

Equazioni di Evoluzione

Le equazioni di evoluzione descrivono fenomeni che variano in funzione del tempo, tra gli altri per esempio fenomeni di onde, termodinamici, di dinamica delle popolazioni. Le equazioni di evoluzione sono sostanzialmente:

- **Equazioni Paraboliche**
- **Equazioni Iperboliche**

Parte delle equazioni di evoluzione in una dimensione possono essere descritte attraverso la cosiddetta **equazione conservativa del flusso**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F(u)}{\partial x}$$

dove u ed F possono anche essere vettori, e, in alcuni casi, F può dipendere non solo da u ma anche dalle derivate parziali di u . La funzione (o il vettore) F è detto **flusso conservativo**.

Equazioni Paraboliche

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + f(x, t, u) = 0$$

un'equazione è parabolica se:

$$B^2 - AC = 0 \quad \Rightarrow \quad B = C = 0$$

Non essendo presente (solitamente) la derivata seconda temporale le equazioni di tipo parabolico sono praticamente equazioni differenziali ordinarie alle quali sono aggiunte le variabili spaziali. Per esempio:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x))$$

L'Equazione di Diffusione

Le equazioni di tipo parabolico descrivono problemi di diffusione, caratterizzati da una relazione del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

dove σ è il cosiddetto **coefficiente di diffusione** (o anche **dissipazione**).
L'equazione di diffusione si ricava dall'equazione conservativa del flusso scegliendo

$$F(u) = -\sigma \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Si deve supporre che sia $\sigma > 0$ altrimenti l'equazione ha soluzioni fisicamente instabili: la soluzione tenderebbe a concentrarsi e non a diffondersi. Se il coefficiente di diffusione è costante allora l'equazione diventa

$$u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t),$$

Approccio Numerico

Si effettua prima una discretizzazione dell'intervallo temporale di osservazione del fenomeno e successivamente vengono messe in relazione le approssimazioni in due istanti di tempo consecutivi.

Conoscendo le approssimazioni numeriche all'istante di tempo t si calcolano quelle all'istante successivo $t + \Delta t$.

I metodi possono essere di due tipi:

1. **Metodi espliciti**: Tale calcolo avviene direttamente, senza risolvere sistemi lineari;
2. **Metodi impliciti**: Per calcolare l'approssimazione nell'istante successivo è necessario risolvere un sistema lineare.

I metodi del primo tipo sono quelli più semplici da implementare ma che forniscono risultati peggiori.

Esempio: L'Equazione del calore in una dimensione

Sicuramente è l'equazione di evoluzione più comune:

$$u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0$$

L'equazione del calore descrive fenomeni di diffusione termodinamica, infatti $u(x, t)$ può rappresentare, per esempio, l'evoluzione nel tempo della temperatura di una sbarra termoconduttrice di lunghezza L e spessore trascurabile che viene sottoposta ad una certa temperatura iniziale (la condizione al contorno $f(x)$) e tale che la temperatura agli estremi sia fissata dalle condizioni poste dalle funzioni $g_1(t)$ e $g_2(t)$. Se dopo l'istante iniziale la sorgente di calore viene tolta allora $u(x, t)$ rappresenta la temperatura del punto di ascissa x al tempo t .

Esempio: L'Equazione del calore in due dimensioni

Ha anche una variante in due dimensioni:

$$u_t(x, t) = \sigma(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq M, \quad t \geq 0,$$

in cui la sbarra è sostituita da una piastra di forma rettangolare e altezza trascurabile.

Esempio: L'Equazione di Schrödinger

È l'equazione base della Meccanica Quantistica:

$$\iota \hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + U(x)u$$

- m è la massa della particella;
- ι è l'unità immaginaria;
- $\hbar$ è la costante di Plank;
- $U(x)$ è l'energia potenziale della particella;
- $u(x, t)$ è la funzione d'onda.

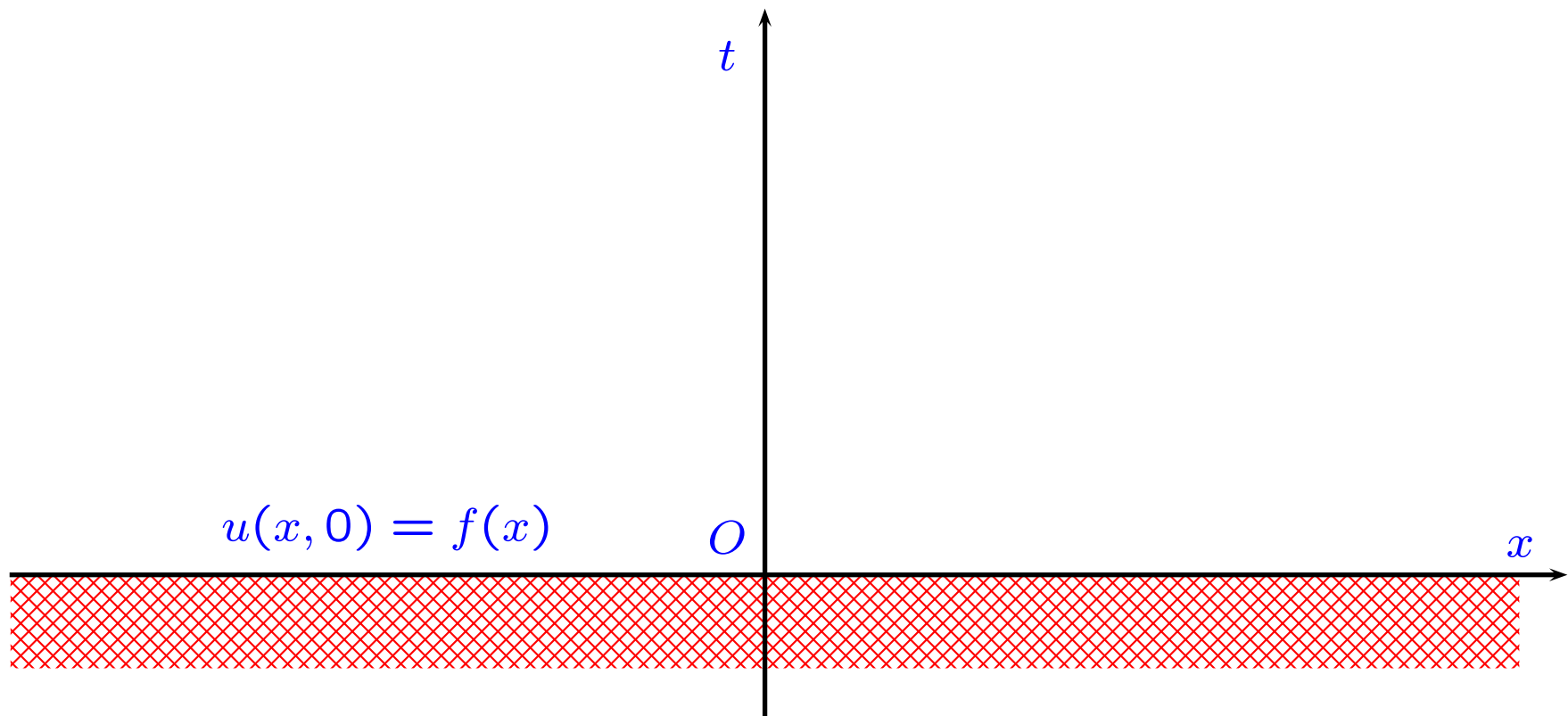
Il problema ai valori iniziali

Assegnata l'equazione

$$u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t)$$

il problema ai valori iniziali consiste nel trovare una funzione $u(x, t)$, definita e continua per $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, tale che:

1. $u(x, t)$ soddisfa l'equazione del calore per $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$;
2. $u(x, t)$ soddisfa la condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.



Il problema ai valori al contorno

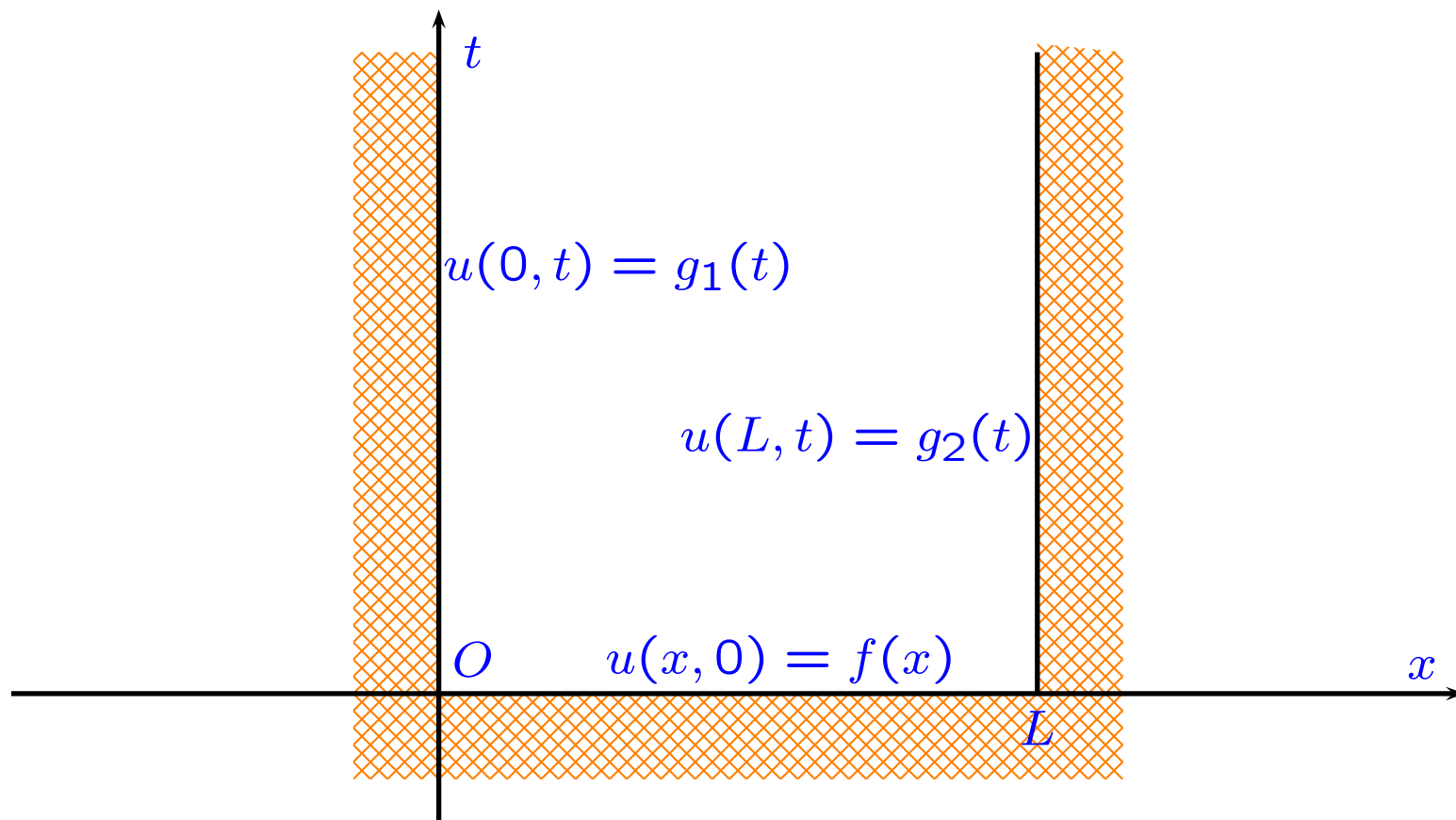
Assegnata una costante $L > 0$, si deve trovare una funzione $u(x, t)$, definita e continua per $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, che:

1. $u(x, t)$ soddisfa l'equazione del calore per $0 < x < L$ e $t > 0$;
2. $u(x, t)$ soddisfa la condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$.

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

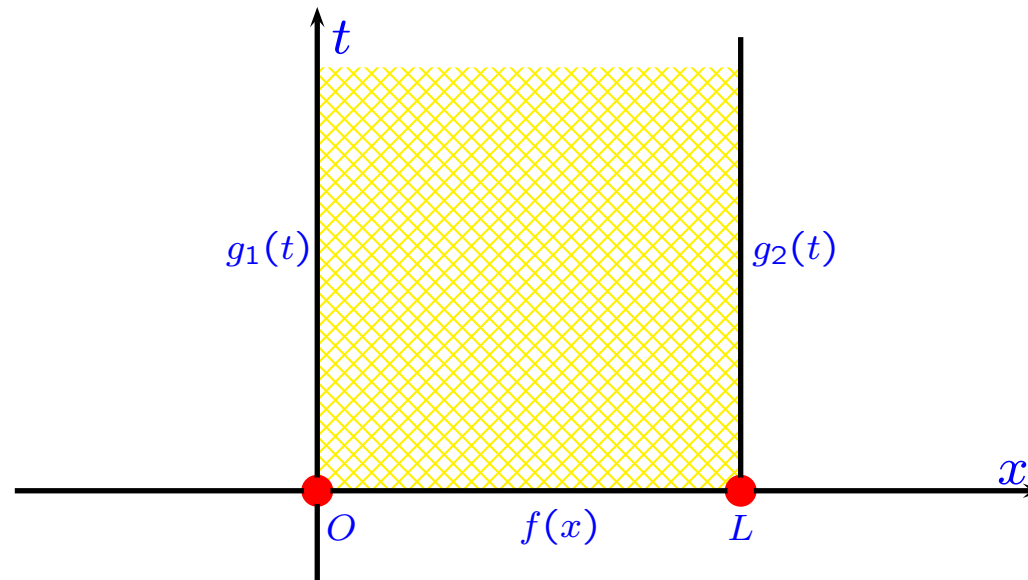
$$u(0, t) = g_1(t) \quad t \geq 0$$

$$u(L, t) = g_2(t) \quad t \geq 0.$$



Le funzioni che definiscono le condizioni iniziali devono soddisfare le cosiddette condizioni di omogeneità agli angoli del dominio:

$$f(0) = g_1(0), \quad f(L) = g_2(0).$$



Il Metodo di Eulero Esplicito per l'equazione del calore

Supponiamo ora di dover risolvere l'equazione

$$u_t(x, t) = \sigma u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

con una condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

e condizioni al contorno

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(L, t) = g_2(t), \quad t \geq 0.$$

Poiché non è possibile calcolare la soluzione all'infinito si sostituisce $t \geq 0$ con $t \in [0, T_{\max}]$.

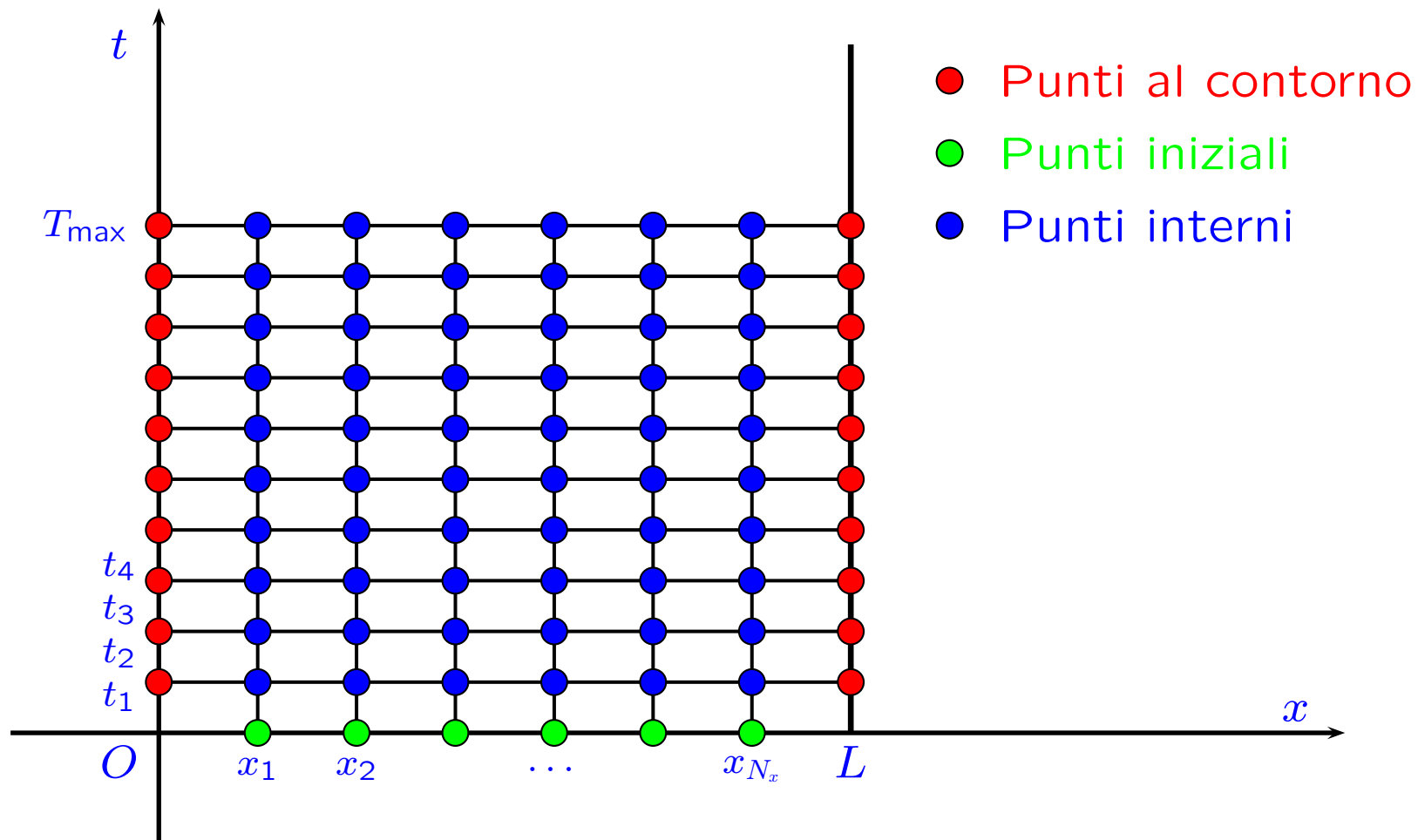
L'equazione del calore viene integrata numericamente in ogni istante di tempo $t_n \leq T_{\max}$. La soluzione numerica di questa equazione richiede la discretizzazione delle derivate temporale e spaziale. Il problema discreto è ottenuto mediante l'uso delle differenze finite. Scegliamo un intero positivo N_x e definiamo nella striscia

$$\{(x, t) : x \in [0, L], t \in [0, T_{\max}]\}$$

una griglia rettangolare (x_j, t_n) tale che

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N_x + 1, \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0, \dots, N_t$$

con $\Delta x = L/(N_x + 1)$ e $\Delta t = T_{\max}/N_t$ è l'intervallo di tempo tra due approssimazioni successive.



L'approssimazione della soluzione deve essere calcolata solo nei punti interni poichè negli altri essa è già nota.

Pertanto indichiamo con u_j^n l'approssimazione di $u(x_j, t_n)$:

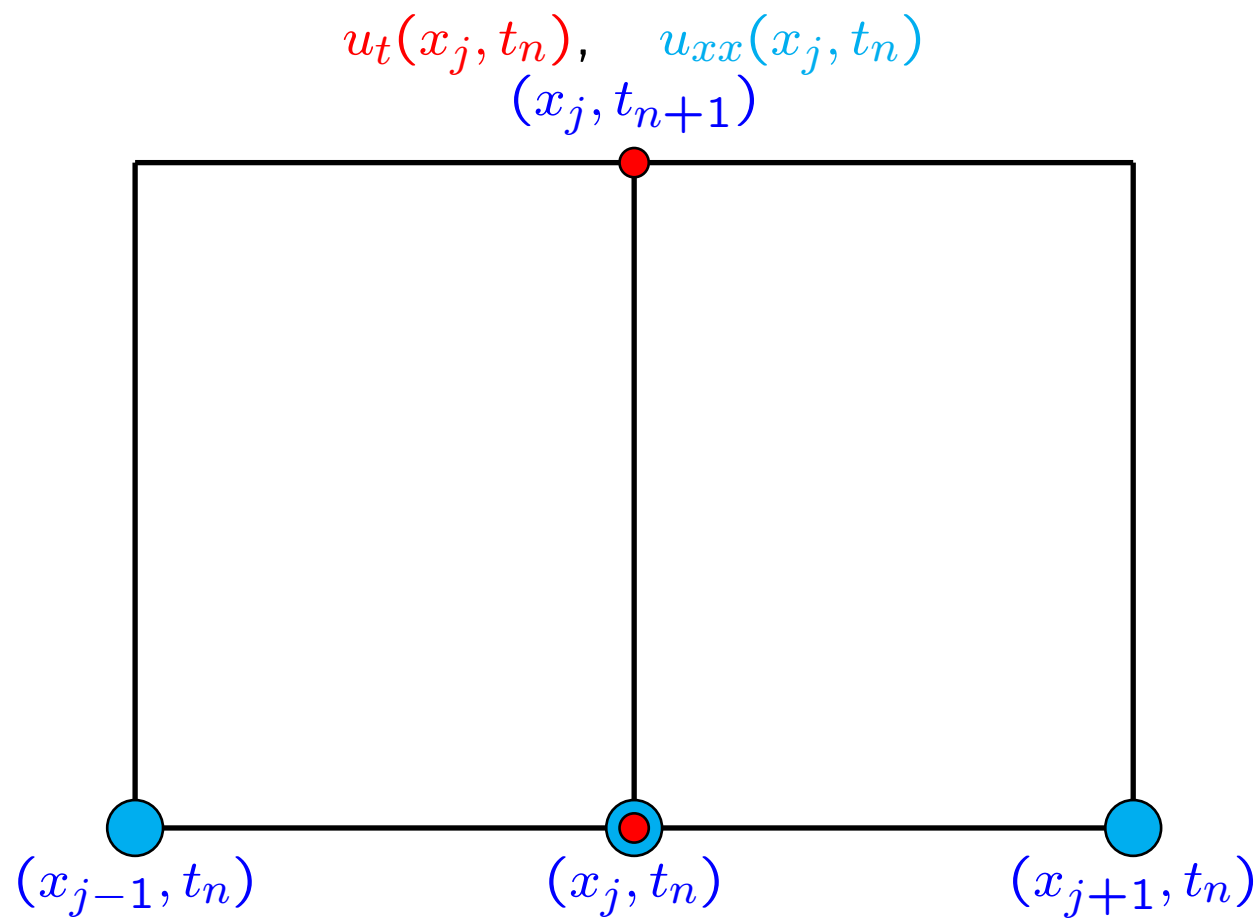
$$u_j^n \simeq u(x_j, t_n).$$

Utilizzando la consueta approssimazione per la derivata parziale seconda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

e la formula alle differenze in avanti per la derivata temporale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}.$$



Sostituendo nell'equazione del calore si ottiene:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \sigma \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

e infine si ha come risultato il seguente **Metodo di Eulero Esplicito**:

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1 - 2\alpha)u_j^n + \alpha u_{j+1}^n$$

dove α è il cosiddetto **Numero di Courant**

$$\alpha = \sigma \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

La condizione iniziale diventa

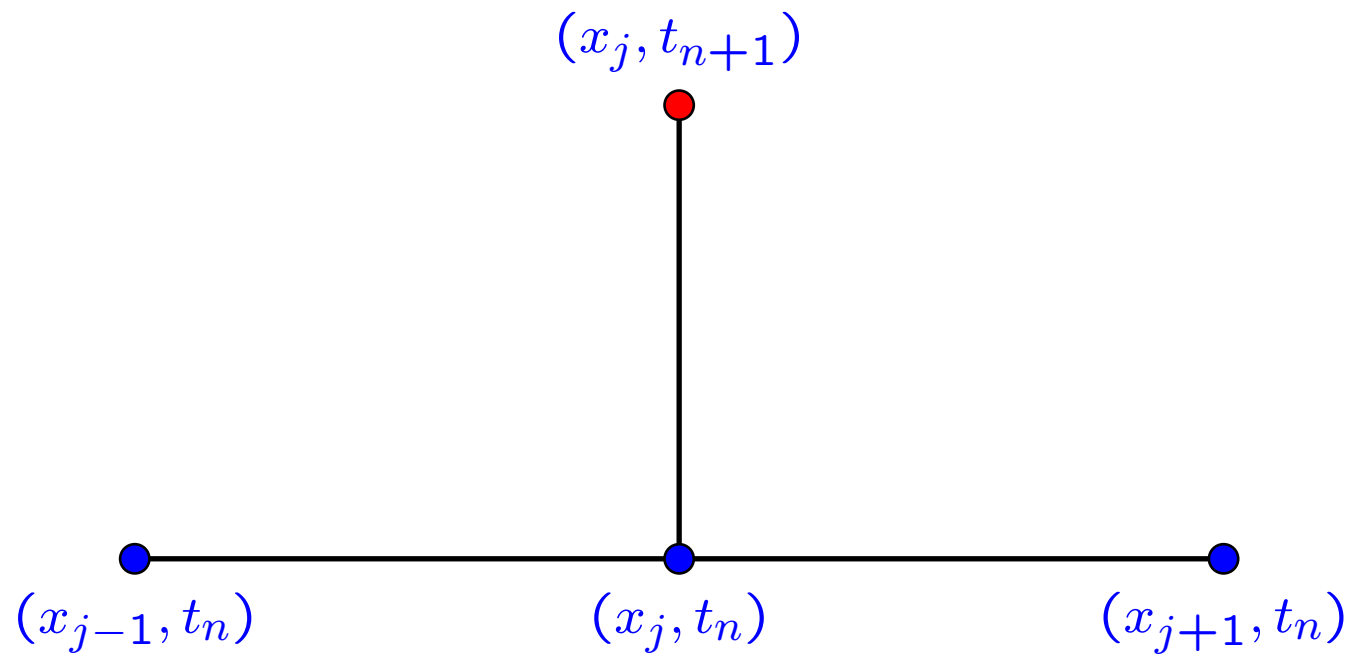
$$u_j^0 = f(j\Delta x), \quad i = 1, 2, \dots, N_x.$$

Notiamo che il metodo di Eulero per $j = 1$ e $j = N_x$ richiede l'uso delle condizioni sulla frontiera del dominio

$$u_0^n = g_1(t_n), \quad u_{N_x}^n = g_2(t_n).$$

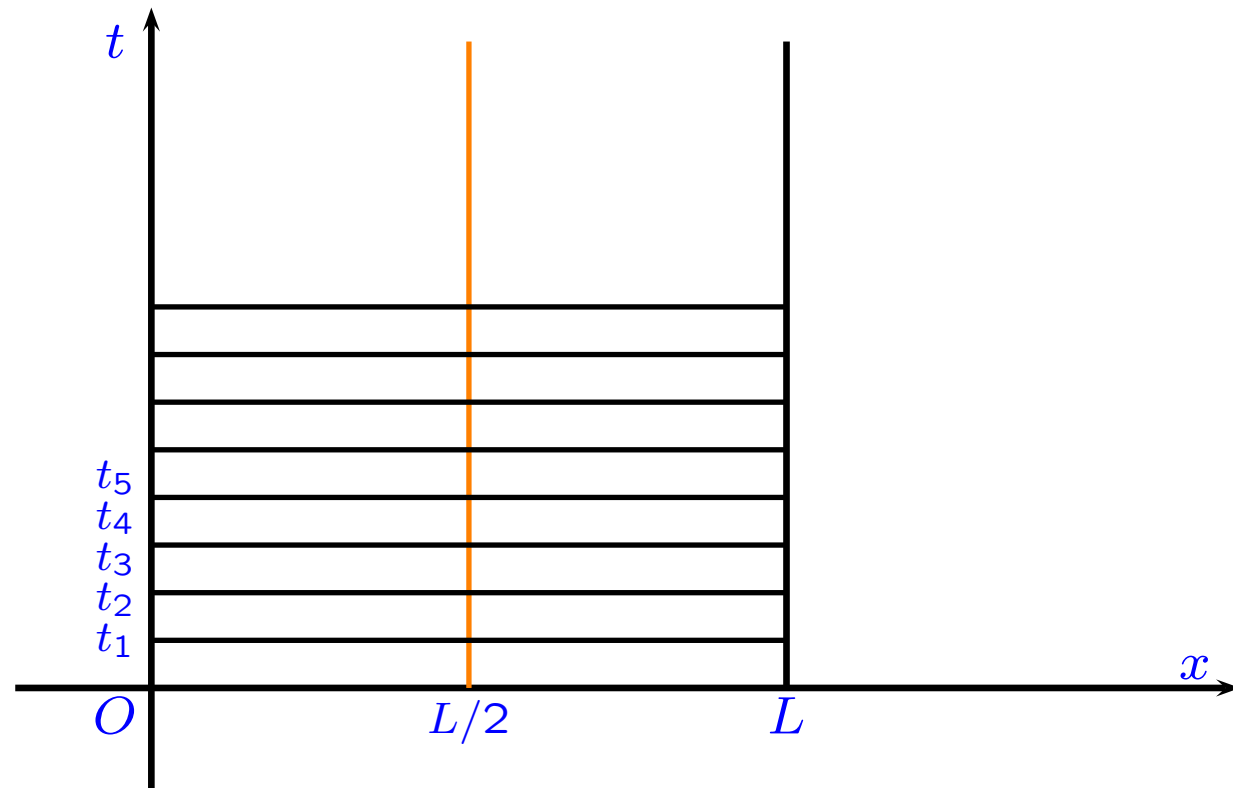
Partendo quindi da $n = 0$ il metodo di Eulero consente di determinare esplicitamente le approssimazioni u_j^1 , $j = 1, \dots, N_x - 1$, pertanto è un metodo appunto di tipo esplicito.

Stencil per il Metodo di Eulero Esplicito



Condizione di Stabilità

È noto che i metodi semplici sono raramente quelli migliori. La soluzione teorica di un'equazione parabolica possiede la **proprietà di max-min** (il massimo ed il minimo della funzione si ottengono sulla frontiera del dominio) ed è auspicabile che anche la soluzione numerica possieda tale proprietà. Consideriamo la situazione in cui prendiamo un solo nodo interno, cioè poniamo $\Delta x = L/2$ e come condizione iniziale la funzione che assume valore $\varepsilon > 0$ nel punto interno e 0 nei due punti al contorno.



Quindi

$$u_0^0 = u_2^0 = 0, \quad u_1^0 = \varepsilon.$$

Applicando il metodo di Eulero appena definito ricaviamo:

$$u_1^1 = (1 - 2\alpha)u_1^0 = (1 - 2\alpha)\varepsilon$$

$$u_1^2 = (1 - 2\alpha)u_1^1 = (1 - 2\alpha)^2\varepsilon$$

e, ad un generico istante di tempo t_n :

$$u_1^n = (1 - 2\alpha)^n \varepsilon.$$

Ora, in base alla proprietà di massimo-minimo deve essere

$$0 \leq u_1^n \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (1 - 2\alpha)^n \leq 1$$

e quindi

$$0 \leq 1 - 2\alpha \leq 1.$$

Poichè $\alpha > 0$ la seconda disuguaglianza è sicuramente verificata, quindi deve essere

$$1 \geq 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Tale disuguaglianza (supponendo $\sigma = 1$) implica la seguente restrizione sui passi di discretizzazione

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2}.$$

Se $\Delta x \simeq 10^{-2}$ deve essere

$$\Delta t \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$$

quindi se è necessario integrare l'equazione su intervalli di tempo molto lunghi se deve usare un passo temporale molto piccolo e quindi un numero di passi temporali incredibilmente grande.

Analisi di Stabilità di von Neumann

Per studiare questo fenomeno è necessario introdurre una tecnica, detta analisi di stabilità di von Neumann. Tale analisi consiste nel supporre che le soluzioni dell'**equazione alle differenze** che definisce il metodo siano tutte della forma:

$$u_j^n = \xi^n e^{i\kappa j \Delta x}$$

dove κ è un numero reale, detto **numero d'onda**, e ξ è un numero complesso dipendente da κ , detto **fattore di amplificazione**. Il numero ξ , ed in particolare le sue potenze, indicano la dipendenza della soluzione rispetto al tempo. Infatti la soluzione numerica u_j^n cresce esponenzialmente se $|\xi(\kappa)| > 1$ per un certo valore di κ .

L'analisi della stabilità di un metodo numerico corrisponde alla determinazione dei valori che può assumere il numero di Courant in modo tale che la soluzione numerica sia stabile. In questo caso richiedere che la soluzione numerica sia stabile equivale a richiedere che il fattore di amplificazione abbia modulo minore di (o uguale a) 1.

Per applicare l'analisi di von Neumann al metodo di Eulero Esplicito sostituiamo l'espressione della soluzione dell'equazione alle differenze nello schema numerico:

$$\xi^{n+1} e^{\iota \kappa j \Delta x} = \xi^n e^{\iota \kappa j \Delta x} + \alpha \left[\xi^n e^{\iota \kappa (j+1) \Delta x} - 2 \xi^n e^{\iota \kappa j \Delta x} + \xi^n e^{\iota \kappa (j-1) \Delta x} \right].$$

Dividendo per $\xi^n e^{\iota \kappa j \Delta x}$ si ottiene

$$\xi = 1 + \alpha \left[e^{\iota \kappa \Delta x} - 2 + e^{-\iota \kappa \Delta x} \right] = 1 + 2\alpha [\cos(\kappa \Delta x) - 1].$$

Poichè

$$\cos(\kappa \Delta x) = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\kappa \Delta x}{2} \right) \Rightarrow \cos(\kappa \Delta x) - 1 = -2 \sin^2 \left(\frac{\kappa \Delta x}{2} \right)$$

quindi

$$\xi = 1 - 4\alpha \sin^2 \left(\frac{\kappa \Delta x}{2} \right).$$

Poichè $\xi \in \mathbb{R}$, devono essere soddisfatte simultaneamente le seguenti disequazioni,

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

la seconda risulta sempre soddisfatta, mentre dalla prima segue che

$$2\alpha \sin^2 \left(\frac{\kappa \Delta x}{2} \right) \leq 1$$

che è soddisfatta, come visto prima, se $\alpha \leq 1/2$.

θ –Metodi

Il Metodo di Eulero Esplicito appartiene alla più ampia classe dei cosiddetti θ –metodi. Infatti uguagliando la derivata temporale che viene uguagliata ad una combinazione lineare tra le derivate spaziali in due istanti di tempo successivi:

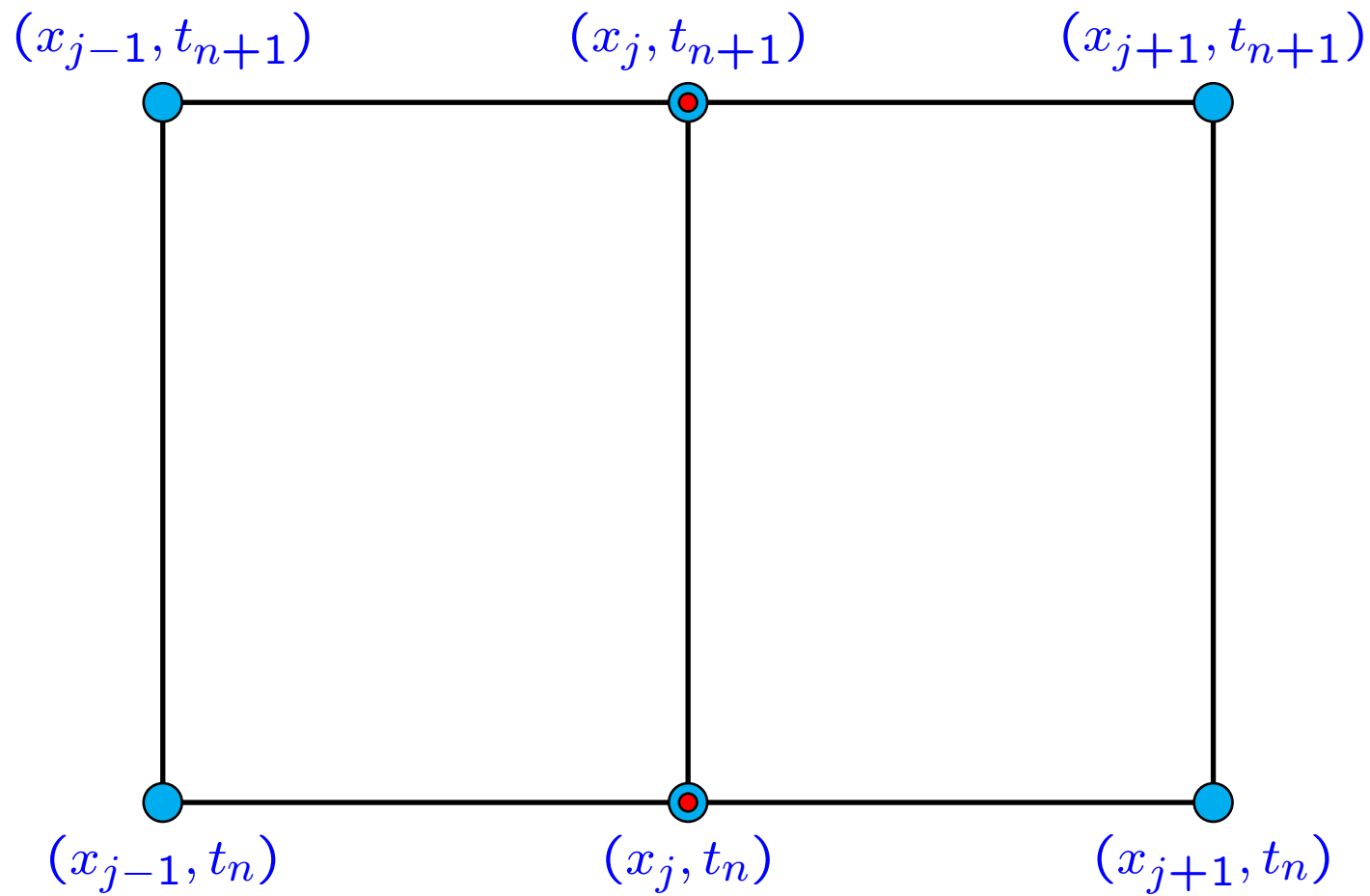
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \left[(1 - \theta) u_{xx}(x_j, t_n) + \theta u_{xx}(x_j, t_{n+1}) \right]$$

Posto

$$\alpha = \sigma \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

l'espressione generica di tali metodi diviene

$$u_j^{n+1} = u_j^n + (1 - \theta)\alpha [u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] \\ + \theta\alpha [u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}]$$



Il Metodo di Eulero Esplicito

Si ottiene ponendo $\theta = 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma u_{xx}(x_j, t_n),$$

e quindi l'espressione già vista in precedenza:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha \left[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right].$$

Il Metodo di Crank-Nicolson

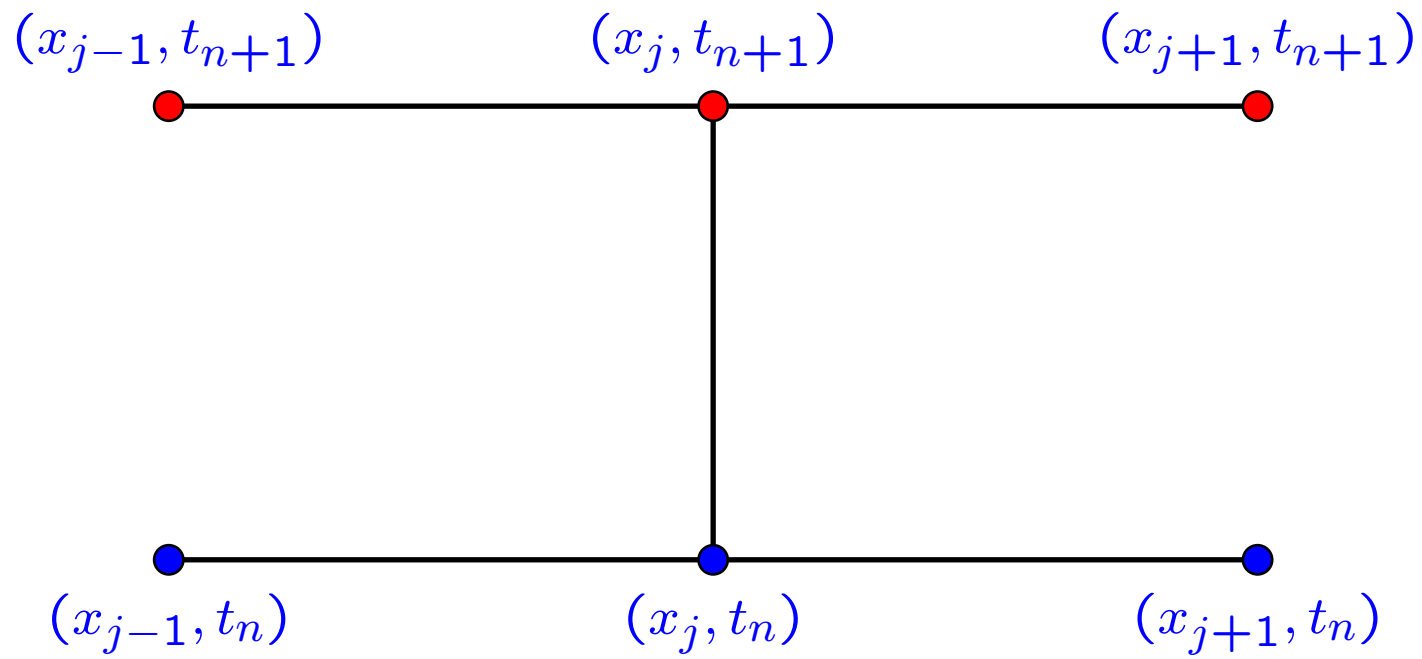
Si ottiene ponendo $\theta = 0.5$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{1}{2} [u_{xx}(x_j, t_n) + u_{xx}(x_j, t_{n+1})]$$

ovvero

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1} + (1 + \alpha)u_j^{n+1} - \frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n+1} = \frac{\alpha}{2}u_{j-1}^n + (1 - \alpha)u_j^n + \frac{\alpha}{2}u_{j+1}^n.$$

Stencil per il Metodo di Crank-Nicolson



Il Metodo alle Differenze Centrali Implicito

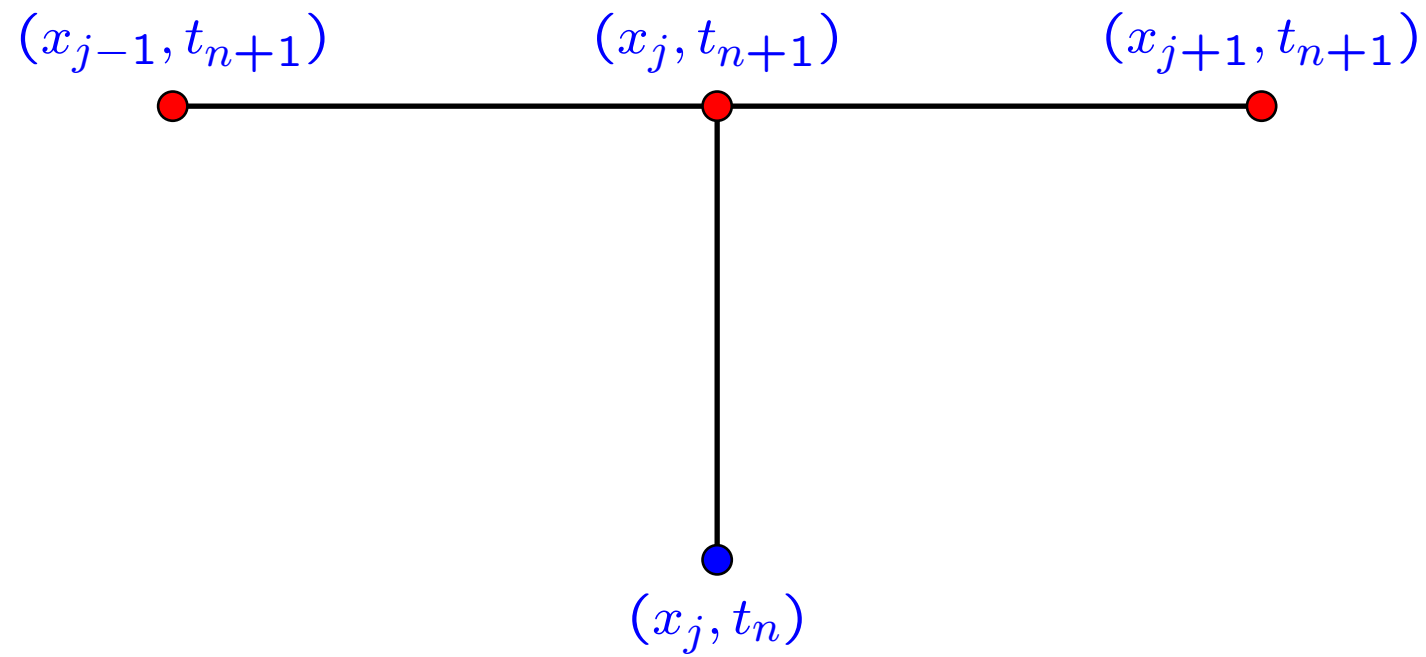
Si ottiene ponendo $\theta = 1$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sigma u_{xx}(x_j, t_{n+1}).$$

ovvero

$$-\alpha u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

Stencil per il Metodo alle Differenze Centrali Implicito



Condizione di Stabilità per i θ –metodi

Per questi metodi valgono i seguenti risultati di stabilità:

Se $\theta \geq 0.5$ la stabilità è incondizionata,

Se $0 \leq \theta < 0.5$ la condizione di stabilità è la seguente

$$\alpha \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}.$$

Esempio

Applichiamo i metodi descritti alla seguente equazione del calore:

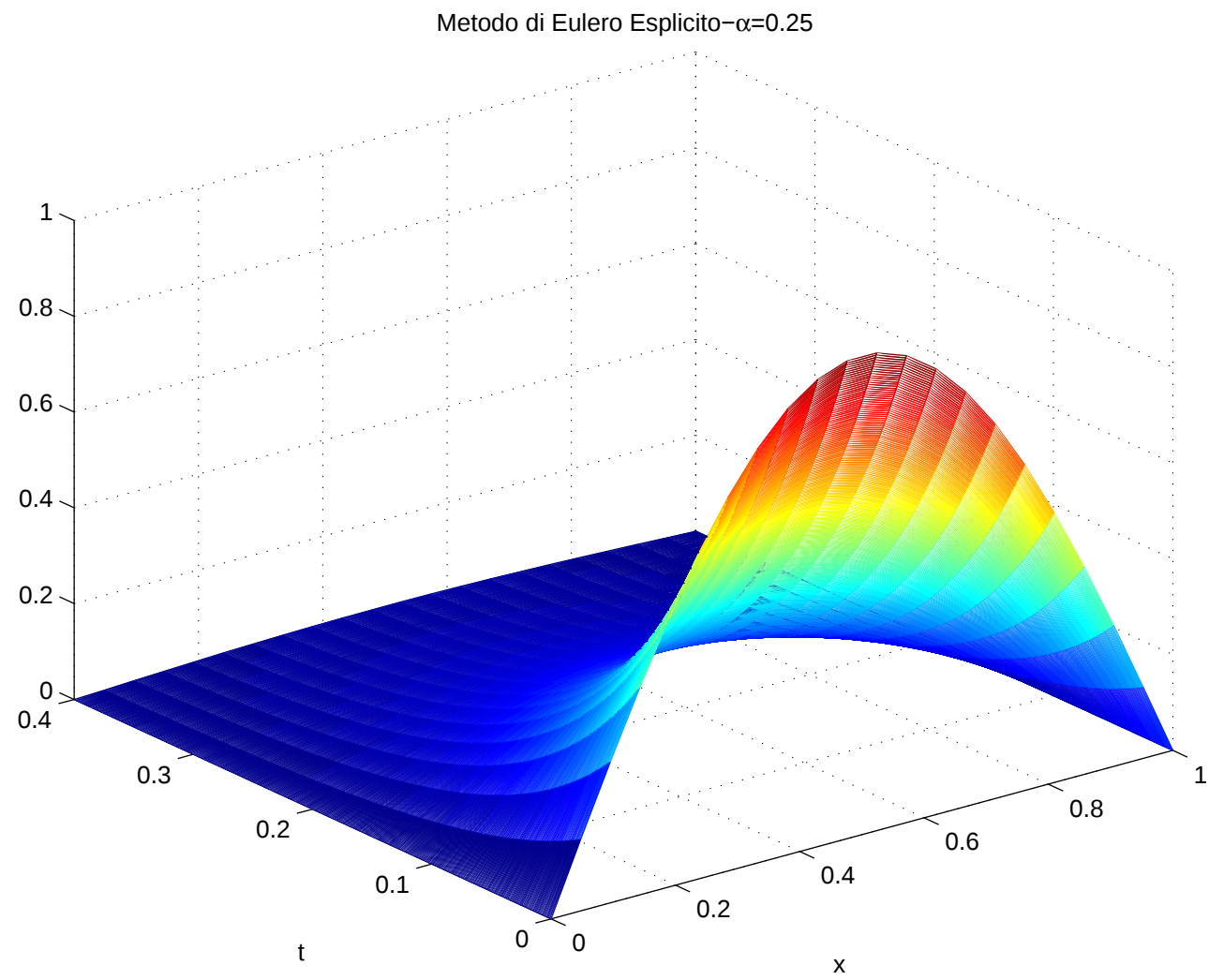
$$u_t - u_{xx} = 0$$

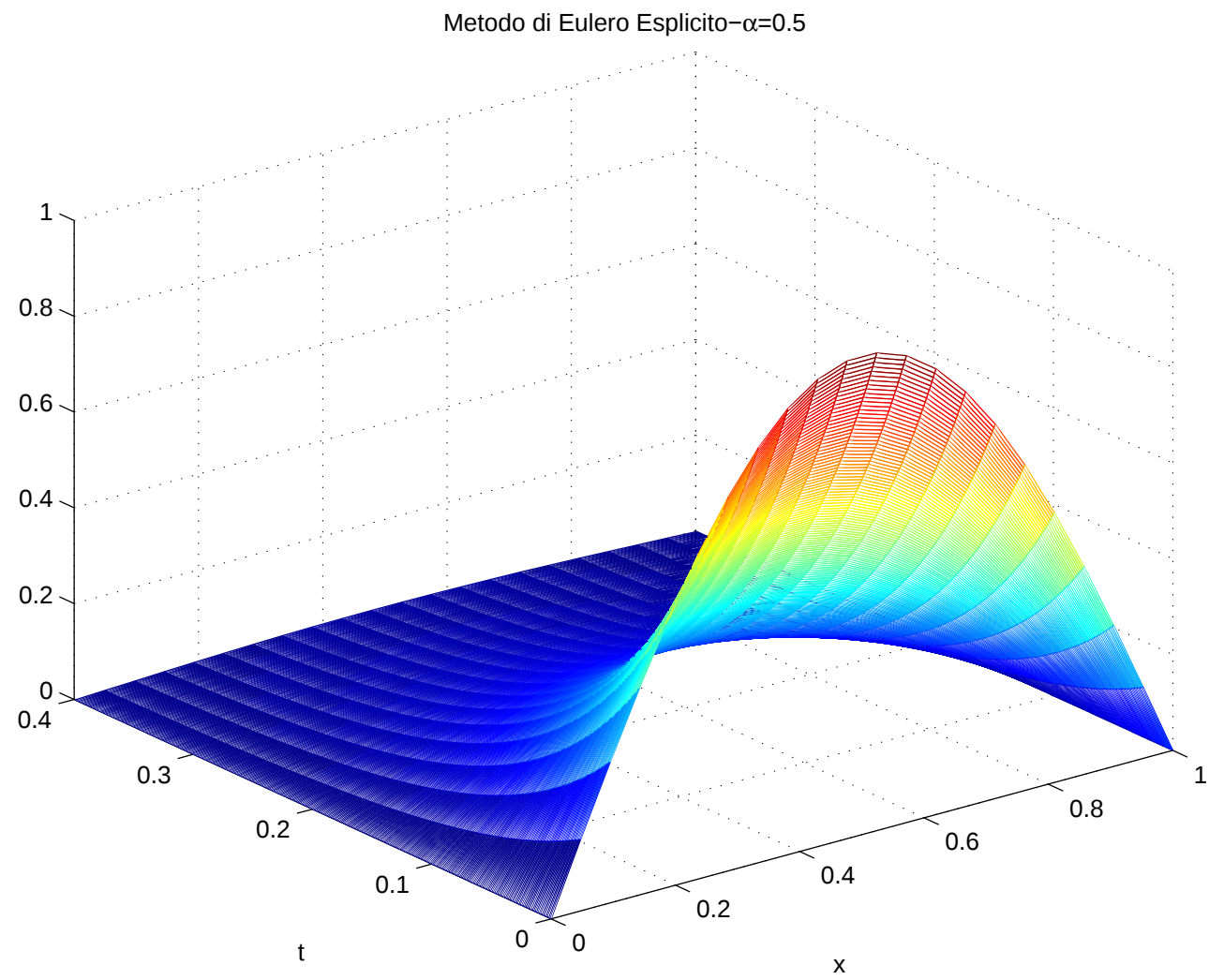
con condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

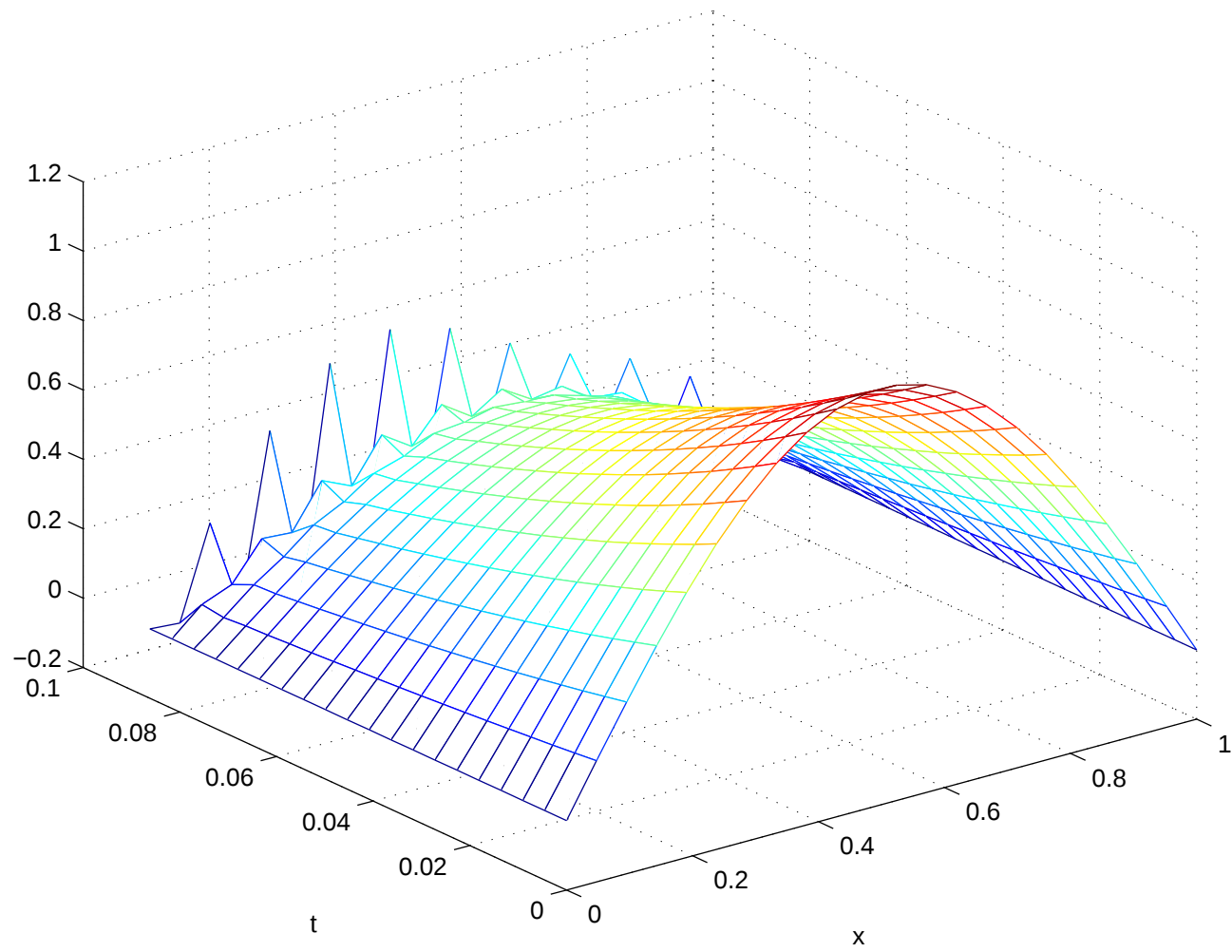
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

che ammette come soluzione teorica $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$.

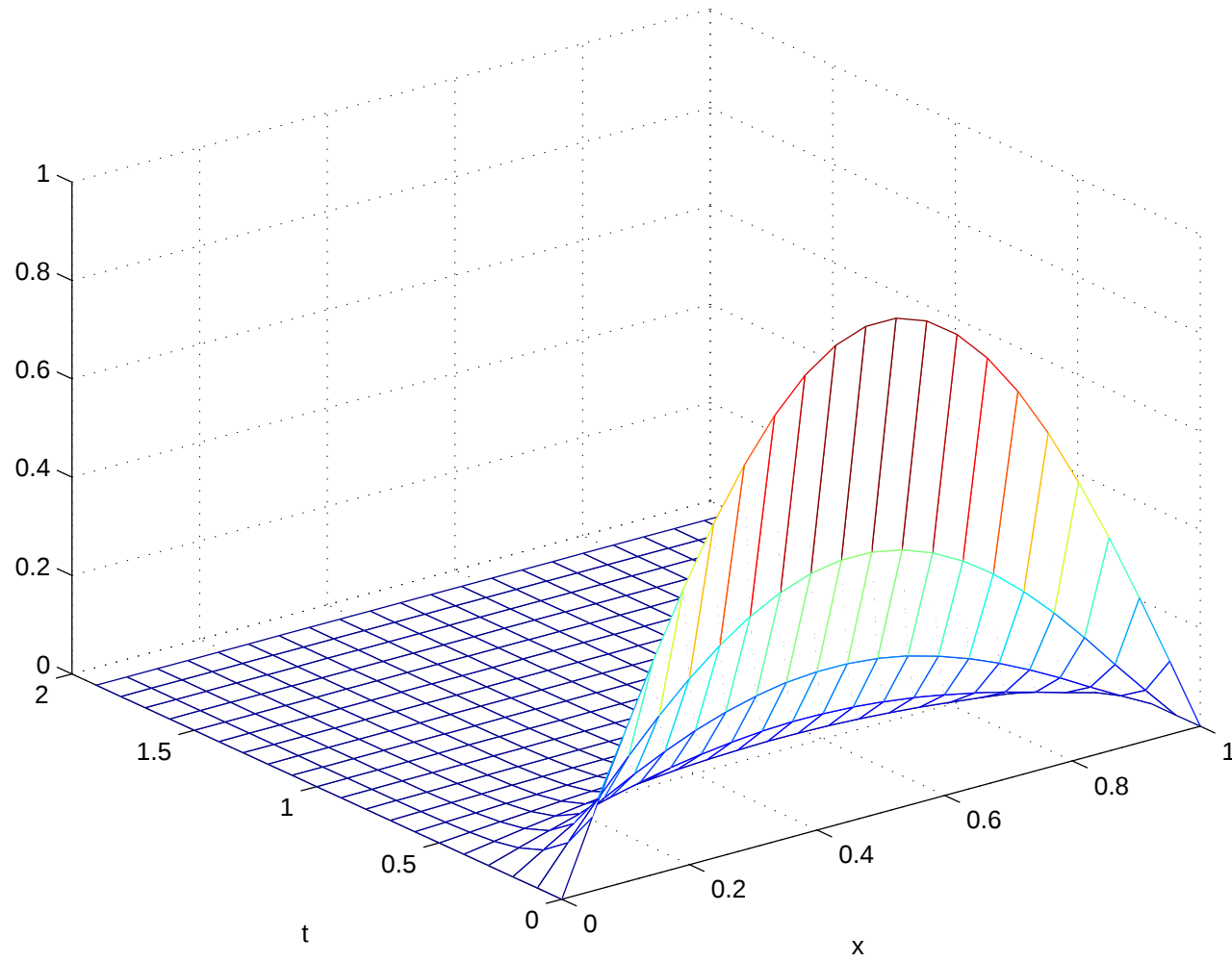


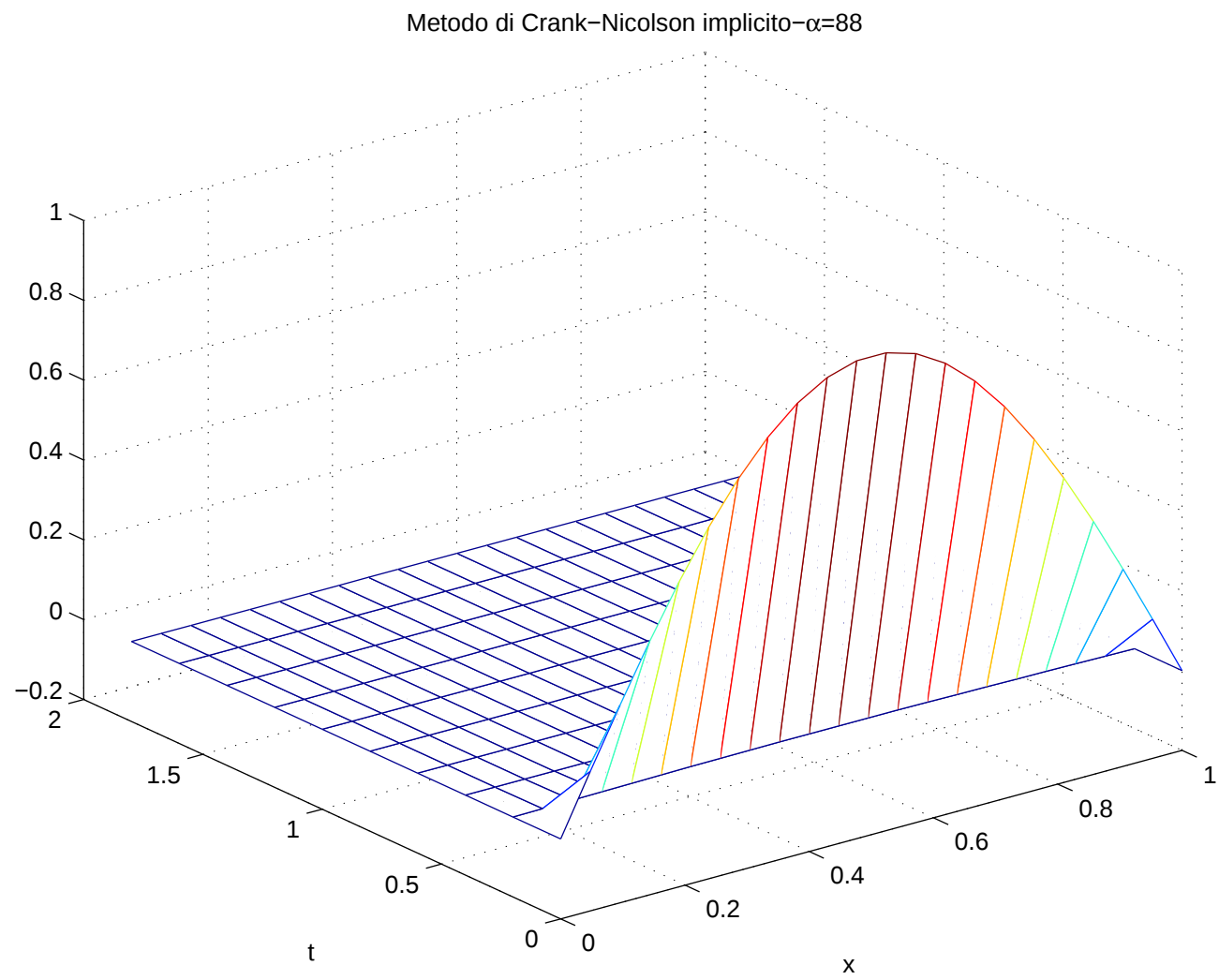


Metodo di Eulero Esplicito- $\alpha=2$



Metodo alle differenze centrali implicito- $\alpha=44$





L'equazione del calore in 2 dimensioni spaziali

L'equazione del calore in 2 dimensioni è la seguente

$$u_t = \sigma(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y, t) \in D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$$

con condizioni al contorno

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, t \geq 0.$$

Il metodo di Eulero Esplicito in tre dimensioni

Supponiamo che il dominio spaziale sia il rettangolo $[0, L] \times [0, M]$ che viene discretizzato definendo, al solito, i valori

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x + 1$$

$$y_j = j\Delta y, \quad j = 0, \dots, N_y + 1$$

dove

$$\Delta x = \frac{L}{N_x + 1}, \quad \Delta y = \frac{M}{N_y + 1},$$

mentre anche il tempo viene suddiviso nel solito modo

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots$$

La griglia è di tipo tridimensionale quindi, fissato un istante di tempo t_n , si devono calcolare le seguenti approssimazioni

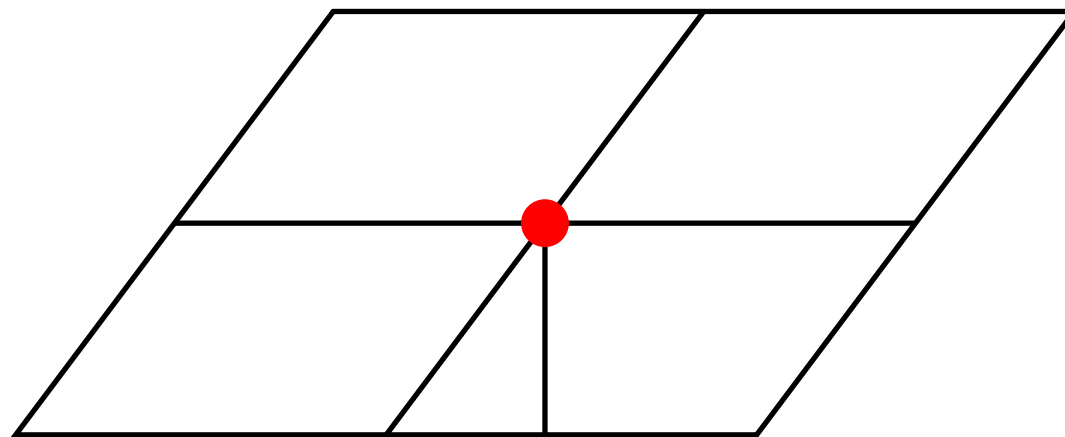
$$u_{i,j}^n \simeq u(x_i, y_j, t_n)$$

ottenendo una superficie definita nel rettangolo $[0, L] \times [0, M]$.

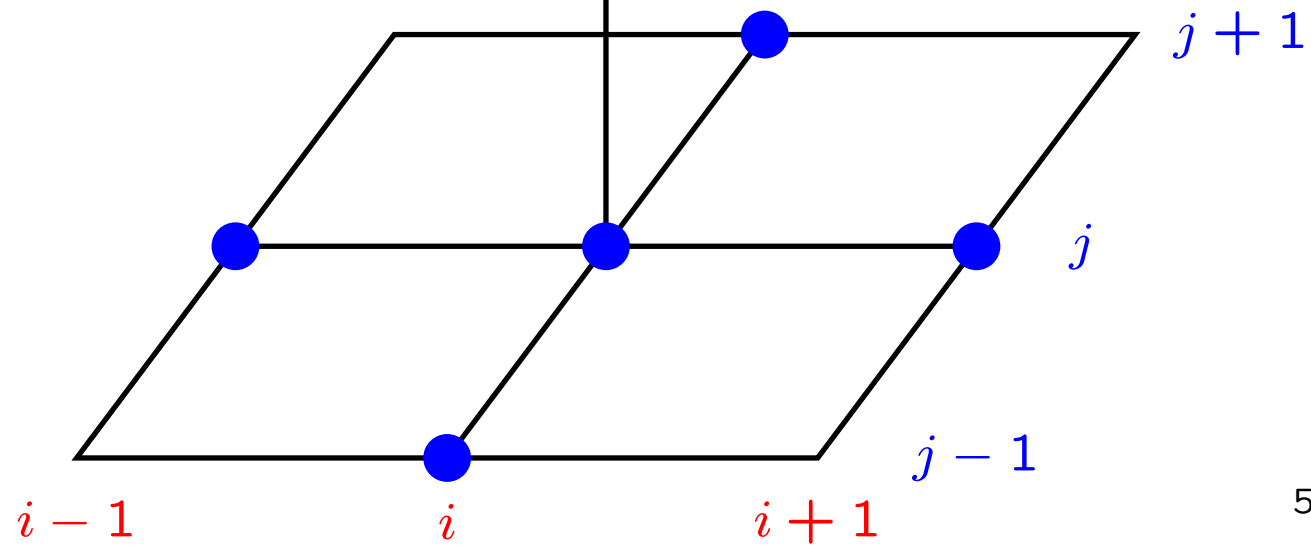
Il metodo di Eulero Esplicito è la generalizzazione di quello già incontrato in precedenza in quanto la derivata prima viene discretizzata utilizzando la formula alle differenze in avanti e le derivate seconde nel modo consueto:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \sigma \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right].$$

Livello $n + 1$



Livello n



Stabilità di von Neumann

In questo caso l'analisi di von Neumann diviene molto più complessa in quanto l'equazione alle differenze dipende da tre parametri interi i, j, n . Si deve supporre pertanto che la soluzione di tale equazione sia del tipo

$$u_{i,j}^n = \xi^n e^{\iota \kappa i \Delta x} e^{\iota \kappa j \Delta y}$$

e procedere come nel caso unidimensionale.

La condizione di stabilità diventa:

$$\sigma \left[\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \right] \leq \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che tale condizione è ben più restrittiva di quella vista in precedenza, infatti supponendo $\sigma = 1$ ed utilizzando lo stesso passo di discretizzazione sia per x che per y la condizione di stabilità diventa:

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4}$$

che è più restrittiva di quella vista in una dimensione.

Il Metodo di Crank-Nicolson

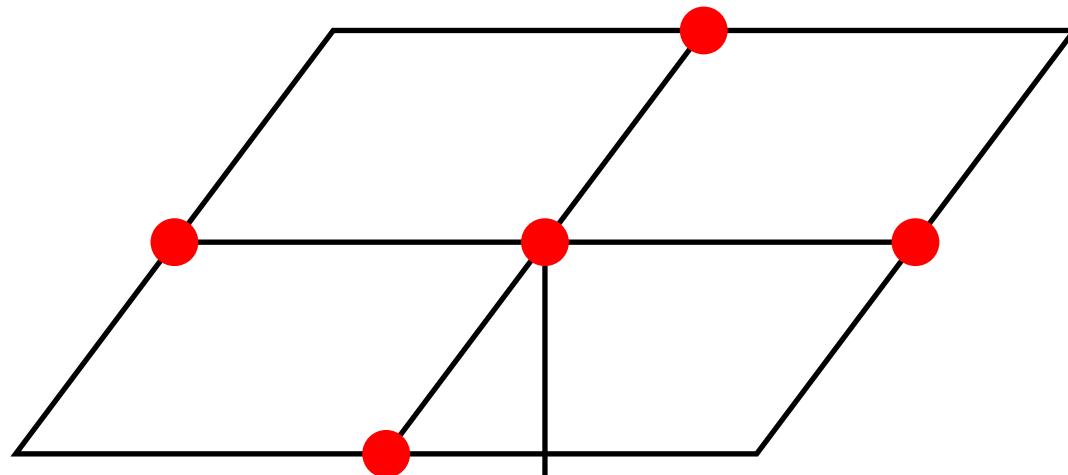
Esattamente come nel caso unidimensionale è possibile definire la classe dei θ –metodi. Nel caso del metodo di Crank-Nicolson la derivata seconda nel punto della griglia di coordinate (x_i, y_j, t_n) viene approssimato con il valor medio tra due istanti di tempo successivi:

$$u_t(x_i, y_j, t_n) \simeq \sigma \frac{1}{2} \left[u_{xx}(x_i, y_j, t_{n+1}) + u_{yy}(x_i, y_j, t_{n+1}) \right] \\ + \sigma \frac{1}{2} \left[u_{xx}(x_i, y_j, t_n) + u_{yy}(x_i, y_j, t_n) \right]$$

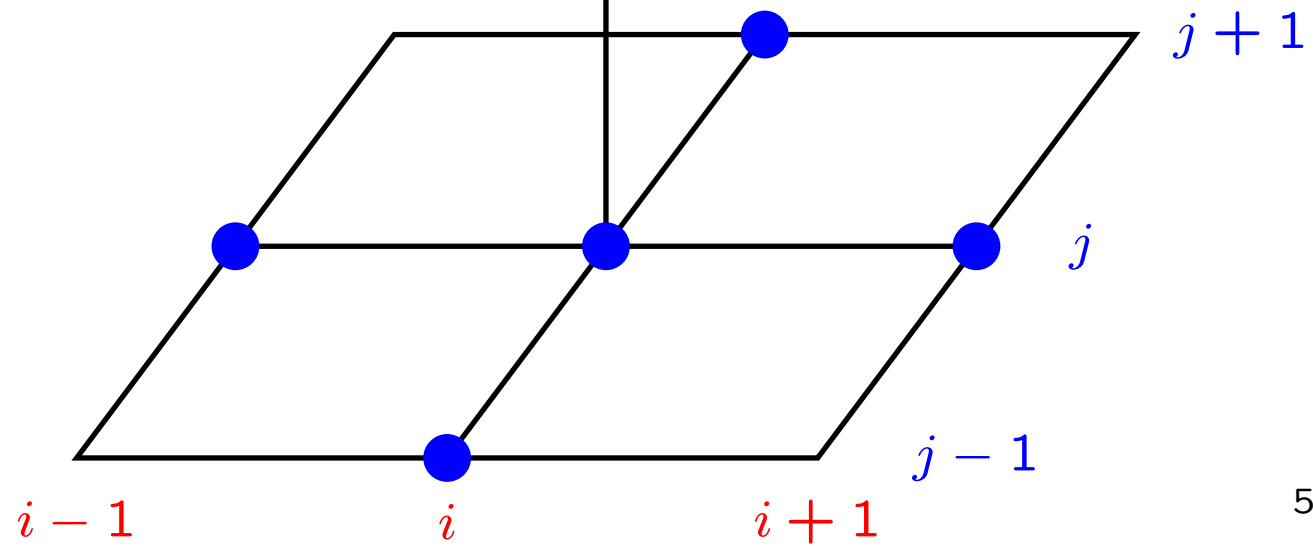
Il metodo assume la seguente espressione

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{\sigma}{2} \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] \\ & + \frac{\sigma}{2} \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right]. \end{aligned}$$

Livello $n + 1$



Livello n

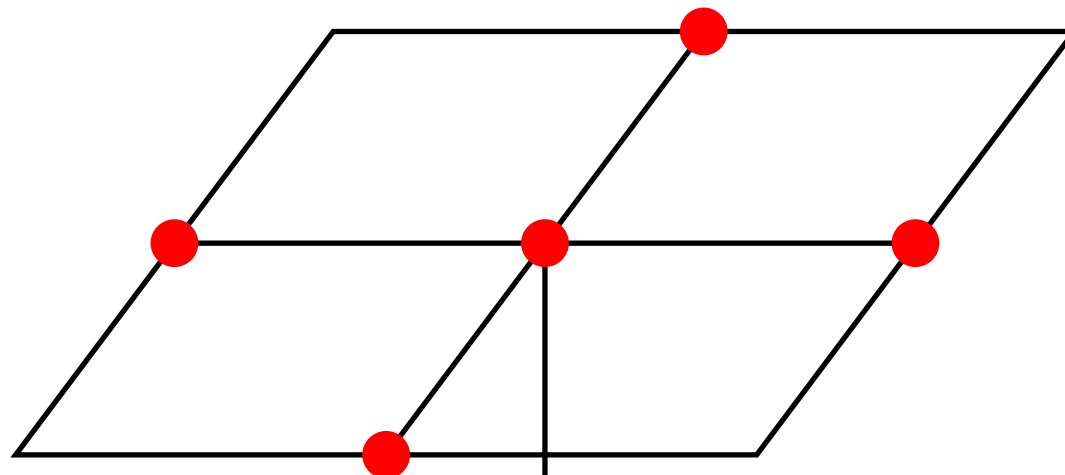


Il Metodo alle Differenze Centrali Implicito

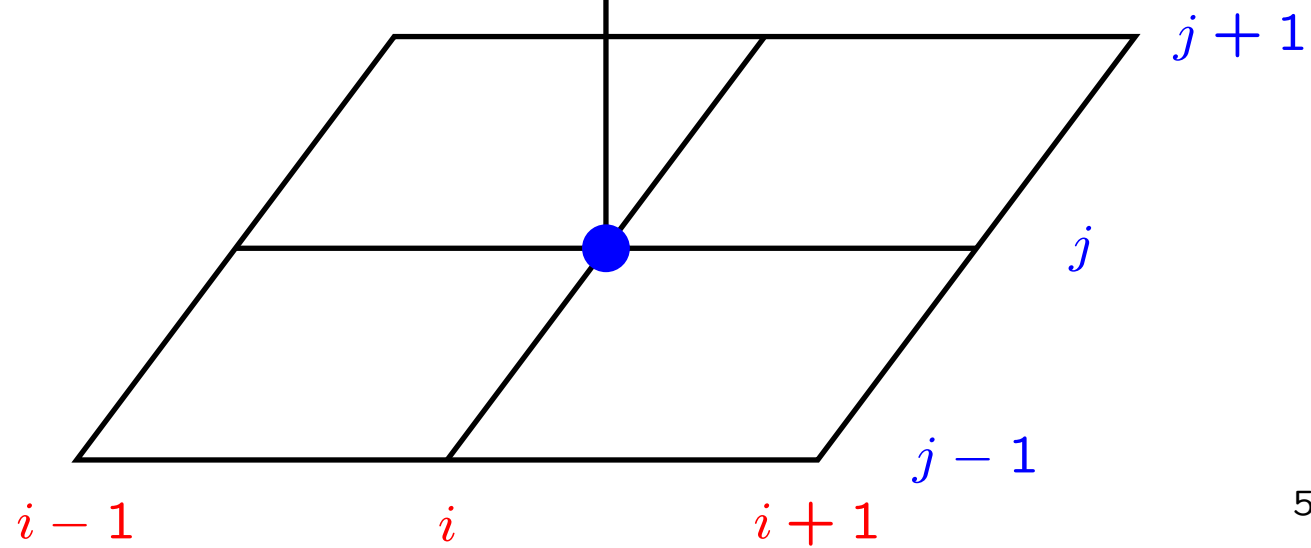
Il metodo alle differenze centrali implicito consiste nell'approssimare al livello temporale $n + 1$ le derivate parziali seconde:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}.$$

Livello $n + 1$



Livello n



- I metodi di Crank-Nicolson e alle differenze centrali implicito sono, appunto, metodi di tipo implicito poiche' ad ogni passo si deve risolvere un sistema lineare con struttura pentadiagonale;
- I metodi sono entrambi incondizionatamente stabili (non ci sono restrizioni sul passo temporale di discretizzazione).

Il Metodo delle Direzioni Alternate

Si effettuano due mezzi passi temporali, uno in ogni direzione:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = L_{xx}u_{i,j}^{n+1/2} + L_{yy}u_{i,j}^n$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = L_{xx}u_{i,j}^{n+1/2} + L_{yy}u_{i,j}^{n+1}$$

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i+1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2},$$

da cui, posto

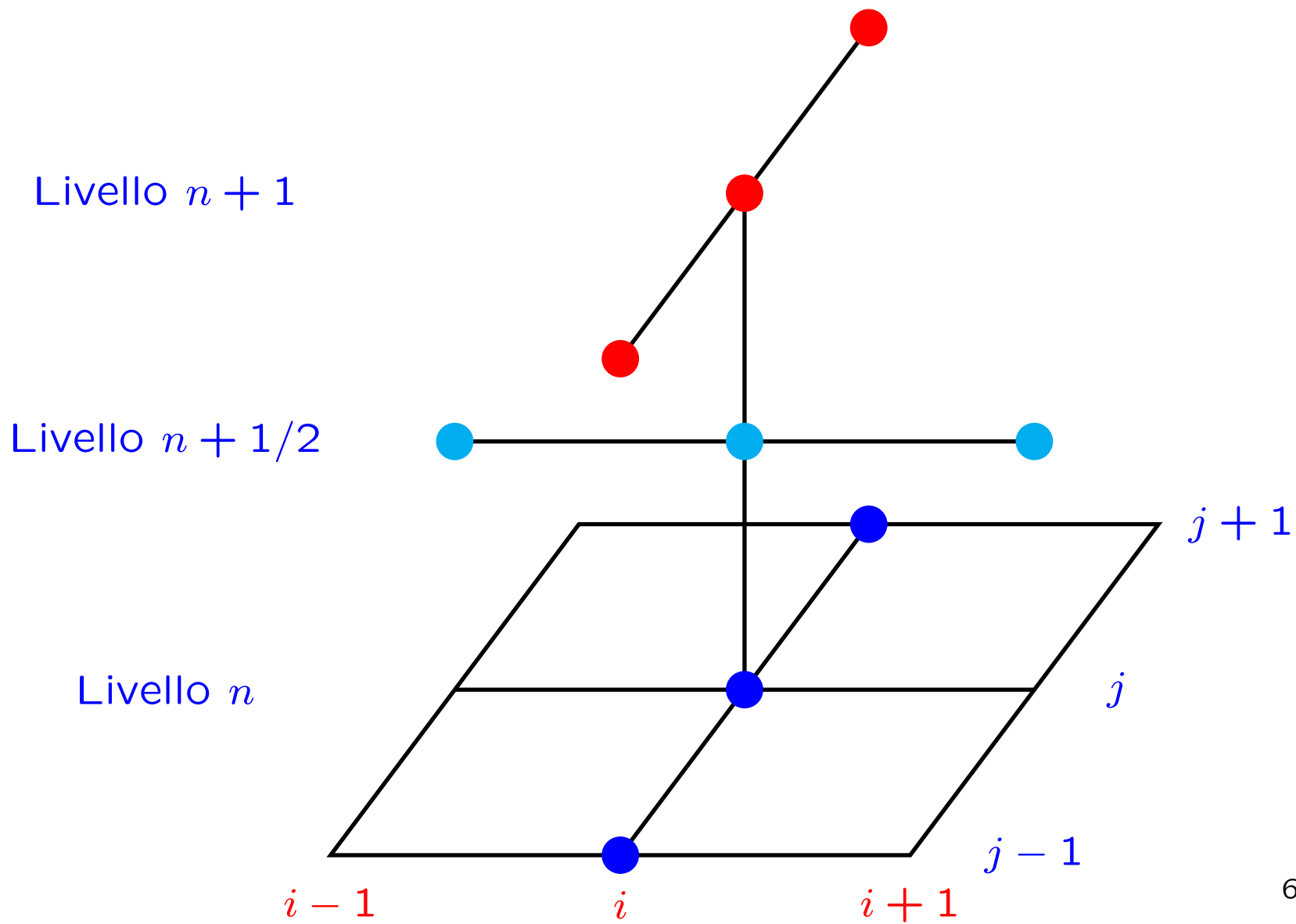
$$\alpha = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$$

si ottiene la relazione relativa al primo mezzo passo temporale:

$$-\alpha u_{i-1,j}^{n+1/2} + (1+2\alpha)u_{i,j}^{n+1/2} - \alpha u_{i+1,j}^{n+1/2} = \beta u_{i,j-1}^n + (1-2\beta)u_{i,j}^n + \beta u_{i,j+1}^n.$$

In modo simile si ricava l'espressione relativa al secondo mezzo passo temporale:

$$-\beta u_{i,j-1}^{n+1} + (1+2\beta)u_{i,j}^{n+1} - \beta u_{i,j+1}^{n+1} = \alpha u_{i-1,j}^{n+1/2} + (1-2\alpha)u_{i,j}^{n+1/2} + \alpha u_{i+1,j}^{n+1/2}.$$



- Il metodo è implicito ma si devono risolvere sistemi che hanno struttura più semplice (tridiagonale);
- Il metodo è incondizionatamente stabile.

Lo Schema di Yanenko

Si effettuano due discretizzazioni temporali con passo dimezzato ognuna rispetto ad una direzione diversa (la prima verso x la seconda verso y).

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = L_{xx} u_{i,j}^{n+1/2}$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = L_{yy} u_{i,j}^{n+1/2}$$

- Il metodo è incondizionatamente stabile.

Esplicitando la relazione si ottiene

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{u_{i-1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i+1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2}$$

da cui, posto

$$\alpha = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

si ottiene la relazione relativa al primo mezzo passo temporale:

$$-\alpha u_{i-1,j}^{n+1/2} + (1 + 2\alpha)u_{i,j}^{n+1/2} - \alpha u_{i+1,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^n.$$

Posto

$$\beta = \frac{\Delta t}{2(\Delta y)^2}$$

ed esplicitando la seconda relazione si ottiene l'espressione esplicita del secondo mezzo passo temporale:

$$-\beta u_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2\beta)u_{i,j}^{n+1} + \beta u_{i,j+1}^{n+1} = u_{i,j}^{n+1/2}.$$

Ad ogni passo temporale si devono risolvere due sistemi lineari che hanno struttura tridiagonale, ed inoltre il metodo è incondizionatamente stabile.

Il Metodo di Hopscotch

È uno schema che è composto da due parti: una esplicita e l'altra implicita.

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = L_{xx}u_{i,j}^n + L_{yy}u_{i,j}^n, \quad \text{se } i + j + n \text{ pari};$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = L_{xx}u_{i,j}^{n+1} + L_{yy}u_{i,j}^{n+1}, \quad \text{se } i + j + n \text{ dispari}.$$

Se n è pari e si pone

$$\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2},$$

si ottiene la seguente espressione se $i + j$ è pari:

$$u_{i,j}^{n+1} = \beta u_{i,j-1}^n + \alpha u_{i-1,j}^n + (1 - 2\alpha - 2\beta)u_{i,j}^n + \alpha u_{i+1,j}^n + \beta u_{i-1,j}^n,$$

e la seguente se $i + j$ è dispari:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{1}{1 + 2\alpha + 2\beta} [\beta u_{i,j-1}^{n+1} + \alpha u_{i-1,j}^{n+1} + \alpha u_{i+1,j}^{n+1} + \beta u_{i-1,j}^{n+1}].$$

Quando n è dispari allora la prima formula vale se $i + j$ è dispari e la seconda se $i + j$ è pari. Il metodo è poco costoso, in quanto è esplicito, poichè nella seconda relazione vengono utilizzate le approssimazioni al passo $n + 1$ che sono già state calcolate. Inoltre il metodo è incondizionatamente stabile.