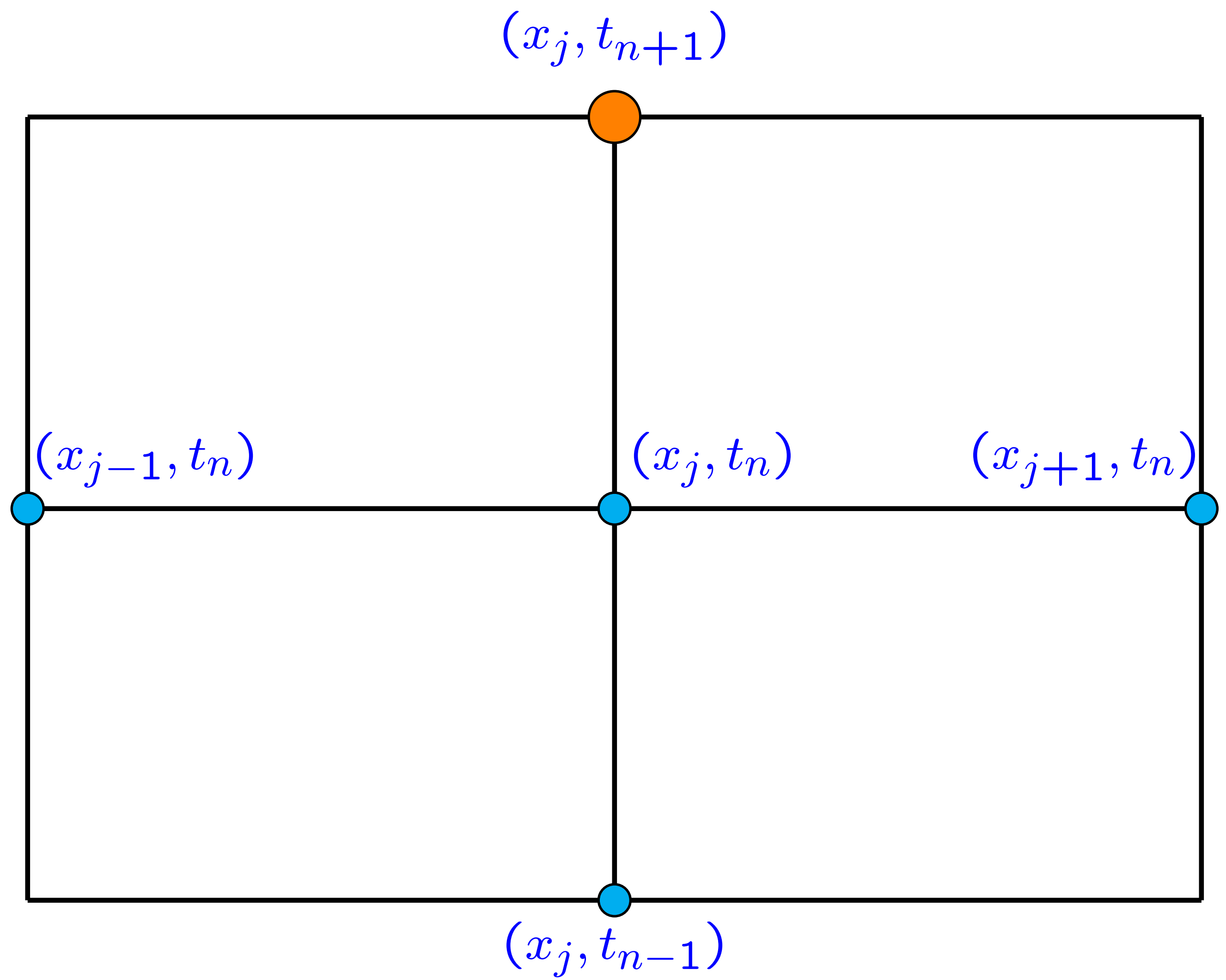
$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \; \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{(c\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Poniamo $\alpha = (c\Delta t)^2/(\Delta x)^2$ e ricaviamo u_j^{n+1}:

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \alpha(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + 2(1-\alpha)u_j^n + \alpha u_{j+1}^n - u_j^{n-1}.$$


(x_j, t_{n+1})
(x_{j-1}, t_n)
(x_j, t_n)
(x_{j+1}, t_n)
(x_j, t_{n-1})

Il primo insieme di valori che è possibile calcolare è u_j^2, però è necessario anche conoscere u_j^1, poichè i valori u_j^0 sono forniti dalla conoscenza della condizione iniziale

$$u_j^0 = u(x_j, 0) = f_1(x_j).$$

Il problema è ora quello di approssimare la soluzione nei punti $(x_j, \Delta t)$:

$$u_j^1 \simeq u(x_j, \Delta t), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Per questo motivo si utilizza l'espansione in serie di Taylor:

$$u(x_j, \Delta t) \simeq u(x_j, 0) + \Delta t u_t(x_j, 0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_j, 0).$$

Poichè la funzione $u(x,t)$ soddisfa l'equazione d'onda, allora possiamo sostituire u_{tt} con $c^2 u_{xx}$, e le condizioni iniziali per $u(x,t)$ e $u_t(x,t)$:

$$u(x_j, \Delta t) \simeq f_1(x_j) + \Delta t f_2(x_j) + \frac{(c\Delta t)^2}{2} u_{xx}(x_j, 0).$$

L'ultimo termine della serie viene approssimato come al solito:

$$u_{xx}(x_j, 0) \simeq \frac{u(x_{j+1}, 0) - 2u(x_j, 0) + u(x_{j-1}, 0)}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \frac{f_1(x_{j+1}) - 2f_1(x_j) + f_1(x_{j-1})}{(\Delta x)^2}$$

cosicchè si ottiene la seguente approssimazione:

$$u_j^1 \simeq f_1(x_j) + \Delta t f_2(x_j) + \frac{(c\Delta t)^2}{2} \frac{f_1(x_{j+1}) - 2f_1(x_j) + f_1(x_{j-1})}{(\Delta x)^2}.$$

Un metodo implicito per l'equazione d'onda

Per risolvere l'equazione d'onda si può discretizzare in modo diverso la derivata seconda di tipo spaziale:

$$u_{xx}(x_j, t_n) \simeq \frac{1}{2}\left[u_{xx}(x_j, t_{n+1}) + u_{xx}(x_j, t_{n-1})\right]$$

$$u_{tt}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$u_{xx}(x_j, t_{n+1}) \simeq \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{xx}(x_j, t_{n-1}) \simeq \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{xx}(x_j,t_n) \simeq \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x)^2}\right].$$

Sostituendo le approssimazioni nell'equazione alle derivate parziali si ottiene:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2\left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x)^2}\right].$$

Posto

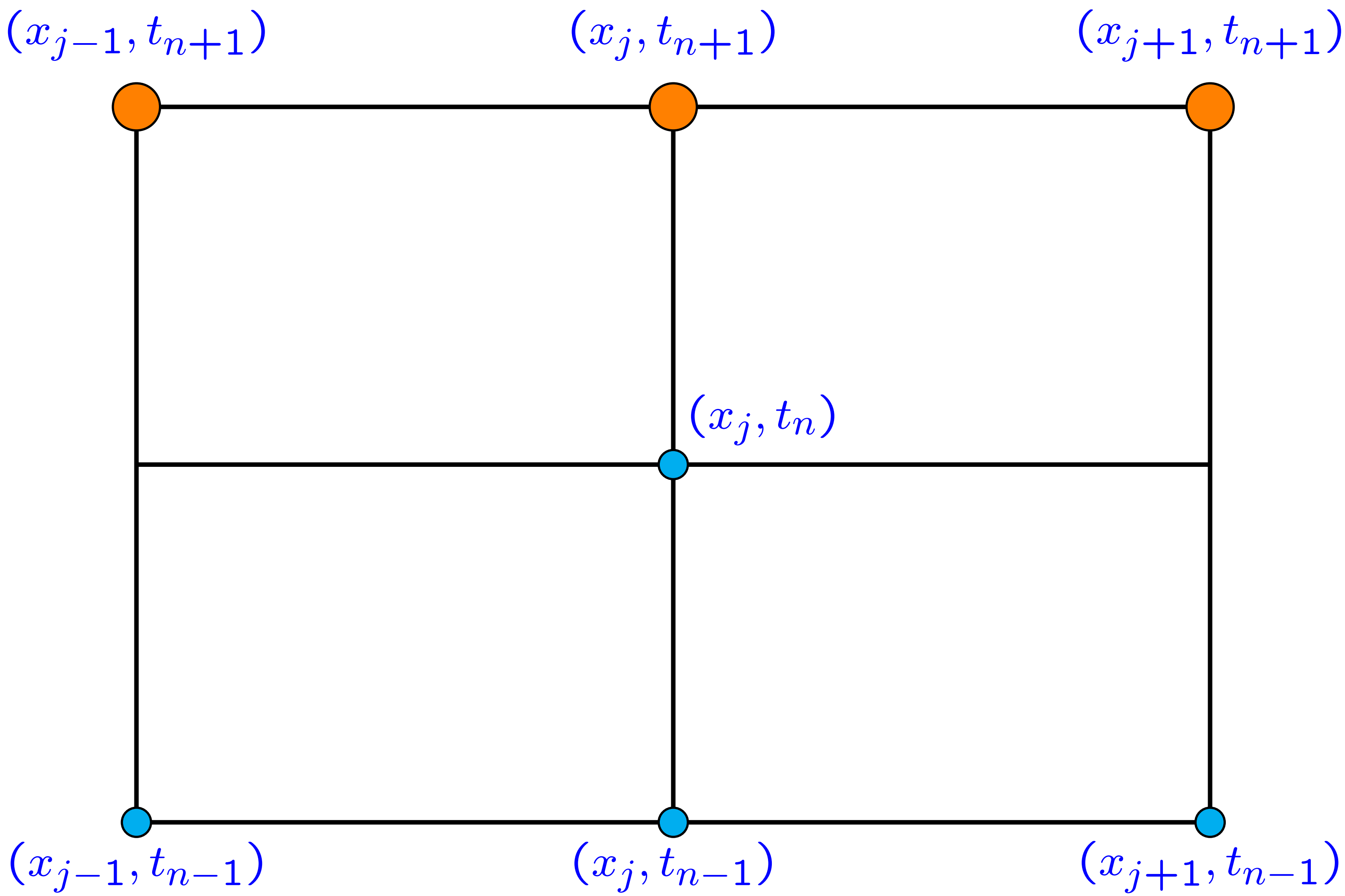
$$\rho = \frac{(c\Delta t)^2}{(\Delta t)^2}$$

si arriva quindi alla formulazione finale:

$$-\rho u_{j-1}^{n+1} - (1+2\rho)u_j^{n+1} - \rho u_{j+1}^{n+1} = \rho u_{j-1}^{n-1} + (1-2\rho)u_j^{n-1} + \rho u_{j+1}^{n-1} + 2u_j^n$$

Se la soluzione numerica è nota ai livelli t_n e t_{n-1} allora, utilizzando le condizioni al contorno, la formulazione del metodo costituisce un sistema lineare.

Per calcolare la soluzione al livello t_1 si può utilizzare lo stesso di approssimazione visto per il metodo esplicito.


(x_{j-1}, t_{n+1})
(x_j, t_{n+1})
(x_{j+1}, t_{n+1})
(x_j, t_n)
(x_{j-1}, t_{n-1})
(x_j, t_{n-1})
(x_{j+1}, t_{n-1})

Equazioni Iperboliche non Lineari

L'equazione iperbolica nella forma

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

viene detta in forma conservativa.

Nell'ipotesi che la funzione $F(u)$ sia sufficientemente regolare rispetto a u e a x allora l'equazione può essere riscritta nella forma

$$\begin{cases} u_t + F'(u)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

viene detta in forma non conservativa.

Osservazioni

- La funzione $F(u)$ viene detta flusso dell'equazione;
- Se $x \in [a, b]$ allora spesso si aggiunge la condizione di periodicità:

$$u(a,t) = u(b,t), \qquad t \geq 0.$$

• Gli esempi più diffusi di questo tipo di equazioni sono l'Equazione di Burgers:

$$F(u) = \frac{1}{2}u^2$$

e l'Equazione di Kortweg-de-Vries:

$$F(u) = \kappa u + \frac{3\kappa}{4\eta}u^2 + \frac{\kappa\eta^2}{6}u_{xx};$$

• In questo tipo di equazioni spesso dati iniziali discontinui generano soluzioni regolari mentre dati iniziali continui possono generare soluzioni discontinue (shock).

Dopo aver suddiviso l'intervallo $[a, b]$ di variabilità di x in sottointervalli $[x_j, x_{j+1}]$ di uguale ampiezza Δx (nell'eventualità in cui l'intervallo sia infinito allora si fissano gli estremi in modo opportuno), si definisce una decomposizione detta duale di intervalli:

$$I_j = \left]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right[, \qquad x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2}.$$

Integrando la forma conservativa dell'equazione iperbolica tra t_n e t_{n+1} rispetto al tempo e tra $x_{j-\frac{1}{2}}$ e $x_{j+\frac{1}{2}}$ rispetto allo spazio si ottiene

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_{n+1})dx - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n)dx$$

$$+ \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} F\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F\left(u\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt\right] = 0.$$

Definiamo l'approssimazione della media di $u(x, t_n)$ sull'intervallo I_j:

$$\overline{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx.$$

Sia

$$H_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt$$

la media sull'intervallo temporale $[t_n, t_{n+1}]$ del flusso in $x_{j+\frac{1}{2}}$.

Posto

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

allora la relazione precedente può essere riscritta come

$$\overline{u}_j^{n+1} = \overline{u}_j^n - \alpha[H_{j+1/2}^n - H_{j-1/2}^n]$$

Da tale relazione si può dedurre il seguente schema numerico

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha[\Phi_{j+1/2}^n - \Phi_{j-1/2}^n]$$

in cui $\Phi_{j+1/2}^n = \Phi(u_j^n, u_j^{n+1})$ è il cosiddetto flusso numerico che approssima $H_{j+1/2}^n$.

Ogni schema numerico (esplicito) può essere scritto sotto forma

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-l}^n, \dots, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, \dots, u_{j+l}^n)$$

in cui G è una particolare funzione.

Proprietà dei Metodi Numerici

Consistenza

Uno schema numerico è detto consistente se la funzione di flusso numerica coincide con il vero flusso F nel caso di funzioni costanti, cioè:

$$\Phi(u, u) = F(u), \qquad \forall u.$$

Monotonia

Si dice che uno schema numerico è detto monotono se la funzione G aumenta in maniera monotona rispetto ad ognuna delle variabili. In questo caso un tale schema è limitato, cioè:

$$\exists C > 0 \ : \ \sup_{j,n} |u_j^n| \le C.$$

La condizione di Courant-Friedrichs-Lewy

Per l'equazione iperbolica non lineare la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy diventa

$$|F'(u)|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

disequazione che è sicuramente soddisfatta se

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\max|F'(u)|}.$$

Il passo di discretizzazione temporale deve soddisfare la seguente disequazione

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max |F'(u)|}.$$

Il problema di tale vincolo è che è molto difficile stimare il massimo di $F'(u)$, funzione che spesso è non lineare. Spesso viene approssimata usando il rapporto incrementale tra due approssimazioni successive, quindi in modo locale, cosicchè il metodo numerico diventa a passo variabile, perchè il valore Δt può cambiare ad ogni passo temporale.

Il caso dell'equazione di Burgers

Nel caso dell'equazione di Burgers

$$F(u) = \frac{1}{2}u^2$$

quindi

$$F'(u) = u.$$

Osservazione. Le caratteristiche sono rette ma non parallele.

Osservazione. Il comportamento delle soluzioni è simile al caso delle equazioni paraboliche, quindi si può ipotizzare che il massimo di $u(x,t)$ coincida con il massimo della condizione iniziale:

$$\max |F'(u)| = \max |u(x,t)| = \max_x |u(x,0)|.$$

Lo Schema di Lax-Friedrichs

La funzione di flusso numerica ha la seguente espressione:

$$\Phi^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[F^n_{j+1} - F^n_j\right] - \frac{1}{2\alpha}\left[u^n_{j+1} - u^n_j\right]$$

con $F^n_j = F(u^n_j)$.
Lo schema numerico si scrive quindi

$$u^{n+1}_j = \frac{1}{2}\left[u^n_{j+1} + u^n_{j-1}\right] - \frac{\alpha}{2}\left[F^n_{j+1} - F^n_{j-1}\right].$$

Si tratta di uno schema del primo ordine che è monotono se

$$|F'(u^n_j)| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \forall j, n.$$

Lo Schema di Godunov

La soluzione viene approssimata utilizzando una funzione costante a tratti. Il problema viene affrontato come se fosse un insieme di problemi con condizione iniziale che presenta diversi salti. In particolare si cerca, ad un generico istante di tempo t_n la funzione $u^*(x,t)$, con $t \in [t_n, t_{n+1}]$, soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t - [F(u)]_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, t_n) = u_j^n & x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}. \end{cases}$$

Se Δt è sufficientemente piccolo allora non ci sono interazioni tra questi problemi locali.
Si ha quindi

$$u^*(x,t) = \overline{u}\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_n}; u_j^n, u_{j+1}^n\right)$$

dove $x \in [x_j, x_{j+1}]$ e $t \in [t_n, t_{n+1}]$.
Il valore u_j^{n+1} è ottenuto come media di $u^*(x, t^{n+1})$ su $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^*(x, t_{n+1}) dx.$$

Lo schema numerico di Godunov diventa

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(\overline{u}(0; u_j^n, u_j^{n+1}) - F(\overline{u}(0; u_{j-1}^n, u_j^n)\right].$$

In generale solitamente lo schema di Godunov non si usa esattamente nei termini visti ma viene semplificato scegliendo il valore del flusso numerico uguale a quello del flusso dell'equazione valutato in un'approssimazione in x_j o x_{j+1}.

In questo caso si sceglie il flusso numerico ponendo:

$$\Phi^n_{j+1/2} = \begin{cases} F(u^n_j) & \text{se } \dfrac{F(u^n_{j+1}) - F(u^n_j)}{u^n_{j+1} - u^n_j} \geq 0 \\ & \\ F(u^n_{j+1}) & \text{se } \dfrac{F(u^n_{j+1}) - F(u^n_j)}{u^n_{j+1} - u^n_j} < 0. \end{cases}$$

e quindi il metodo numerico ha la seguente espressione

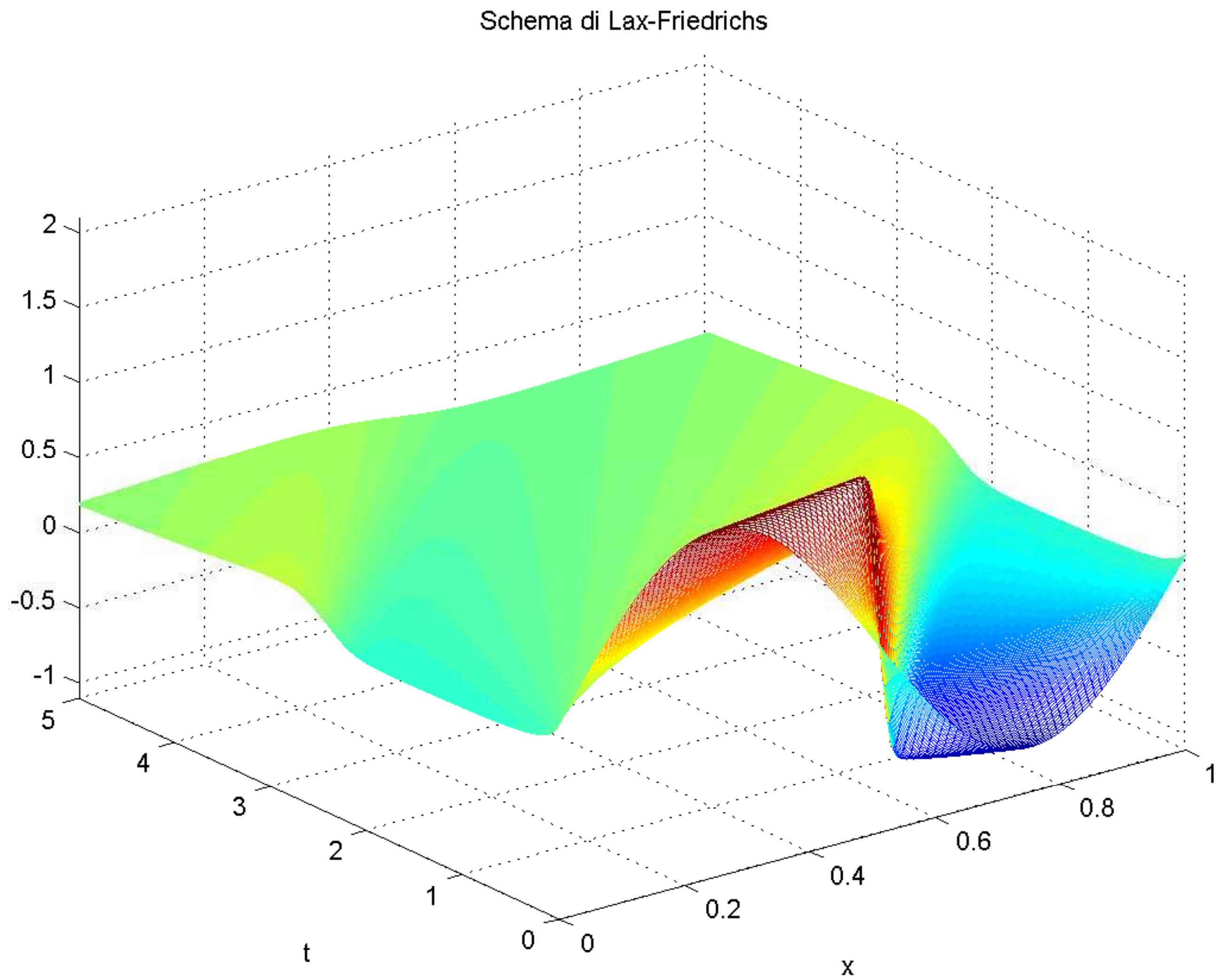
$$u^{n+1}_j = u^n_j - \alpha \left[\Phi^n_{j+1/2} - \Phi^n_{j-1/2} \right].$$

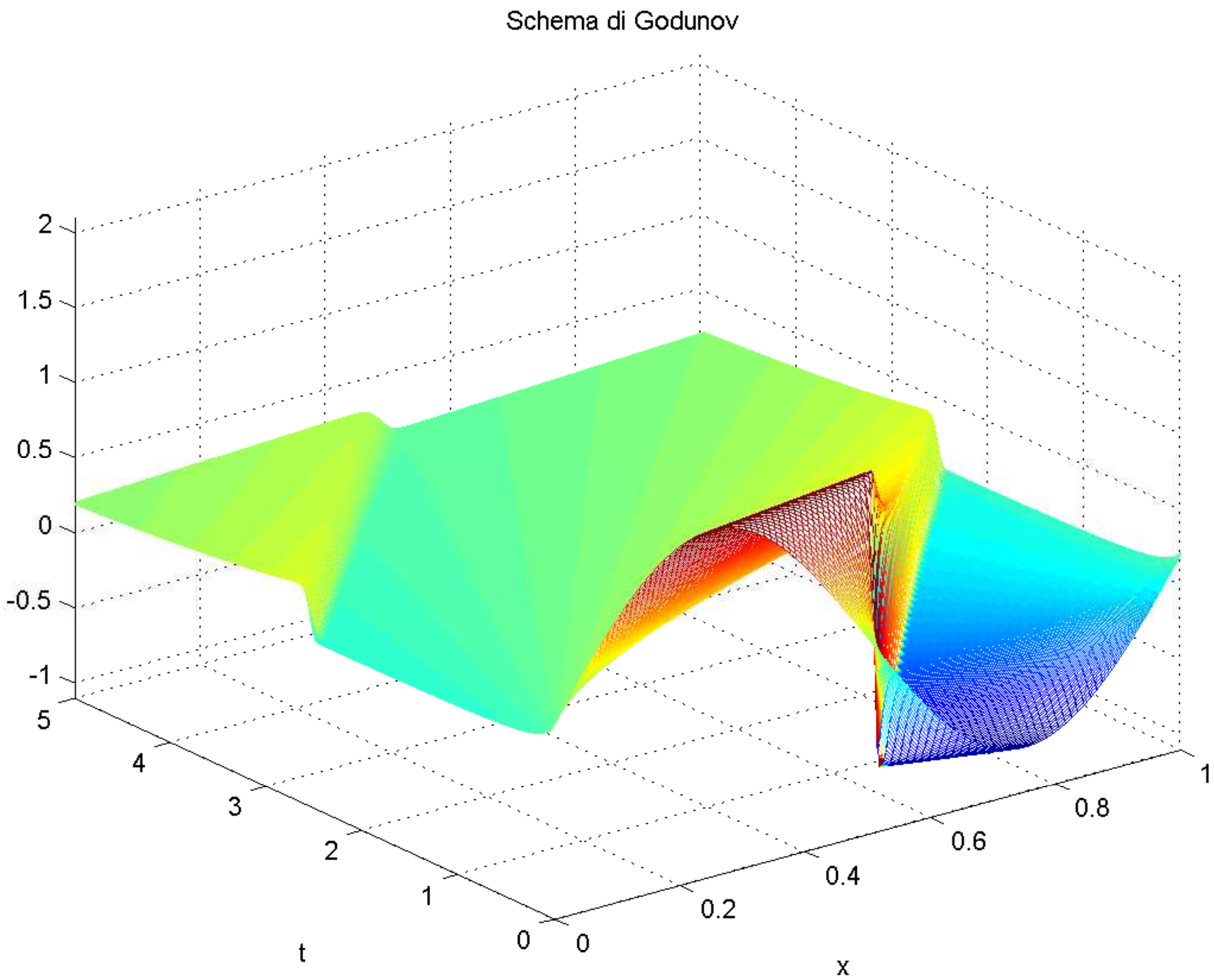
Esempio

Supponiamo di voler risolvere l'equazione di Burgers con condizione iniziale

$$u(x, 0) = 0.2 + \sin 2\pi x, \qquad 0 \le x \le 1$$

nell'intervallo di integrazione temporale $[0, 5]$, applicando gli schemi di Lax-Friedrichs e di Godunov.


Schema di Lax-Friedrichs
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
5
4
3
2
1
0
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x


Schema di Godunov
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
5
4
3
2
1
0
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

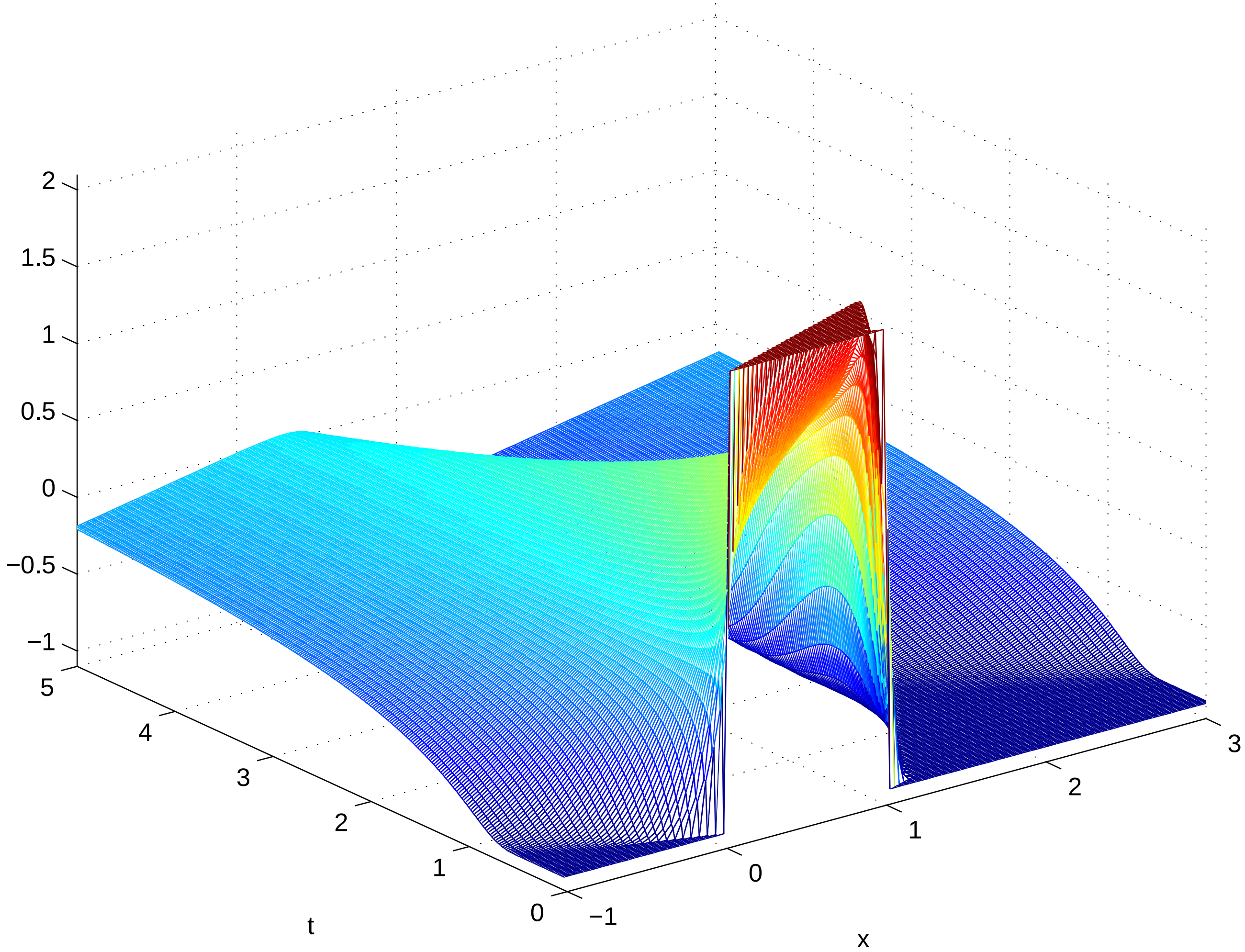
Esempio

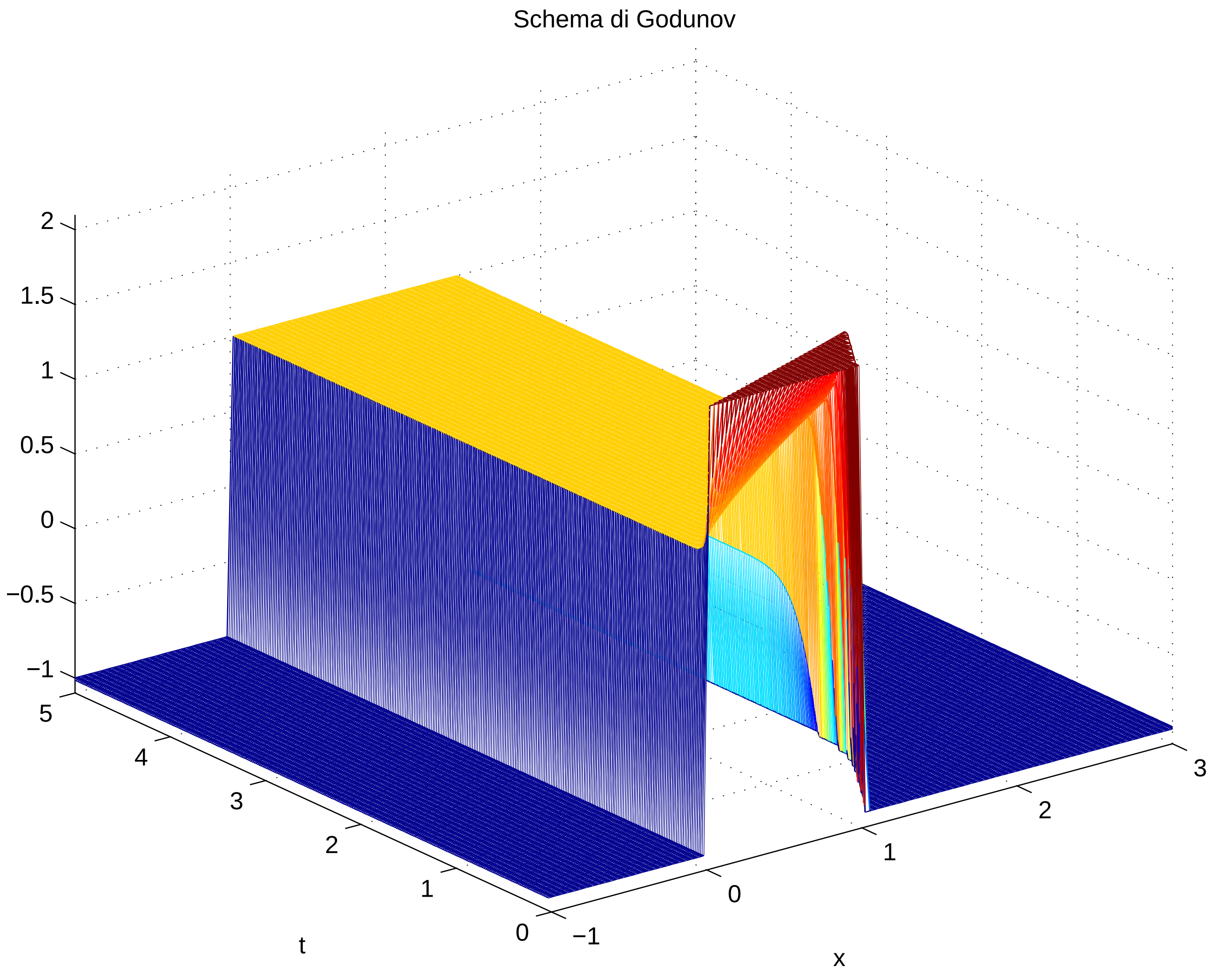
Supponiamo di voler risolvere l'equazione di Burgers con condizione iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 0,\ 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

nell'intervallo di integrazione temporale $[0, 5]$, applicando gli schemi di Lax-Friedrichs e di Godunov.

Schema di Lax−Friedrichs




Schema di Godunov
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
5
4
3
2
1
0
t
−1
0
1
2
3
x