Capitolo 1

L'insieme dei numeri complessi

1.1 Introduzione ai numeri complessi

I numeri complessi possono essere considerati come coppie ordinate di numeri reali per i quali le operazioni di addizione e moltiplicazione sono definite come segue. Se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ allora

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ zw &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Con queste operazioni i numeri complessi soddisfano le stesse proprietà aritmetiche dei numeri reali (ovvero le proprietà associativa e commutativa).
L'insieme dei numeri complessi viene indicato con $\mathbb{C}$.
Il numero reale a viene identificato da $(a, 0)$ mentre il numero complesso $\iota = (0, 1)$ viene chiamato unità immaginaria. Osserviamo che il prodotto tra un numero reale a e l'unità immaginaria ha come risultato

$$(a, 0)(0, 1) = (0 - 0, a + 0) = (0, a).$$

Pertanto se $z = (a, b)$ è un numero complesso allora può essere espresso anche nel seguente modo

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + \iota b$$

che risulta essere il modo più comune di rappresentazione dei numeri complessi. Osserviamo inoltre che

$$\iota^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

pertanto l'unità immaginaria può essere espressa anche come radice quadrata di -1, $\iota = \sqrt{-1}$. Se $z = a + \iota b$ allora a e b sono detti rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z e sono indicati con i simboli

$$a = \Re e \ z \qquad\qquad b = \Im m \ z.$$

I numeri con parte reale nulla sono detti immaginari puri e si scrivono semplicemente ιb invece che $0 + \iota b$.
Due numeri complessi $a + \iota b$ e $c + \iota d$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.
Nell'insieme dei numeri complessi si possono introdurre le operazioni di somma e di prodotto tramite la seguente definizione. Osserviamo che, posto $z = a + \iota b$ e $0 = 0 + \iota 0$, risulta

$$z + 0 = (a + \iota b) + (0 + \iota 0) = a + \iota b = z$$

per cui 0 ha le stesse proprietà formali dell'insieme dei reali, ovvero di essere elemento neutro per la somma. Per ogni numero complesso $z = a + \iota b$ è possibile definire l'opposto come

$$-z = -a - \iota b$$

tale che $z + (-z) = 0$. La differenza tra due numeri complessi si definisce come la somma dell'opposto, infatti

$$(a + \iota b) - (c + \iota d) = (a + \iota b) + (-c - \iota d) = a - c + \iota(b - d).$$

È facile vedere dalla definizione di prodotto che il numero complesso $1 + \iota 0$ è elemento neutro per il prodotto.
Assegnato $z = a + \iota b$ si definisce coniugato di z il numero $\overline{z} = a - \iota b$, e che si può indicare anche con z^*. Inoltre se $z \neq 0$ si può definire il reciproco $1/z$ come il numero $x + \iota y$ tale che

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

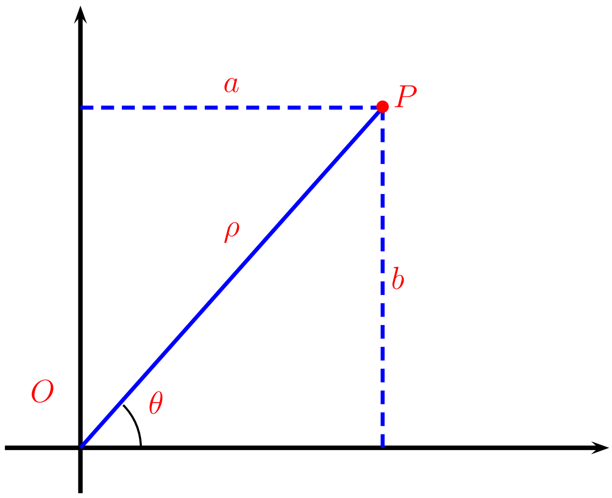
Deve essere

$$(a + \iota b)(x + \iota y) = 1 \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax - by & = 1 \\ \\ bx + ay & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \ x = \frac{a}{a^2 + b^2}; \ y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Dunque
$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \iota\frac{-b}{a^2+b^2}.$$
In pratica $1/z$ può essere ottenuto così
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\iota b} = \frac{a-\iota b}{(a+\iota b)(a-\iota b)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \iota\frac{b}{a^2+b^2}.$$
L'insieme dei numeri complessi munito delle operazioni di somma e prodotto è indicato con $\mathbb{C}$.

Forma trigonometrica di un numero complesso

Un numero complesso $z = a + \iota b$ può essere rappresentato geometricamente nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con il vettore di componenti (a, b). Tale rappresentazione viene detta forma trigonometrica (o polare) ed è visualizzata nella seguente figura.



Consideriamo il numero complesso $z = a + \iota b$ e il vettore $\overrightarrow{OP}$ che lo rappresenta. Il vettore $\overrightarrow{OP}$ può essere rappresentato o attraverso le componenti a, b oppure assegnando la lunghezza ρ e l'angolo θ formato con l'asse reale positivo intendendo come positivi tutti gli angoli ottenuti mediante rotazione in senso antiorario dal semiasse positivo alla semiretta che contiene $\overrightarrow{OP}$. Il numero reale non negativo ρ viene indicato con $|z|$ ed è detto modulo di z

mentre l'angolo θ si chiama argomento e si indica con $\arg(z)$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $a = \Re e z = |z| \cos(arg(z))$;
2. $b = \Im m z = |z| \sin(arg(z))$;
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
4. $\sin\theta = b/\rho$;
5. $\cos\theta = a/\rho$;
6. $\tan\theta = b/a$.

In definitiva z può essere scritto in questo modo

$$z = |z| \left(\cos(arg(z)) + \iota \sin(arg(z))\right).$$

Osservazione. La rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non fornisce una corrispondenza biunivoca tra la coppia $(|z|, arg(z))$ e i punti del piano complesso. L'origine del piano complesso corrisponde infatti alle (infinite) coppie della forma $(0, \theta)$ indipendentemente dal valore di θ. Se assumiamo $|z| \neq 0$ notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia $(|z|, \theta)$ che la coppia del tipo $(|z|, \theta + 2k\pi)$, pertanto si assume convenzionalmente che l'argomento di un numero complesso sia sempre

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi.$$

Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
   infatti, se

$$z_1 = |z_1| \left(\cos\theta + \iota \sin\theta\right), \qquad z_2 = |z_2| \left(\cos\psi + \iota \sin\psi\right)$$

dove

$$\theta = \arg(z_1), \qquad \psi = \arg(z_2)$$

calcolando il prodotto $z_1 z_2$, come da definizione, risulta

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \left[(\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi) + \right. \\ &\left. + \iota\,(\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi)\right] \\ &= |z_1||z_2| \left[\cos(\theta+\psi) + \iota\sin(\theta+\psi)\right]. \end{aligned}$$

e quindi la tesi.

2. $\arg(z_1/z_2)$ $=\arg(z_1)-\arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Il numero complesso $\overline{z} = z^*$, coniugato di $z = a + \iota b$, è legato alla parte reale, immaginaria e modulo di z dalle seguenti relazioni:

1. $|z^*| = |z|$;
2. $\Re e z = (z + z^*)/2$;
3. $\Im m z = (z - z^*)/(2\iota)$;
4. $|z|^2 = z z^*$;
5. $\arg(z^*) = -\arg(z)$;
6. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;
7. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

Formula di De Moivre

Posto $z = \rho(\cos\theta + \iota\sin\theta)$ dalla formula del prodotto è facile dedurre che, per $n = 1, 2, \ldots$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \iota\sin n\theta).$$

Infatti per $n = 1$ la relazione è banalmente verificata. Assumendola vera per un certo n proviamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = z^n \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta) \\ &= \rho^n(\cos n\theta + \imath\sin n\theta)\rho(\cos\theta + \imath\sin\theta) \\ &= \rho^{n+1}(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + \imath(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta)) \\ &= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + \imath\sin(n+1)\theta)). \end{aligned}$$

Radici n-esime di un numero complesso

Assegnato $w \in \mathbb{C}$ si vogliono determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w.$$

Tali numeri sono detti radici n-esime di w. Proviamo che ogni numero complesso ammette esattamente n radici distinte e diamo una formula per calcolarle. Posto

$$w = r(\cos\phi + \imath\sin\phi)$$

e

$$z = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$$

l'equazione $z^n = w$ si scrive

$$\rho^n(\cos n\theta + \imath\sin n\theta) = r(\cos\phi + \imath\sin\phi).$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per un multiplo di 2π abbiamo

$$\rho^n = r$$

e

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

ricavando allora

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

e

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Quest'ultima relazione fornisce dei valori distinti di θ in corrispondenza di $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. La radice che si ottiene per $k = 0$ è detta radice primitiva o fondamentale. Per $k = n$ si trova

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

che coincide con la radice primitiva. Situazioni analoghe valgono per $k > n$ e $k < 0$. Le radici n-esime di un numero complesso sono dunque n e sono ottenute dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

I punti $P_0, \ldots, P_{n-1}$ corrispondenti alle radici n-esime di w si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono i vertici di un poligono regolare a n lati.

Esempio 1.1.1 *Calcolare le radici quinte di 1.*
Applicando la formula si ha

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + \iota \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Esponenziale complesso

Sia z un numero complesso non nullo scritto nella forma trigonometrica

$$z = |z|(\cos\theta + \iota \sin\theta).$$

Evidentemente il numero complesso $w = z/|z|$ ha modulo unitario. Dunque un qualunque numero complesso non nullo può essere espresso come prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e un numero complesso di modulo 1,

$$z = |z|w, \qquad |w| = 1.$$

Siano ora z_1 e z_2 due numeri complessi di modulo 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\theta + \iota\sin\theta \qquad && |z_1| = 1 \\ z_2 &= \cos\phi + \iota\sin\phi \qquad && |z_2| = 1. \end{aligned}$$

Dalla definizione di prodotto si ha:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 \quad &= \cos(\theta+\phi) + \iota \sin(\theta+\phi) \\
|z_1 z_2| \quad &= 1 \\
arg(z_1 z_2) \quad &= arg(z_1) + arg(z_2).
\end{aligned}
$$

Notiamo che la moltiplicazione di z_1 e z_2 si traduce in una somma (quella degli argomenti) e in particolare per $\phi = -\theta$ si ha

$$z_1 z_2 = 1.$$

Questo comportamento è analogo a quello della funzione esponenziale reale. Infatti

$$e^a e^b = e^{a+b}, \qquad\qquad e^a e^{-a} = 1.$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo 1 che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Ovviamente non si tratta di esponenziali reali in quanto bisogna rappresentare numeri complessi. Queste considerazioni motivano, seppure in modo intuitivo, l'introduzione della formula di Eulero:

$$e^{\iota\theta} = \cos\theta + \iota \sin\theta$$

per la rappresentazione di numeri complessi di modulo 1. Se $z \in \mathbb{C}$ allora può essere rappresentato come

$$z = \rho e^{\iota\theta}$$

dove ρ rappresenta il modulo mentre θ è l'argomento di z.
Sia ora z un generico numero complesso espresso nella forma $z = x + \iota y$. Considerando l'analogia formale con gli esponenziali reali imponiamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, cioè

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x e^{\iota y}.$$

Questa relazione, insieme alla formula di Eulero, pone la seguente definizione di esponenziale di un numero complesso:

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x(\cos y + \iota \sin y). \tag{1.1}$$

Da questa si deducono le seguenti proprietà:

1. $\Re e e^z = e^x \cos y$;
2. $\Im m e^z = e^x \sin y$;
3. $|e^z| = e^x$;
4. $arg(e^z) = y$.

Utilizzando la (1.1) è facile provare che per l'esponenziale complesso valgono le stesse regole dell'esponenziale reale:

1. $e^{z+w} = e^z e^w$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;
2. $(e^z)^w = e^{zw}$.

Non è possibile estendere al campo complesso la proprietà di stretta positività di cui gode l'esponenziale reale, però è possibile provare che

$$e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Infatti se esite un numero complesso $z_0 = x_0 + \iota y_0$ tale che $e^{z_0} = 0$ dovrebbe essere

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 & = 0 \\ \\ e^{x_0} \sin y_0 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y_0 & = 0 \\ \\ \sin y_0 & = 0 \end{cases}$$

e ciò è assurdo. La definizione di esponenziale complesso ha però una conseguenza imprevedibile se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Infatti per qualunque $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi\iota} &= e^{x+\iota y+2k\pi\iota} = e^{x+\iota(y+2k\pi)} \\ &= e^x(\cos(y+2k\pi) + \iota \sin(y+2k\pi)) \\ &= e^x(\cos y + \iota \sin y) = e^z \end{aligned}$$

cioè la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi\iota$.

Alcune proprietà di modulo e argomento

La forma esponenziale complessa permette un'agevole dimostrazione di alcune proprietà del modulo e dell'argomento di un numero complesso. Siano infatti

$$z_1 = \rho_1 e^{\iota\theta_1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \rho_2 e^{\iota\theta_2}$$

allora

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\iota\theta_1} \rho_2 e^{\iota\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{\iota(\theta_1+\theta_2)}$$

e dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \text{e} \qquad arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Analogamente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\iota\theta_1}}{\rho_2 e^{\iota\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\iota(\theta_1-\theta_2)}$$

da cui

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad \text{e} \qquad arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

In particolare

$$|z_1 e^{\iota\alpha}| = |z_1|$$

e

$$arg(z_1 e^{\iota\alpha}) = arg(z_1) + \alpha \tag{1.2}$$

dunque la moltiplicazione di un numero complesso per l'esponenziale di un immaginario puro provoca una rotazione. Inoltre

$$|z_1 \iota| = |z_1 e^{\iota\pi/2}| = |z_1|$$

e

$$arg(z_1 \iota) = arg(z_1) + \frac{\pi}{2}$$

ovvero la moltiplicazione di un numero complesso per l'unità immaginaria provoca una rotazione di $\pi/2$.

Esempio 1.1.2 *Calcolare modulo e argomento del numero complesso*

$$z = \frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\, e^{\iota\pi/2}.$$

Sfruttando la proprietà (1.2) abbiamo

$$arg(z) = arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) &= arg\left(\frac{1-\iota\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}\cdot 4}{4}\right) = -\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Dunque

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Inoltre

$$|z| = \left|\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{4} - \frac{\iota\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

Seni e coseni complessi

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ dalla formula di Eulero si ha:

$$e^{\iota\alpha} = \cos\alpha + \iota\sin\alpha$$

e

$$e^{-\iota\alpha} = \cos\alpha - \iota\sin\alpha.$$

Sommando e sottraendo queste due relazioni si ottengono rispettivamente:

$$\cos\alpha = \frac{e^{\iota\alpha} + e^{-\iota\alpha}}{2}$$

e

$$\sin\alpha = \frac{e^{\iota\alpha} - e^{-\iota\alpha}}{2\iota}.$$

Poichè abbiamo dato significato all'esponenziale anche nel caso in cui α sia complesso possiamo facilmente estendere la definizione di seno e coseno a tutto il campo complesso nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2}$$

e
$$\sin z = \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota}.$$
Con tali definizioni non è difficile provare che molte proprietà delle funzioni trigonometriche, quali ad esempio le formule di addizione e sottrazione e le formule di duplicazione, continuano a valere. Le funzioni seno e coseno così definite sono funzioni periodiche di periodo 2π. Infatti

$$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{\iota(z+2k\pi)} + e^{-\iota(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.$$

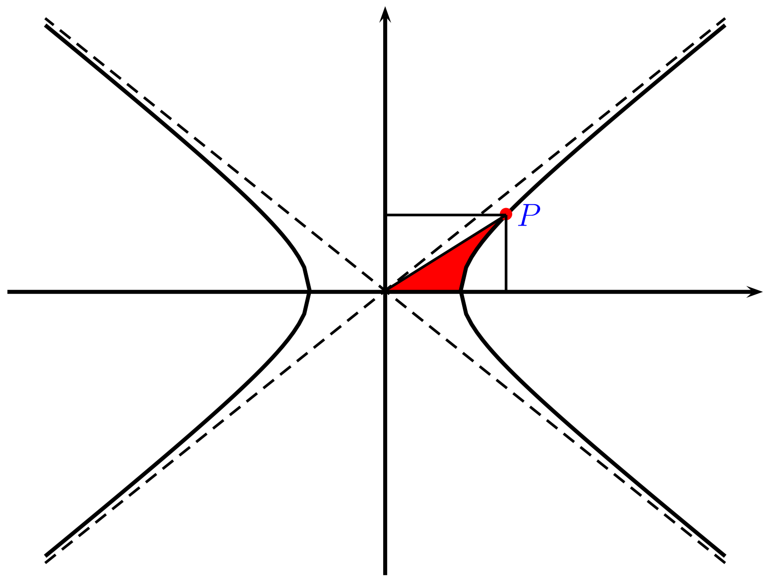
Analoga dimostrazione vale per la funzione seno. Le funzioni seno e coseno complessi, a differenza di quelle reali, possono avere modulo maggiore di 1. Per esempio
$$\cos(2\iota) = \frac{e^{\iota(2\iota)} + e^{-\iota(2\iota)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} > 2.$$

Seni e coseni iperbolici complessi

Le funzioni trigonometriche iprboliche sono definite usado l'iperbole equilatera centrata nell'origine con coefficienti $a = b = 1$, e avente pertanto equazione
$$x^2 - y^2 = 1.$$

Gli asintoti coincidono con le rette bisettrici dei quadranti. Per definire le funzioni trigonometriche iperbolice si utilizza esclusivamente il ramo a destra di equazioni
$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}, \qquad x \geq 1.$$

Dato un numero reale positivo t, sia P il punto del ramo superiore della curva che individua il settore iperbolico di area $A = t/2$, evidenziato in rosso nella seguente figura.



Si definiscono coseno iperbolico, $\cosh t$, e seno iperbolico, $\sinh t$, rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P. Considerando che si può considerare negativa l'area se il punto P ha ordinata negativa allora è possibile definire le funzioni trigonometriche iperboliche anche per valori negativi di t. È possibile comunque derivare espressioni analitiche per il seno ed il coseno iperbolico (appena definiti per via geometrica) utilizzando altre funzioni note. Infatti fissato $t \in \mathbb{R}$ il seno ed il coseno iperbolico sono uguali alle seguenti espressioni:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

È naturale allora estendere al campo complesso questa definizione, ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Le funzioni appena definite risultano essere periodiche di periodo $2\pi\iota$. Infatti

$$\cosh(z + 2k\pi\iota) = \frac{e^{z+2k\pi\iota} + e^{-(z+2k\pi\iota)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Tra funzioni iperboliche e funzioni circolari valgono le seguenti relazioni

$$
\begin{array}{lll}
1) & \sin(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota(\iota z)} - e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = -\iota \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2} = \iota \sinh z \\[2ex]
2) & \cos(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota(\iota z)} + e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z \\[2ex]
3) & \sinh(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2} = \iota \dfrac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota} = \iota \sin z \\[2ex]
4) & \cosh(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.
\end{array}
$$

Gli zeri delle funzioni iperboliche

Vogliamo determinare ora i valori $z \in \mathbb{C}$ che annullano le funzioni iperboliche.

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow e^{z} - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota 2k\pi} \Rightarrow z = k\pi\iota.$$

Analogamente

$$
\begin{gathered}
\cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{z} + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota(\pi + 2k\pi)} \Rightarrow z = \iota \frac{\pi}{2} + k\pi\iota.
\end{gathered}
$$

Osservazione. Se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\sinh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 1) vista precedentemente deve essere

$$\iota \sin(\iota \tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\iota \tilde{z}) = 0$$

e ciò implica che $\iota\tilde{z}$ è zero della funzione seno. Dunque dalla definizione

$$\sin(z) = 0 \Rightarrow z = k\pi$$

infatti la funzione seno è una funzione dispari. Inoltre se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\cosh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 2) deve essere

$$\cos(\iota \tilde{z}) = 0 \Rightarrow \cos(-\iota \tilde{z}) = 0$$

e dunque gli zeri sono

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

infatti la funzione coseno è pari.

Logaritmo di un numero complesso

Per $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sappiamo che la funzione logaritmo (reale) ha la seguente proprietà:

$$\log re^{\alpha} = \log r + \log e^{\alpha} = \log r + \alpha \log e = \log r + \alpha.$$

Definiamo con abuso di notazione il logaritmo complesso in modo che questa proprietà venga conservata. Poniamo infatti per $z \neq 0$:

$$\log z = \log(|z|e^{\iota(\theta+2k\pi)}) = \log|z| + \iota arg(z) + \iota 2k\pi; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Si noti che la funzione logaritmo così definita è una funzione ad infiniti valori.

Esponenziale con base complessa

L'esponenziale complesso si definisce a partire dai logaritmi complessi. Per $z, w \in \mathbb{C}$ si pone:

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w(\log|z| + \iota arg(z) + \iota 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \iota^{\iota} &= e^{\iota \log \iota} = e^{\iota(\log|\iota| + \iota arg(\iota) + \iota 2k\pi)} \\ &= e^{\iota(\iota\pi/2 + \iota 2k\pi)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}. \end{aligned}$$

Capitolo 2

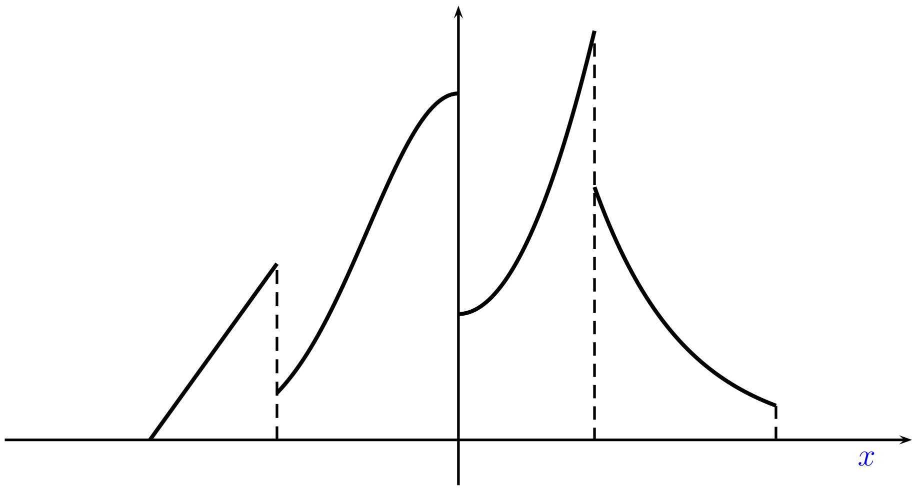
La Trasformata di Laplace

2.1 Introduzione

Le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni alle derivate parziali descrivono in modo molto accurato una grande quantità di fenomeni naturali in diversi campi delle scienze applicate. Uno strumento molto potente per risolvere questi problemi è la trasformata di Laplace che trasforma appunto il problema differenziale in un'espressione algebrica elementare. In questo capitolo sarà descritto appunto tale strumento e la sua applicazione ad alcuni di tali problemi differenziali.

Definizione 2.1.1 *Una funzione $F(t)$ è detta generalmente continua nell'intervallo $[a, b]$ se questo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua ed ammette limite destro e sinistro finiti.*

Un esempio di funzione generalmente continua è illustrata nella seguente figura.



Una funzione generalmente continua può presentare, come unico tipo di discontinuità, dei salti, ovvero punti in cui i limiti destro e sinistro esistono, sono finiti ma diversi. Una funzione generalmente continua nell'intervallo finito $[a, b]$ è sicuramente integrabile.

Definizione 2.1.2 *Una funzione $F(t)$ ha ordine esponenziale α se esistono due costanti $\alpha, M > 0$, tali che per qualche $t_0 \geq 0$ risulta*

$$|F(t)| < Me^{\alpha t}, \qquad \textit{per ogni } t \geq t_0.$$

Per esempio la funzione $F(t) = e^{at}$ ha ovviamente ordine esponenziale a, mentre

$$F(t) = t^n, \qquad n > 0$$

ha ordine α, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} + \cdots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \cdots > \frac{\alpha^n t^n}{n!}$$

quindi

$$t^n < \frac{n!}{\alpha^n} e^{\alpha t}$$

Le funzioni trigonometriche $\cos t$, $\sin t$ sono limitate quindi hanno ordine esponenziale 0, mentre $F(t) = e^{-t}$ ha ordine esponenziale -1. La funzione $F(t) = e^{t^3}$ non è di ordine esponenziale. Infatti

$$|e^{-\alpha t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \alpha t}$$

e questa quantità può essere resa maggiore di qualunque quantità assegnata, facendo crescere opportunamente t.

Definizione 2.1.3 *Sia $F(t)$ una funzione definita per $t > 0$. Si dice* Trasformata di Laplace *di $F(t)$, ed è indicata con $L[F(t)]$, la seguente*

$$L[F(t)] = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt, \tag{2.1}$$

con s parametro reale.

La Trasformata di Laplace $L[F(t)]$ *esiste* se l'integrale in (2.1) esiste per qualche valore di s.
Vediamo ora le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Teorema 2.1.1 *Se la funzione $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \leq t \leq t_0$ ed è di ordine esponenziale α per $t > t_0$ allora la trasformata di Laplace*

$$f(s) = L[F(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

esiste per ogni $s > \alpha$.

Dimostrazione. Fissato un qualunque $t_0 > 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} F(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Poichè $F(t)$ è generalmente continua su $[0, t_0]$ essa è integrabile nello stesso intervallo e dunque il primo integrale a secondo membro esiste ed è un numero finito. Per quanto concerne il secondo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} |F(t)| dt \\ &\leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} M e^{\alpha t} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \frac{M}{\alpha - s} \int_0^{+\infty} (\alpha - s) e^{(\alpha - s)t} dt = \frac{M}{s - \alpha} \end{aligned}$$

per $s > \alpha$. $\square$

Teorema 2.1.2 *Sia $F(t)$ tale che*

1. $$\lim_{t\to 0} F(t) = \pm\infty$$

2. *$F(t)$ continua a tratti in ogni intervallo $t_0 \le t \le t_1$, per qualche $t_0 > 0$;*

3. $$\lim_{t\to 0} t^n \; F(t) = 0$$
   per qualche $n \in]0,1[$;

4. *$F(t)$ è di ordine esponenziale α per $t > t_1$,*

allora $L[F(t)]$ esiste. $\Box$

2.1.1 Proprietà delle Trasformate di Laplace

Assumiamo che per una assegnata funzione $F(t)$ valgano le ipotesi del teorema 2.1.1 allora per la trasformata di Laplace sono valide le seguenti proprietà.

1. Proprietà di linearità:
   $$L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] = c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, s > \alpha.$$
   Dimostrazione.
   $$\begin{aligned} L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(c_1F_1(t) + c_2F_2(t))dt \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_2(t)dt \\ &= c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)]. \;\Box \end{aligned}$$

2. I^a Proprietà di traslazione:
   posto
   $$L[F(t)] = f(s)$$
   si ha
   $$L[e^{at}F(t)] = f(s-a), \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \; s > \alpha + a.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[e^{at}F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}F(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s-a). \ \square \end{aligned}$$

3. II^a Proprietà di traslazione:
   posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

e

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$$

risulta

$$L[G(t)] = e^{-as}f(s), \qquad s > \alpha.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt \\ &= \int_0^{a} e^{-st}G(t)dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}G(t)dt \\ &= \int_0^{a} e^{-st}0dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)}F(u)du \\ &= e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-su}F(u)du = e^{-sa}f(s). \ \square \end{aligned}$$

4. Proprietà del cambio di scala:
   posto
   $$L[F(t)] = f(s)$$
   si ha
   $$L[F(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0,\ s > \alpha a.$$
   Dimostrazione.
   $$\begin{aligned} L[F(at)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{u}{a}} \frac{F(u)}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}u} F(u)du \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right). \ \square \end{aligned}$$

Vediamo ora le trasformate di Laplace di alcune funzioni fondamentali.

1. $$L[1] = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$
   Infatti
   $$\begin{aligned} L[1] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{p \to +\infty} \int_0^p e^{-st} dt \\ &= -\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s) e^{-st} dt \\ &= -\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-st}\right]_0^p = \frac{1}{s}, \qquad s > 0; \end{aligned}$$

2. $$L[t] = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st} t dt \\ &= -\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s) t e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{p\to+\infty} \int_0^p t \frac{d}{dt}(e^{-st}) dt \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{p\to+\infty} \left\{ [te^{-st}]_0^p - \int_0^p e^{-st} dt \right\} \\ &= \lim_{p\to+\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sp}}{s^2} - \frac{pe^{-sp}}{s} \right] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0; \end{aligned}$$

3. per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a. \tag{2.2}$$

Infatti basta osservare che $L[1] = 1/s$ ed applicare la I^a proprietà di traslazione;

4.
$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0;$$

5.
$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0.$$

Queste ultime due trasformate possono essere calcolate utilizzando la definizione di trasformata di Laplace, ma vediamo di trovare un modo alternativo.
Supponendo che la (2.2) sia vera anche per numeri complessi, possiamo scrivere

$$L[e^{\iota at}] = \frac{1}{s-\iota a} = \frac{s+\iota a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + \iota \frac{a}{s^2+a^2}. \tag{2.3}$$

Applicando la proprietà di linearità si ha

$$\begin{aligned} L[e^{\iota at}] &= L[\cos at + \iota \sin at] = L[\cos at] + \iota L[\sin at] \\ &= \frac{s}{s^2+a^2} + \iota \frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

quindi

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

6.

$$L[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \qquad s > |a|;$$

$$\begin{aligned} L[\sinh at] &= L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}L[e^{at}] - \frac{1}{2}L[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \qquad s > |a|. \end{aligned}$$

7.

$$L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \qquad s > |a|.$$

Analogamente al caso precedente, ricordando che

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione delle altre proprietà della trasformata di Laplace.

Esempio 2.1.1

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}.$$

Ricordando che

$$L[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

ed applicando la prima proprietà di traslazione con $a = -1$ *segue che*

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}.$$

Esempio 2.1.2

$$L[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Posto $f(s) = L[\sin t]$ *si ha*

$$L[\sin 3t] = \frac{1}{3} f\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Teorema 2.1.3 *Se* $L[F(t)] = f(s)$ *allora*

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s), \; s > \alpha.$$

Dimostrazione. Poniamo, al solito,

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Allora, per induzione

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-st} F(t) dt \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-st} (tF(t)) dt = -L[tF(t)]. \end{aligned}$$

Dunque

$$L[tF(t)] = -f'(s)$$

e la tesi è vera per $n = 1$. La dimostrazione si completa per induzione. Assunta vera la tesi per un fissato k

$$L[t^k F(t)] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} f(s)$$

dimostriamola per $k+1$. Infatti

$$\begin{aligned} L\left[t^{k+1}F(t)\right] &= L\left[t\left(t^k F(t)\right)\right] \\ &= -\frac{d}{ds}L\left[t^k F(t)\right] \\ &= -\frac{d}{ds}\,(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}f(s) \\ &= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}f(s).\ \square \end{aligned}$$

Esempio 2.1.3 *Un'applicazione del teorema appena dimostrato è la seguente*

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Infatti

$$L[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s}$$

da cui si ricava, per induzione, il risultato. Infatti per $n = 1$ risulta

$$L[t] = \frac{1}{s}$$

e per $n-1$ l'ipotesi di induzione è:

$$L[t^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

Ora applicando il Teorema 2.1.3 risulta

$$\begin{aligned} L[t^n] &= L[t\cdot t^n] = -\frac{d}{ds}L[t^{n-1}] = -\frac{d}{ds}(n-1)!s^{-n} \\ &= -(-n)(n-1)!s^{-n-1} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

2.1.2 Trasformata di Laplace di derivate e funzioni periodiche

Teorema 2.1.4 *Sia $F(t)$ continua in $0 \le t \le t_0$, di ordine esponenziale α per $t > t_0$, ed $F'(t)$ generalmente continua in $0 \le t \le t_0$. Posto*

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) \qquad s > \alpha.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
L[F'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F'(t)dt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st} F'(t)dt \\
&= \lim_{p\to+\infty} \left\{ \left[e^{-st}F(t)\right]_0^p + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt \right\} \\
&= \lim_{p\to+\infty} \left\{ e^{-sp}F(p) - F(0) + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt \right\} \\
&= \lim_{p\to+\infty} e^{-sp}F(p) + \lim_{p\to+\infty} \left(s\int_0^p e^{-st}F(t)dt - F(0) \right).
\end{aligned}$$

Poichè $F(t)$ di ordine esponenziale α risulta

$$e^{-sp}|F(p)| \le e^{-sp}Me^{\alpha p} = \underbrace{Me^{-(s-\alpha)p} \longrightarrow 0}_{p\to+\infty}$$

in quanto $s > \alpha$ quindi segue la tesi. $\square$

Osservazione 1. Se nelle ipotesi del precedente teorema $F(t)$ non è continua in $t = 0$ ma esiste il

$$\lim_{t\to0^+} F(t) = F(0^+),$$

allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0^+).$$

Osservazione 2. Se $F(t)$ non è continua in $t = a$, allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) - e^{-as}(F(a^+) - F(a^-))$$

dove $F(a^-)$ ed $F(a^+)$ rappresentano i limiti della funzione a sinistra e a destra della discountinuità rispettivamente.

Teorema 2.1.5 *Sia* $L[F(t)] = f(s)$*. Se* $F^{(k)}(t)$ *è continua in* $0 \leq t \leq t_0$ *e di ordine esponenziale per* $t > t_0$*, per* $k = 0, 1, \ldots, n-1$*, e* $F^{(n)}(t)$ *è generalmente continua in* $0 \leq t \leq t_0$*, allora*

$$L[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j} F^{(j-1)}(0).$$

Dimostrazione. (Per induzione). Per $n = 1$ la tesi è una diretta conseguenza del teorema 2.1.4. Supponiamo vera la tesi per k

$$L[F^{(k)}(t)] = s^k f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} F^{(j-1)}(0)$$

e dimostriamola per $k + 1$. Infatti

$$\begin{aligned} L[F^{(k+1)}(t)] &= L\left[\frac{d}{dt}F^{(k)}(t)\right] = sL[F^{(k)}(t)] - F^{(k)}(0) \\ &= s\left\{s^k f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} F^{(j-1)}(0)\right\} - F^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j+1} F^{(j-1)}(0) - F^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k+1} s^{k-j+1} F^{(j-1)}(0). \ \Box \end{aligned}$$

Teorema 2.1.6 *Sia* $F(t)$ *una funzione periodica di periodo* $T > 0$*, cioè* $F(t + T) = F(t)$ *per ogni* t*. Allora*

$$L[F(t)] = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} F(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}F(t)dt \qquad (\text{posto } t = u + kT) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{T} e^{-s(u+kT)}F(u+kT)du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} \int_0^{T} e^{-su}F(u)du = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-su}F(u)du}{1-e^{-sT}}. \; \square
\end{aligned}$$

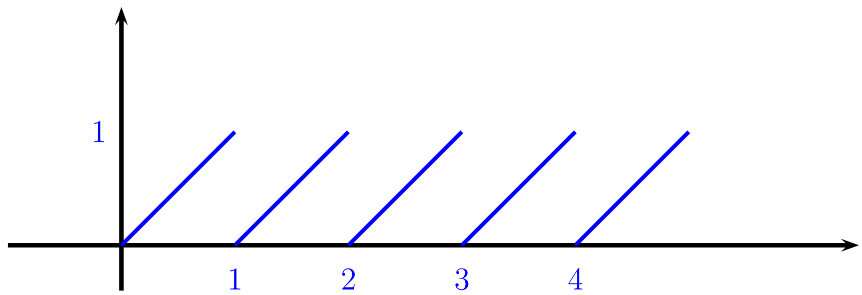
Supponiamo ora di dover calcolare la trasformata di Laplace della funzione parte decimale di t definita come

$$F(t) = t - \lfloor t \rfloor, \qquad t \geq 0,$$

dove

$$\lfloor t \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq t\}$$

è la parte intera di t. La funzione ha il seguente grafico:



Indicata con $f(s)$ la sua trasformata di Laplace risulta

$$
\begin{aligned}
L[F(t)] &= \frac{\int_0^1 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-s}} = \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left\{\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt\right\} \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left\{-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^1\right\} \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}}\left\{-\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2}\right\} \\
&= \frac{1}{s^2(1-e^{-s})}\left[1-e^{-s}-se^{-s}\right].
\end{aligned}
$$

2.1.3 Trasformata di Laplace di integrali

Teorema 2.1.7 *Sia $L[F(t)] = f(s)$, allora*

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$G(t) = \int_0^t F(u)du.$$

Osserviamo che $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. Passando alla trasformata di Laplace di ambo i membri segue:

$$L[G'(t)] = sL[G(t)] - G(0) = sL[G(t)]$$

ma poichè

$$L[G'(t)] = L[F(t)] = f(s)$$

risulta

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}. \square$$

Esempio 2.1.4

$$L\left[\int_0^t \sin 2u du\right] = \frac{L[\sin 2t]}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Teorema 2.1.8 *Posto $L[F(t)] = f(s)$ ed $F(t)$ soddisfacente le ipotesi del teorema 2.1.1 si ha*

$$\lim_{s\to+\infty} f(s) = 0.$$

Dimostrazione.

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

abbiamo

$$\lim_{s\to+\infty} f(s) = \lim_{s\to+\infty}\ \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st}F(t)dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right| &< \int_0^p e^{-st}e^{\alpha t}Mdt \\
&= M\int_0^p e^{-(s-\alpha)t}dt \\
&= \frac{M}{\alpha-s}\ \left[e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^p \\
&= \frac{M}{\alpha-s}\ \left[e^{-(s-\alpha)p}-1\right].
\end{aligned}$$

Passando al limite per $s, p \to +\infty$ si ha

$$\lim_{s\to+\infty}\ \lim_{p\to+\infty} \frac{M}{\alpha-s}\ \left[e^{-(s-\alpha)p}-1\right] = \lim_{s\to+\infty} \frac{-M}{\alpha-s} = 0$$

e quindi segue la tesi. □

2.1.4 Divisione per t

Teorema 2.1.9 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t}$$

esiste ed è finito allora

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} f(u)du.$$

Dimostrazione. Sia

$$G(t) = \frac{F(t)}{t}$$

ovvero

$$F(t) = tG(t);$$

passando alle trasformate di Laplace dei due membri ed applicando il teorema 2.1.3 segue

$$L[F(t)] = L[tG(t)] = -\frac{d}{ds}L[G(t)].$$

Posto $g(s) = L[G(t)]$, abbiamo

$$f(s) = -\frac{d}{ds}g(s).$$

Integrando membro a membro tra s e p e utilizzando il teorema 2.1.8 segue:

$$\int_s^p f(u)du = -\int_s^p \frac{d}{du}g(u)du = g(s) - g(p).$$

Da quest'ultima passando al limite per $p \to +\infty$ segue la tesi. □

2.1.5 Applicazione delle trasformate di Laplace al calcolo di integrali

Se $f(s) = L[F(t)]$ allora

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

da cui

$$\lim_{s\to 0} f(s) = f(0) = \lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{+\infty} F(t)dt.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt = f(0)$$

(purchè gli integrali in oggetto siano convergenti).

2.2 Antitrasformata di Laplace

Definizione 2.2.1 *Se $\mathcal{N}(t)$ è una funzione di t tale che, per ogni $t > 0$, si ha*

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du = 0$$

allora $\mathcal{N}$ si dice Funzione Nulla.

Esempio 2.2.1 *La funzione:*

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione nulla.

In generale ogni funzione che abbia valore nullo in tutti i punti, eccetto in un insieme numerabile, è una funzione nulla. Evidentemente

$$L[\mathcal{N}(t)] = 0.$$

Definizione 2.2.2 *Se $L[F(t)] = f(s)$ è la trasformata di Laplace di $F(t)$ allora $F(t)$ si dice Antitrasformata di Laplace di $f(s)$ (oppure Trasformata Inversa) e si scrive*

$$F(t) = L^{-1}[f(s)].$$

L^{-1} è detto Operatore Trasformata Inversa di Laplace.

Evidentemente poichè la trasformata di Laplace di una funzione nulla è 0 ne consegue che

$$L[F(t) + \mathcal{N}(t)] = L[F(t)] + L[\mathcal{N}(t)] = L[F(t)]$$

e perciò possiamo concludere che in generale due diverse funzioni possono ammettere la stessa trasformata di Laplace.
Se si escludono le funzioni nulle è però possibile stabilire un risultato di unicità, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 2.2.1 *(Teorema di Lerch). Funzioni differenti, continue e definite nell'intervallo* $[0, +\infty)$, *ammettono trasformate di Laplace differenti.* □

Nel seguito assumeremo sempre, salvo esplicita affermazione contraria, che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Lerch.

2.2.1 Proprietà dell'Antitrasformata di Laplace

1. Proprietà di linearità:
   se $f_1(s)$ ed $f_2(s)$ sono le trasformate di Laplace di $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ rispettivamente, allora

$$\begin{aligned} L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] &= c_1 L^{-1}[f_1(s)] + c_2 L^{-1}[f_2(s)] \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t), \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

   Dimostrazione.

$$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

   conseguentemente

$$\begin{aligned} c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) &= L^{-1}\left[L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)]\right] \\ &= L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]; \end{aligned}$$

   ma, poichè $F_1(t) = L^{-1}[f_1(s)]$ e $F_2(t) = L^{-1}[f_2(s)]$ segue la tesi. □

2. I^a Proprietà di traslazione:
   posto
$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   si ha
$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t).$$
   Dimostrazione. Poichè
$$L[e^{at}F(t)] = f(s-a)$$
   allora
$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \square$$
   In alternativa
$$\begin{aligned} f(s-a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = L[e^{at}F(t)]. \end{aligned}$$
   Dunque
$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \square$$

3. II^a Proprietà di traslazione:
   posto
$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   si ha
$$L^{-1}[e^{-as}f(s)] = G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a, \end{cases}$$
   con $a > 0$.
   Dimostrazione. Da
$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{-sa}f(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)}F(t)dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-su}F(u-a)du \\ &= \int_0^{a} e^{-st}0\ dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt. \ \Box \end{aligned}$$

4. Proprietà del cambio di scala:

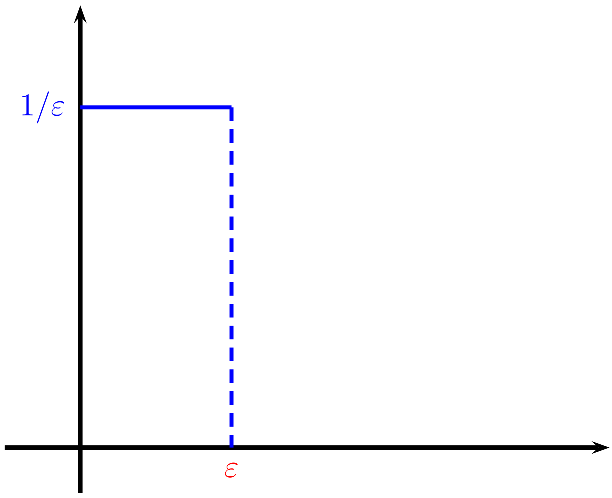
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   e $k > 0$ allora
   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right).$$
   Dimostrazione. Per la proprietà del cambio di scala delle trasformate di Laplace si ha:
   $$L[F(at)] = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right).$$
   Posto $k = 1/a$ risulta pertanto
   $$kf(ks) = L\left[F\left(\frac{t}{k}\right)\right],$$
   pertanto
   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right). \ \Box$$

5. Antitrasformata di Laplace delle derivate:

   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   allora
   $$L^{-1}[f^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n F(t).$$
   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. □

6. Antitrasformata di Laplace di integrali:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} f(u)du\right] = \frac{F(t)}{t}.$$
   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace.

7. Prodotto per s:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   e $F(0) = 0$, allora
   $$L^{-1}[sf(s)] = F'(t).$$
   Se $F(0) \neq 0$ allora
   $$L^{-1}[sf(s) - F(0)] = F'(t),$$
   quindi
   $$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + L^{-1}[F(0)].$$
   Dobbiamo quindi determinare quale funzione ammette come trasformata una costante. Per questo definiamo la seguente funzione:
   $$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$
   dove $\varepsilon > 0$.



È chiaro che per $\varepsilon \to 0$ l'altezza del rettangolo cresce oltre ogni limite mentre la larghezza tende a 0, in modo tale però che l'area del rettangolo sia costantemente uguale a 1, cioè

$$\int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace di tale funzione.

$$\begin{aligned} L[F_\varepsilon(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F_\varepsilon(t)dt \\ &= \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}. \end{aligned}$$

Quando ε tende a zero, la funzione $F_\varepsilon(t)$ tende ad una funzione, che viene indicata con $\delta(t)$, chiamata delta di Dirac o funzione impulsiva unitaria. La traformata di Laplace della funzione $\delta(t)$ si ottiene calcolando il limite, per ε che tende a zero, della trasformata di $F_\varepsilon(t)$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} L[F_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = 1.$$

Per ottenere l'ultimo passaggio è sufficiente applicare il Teorema di de L'Hopital. In definitiva

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + F(0)\delta(t) \tag{2.4}$$

La funzione $\delta(t)$ gode delle seguenti proprietà:

(i)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

(ii)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)G(t)dt = G(0)$$

per ogni funzione continua $G(t)$;

(iii)

$$\int_0^{+\infty} \delta(t-a)G(t)dt = G(a)$$

per ogni funzione continua $G(t)$ e per ogni $a > 0$;

(iv)

$$L[\delta(t-a)] = e^{-as};$$

8. Divisione per s:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t F(u)du.$$
   Dimostrazione. Basta tener conto dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. □

9. Proprietà di Convoluzione:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   e
   $$L^{-1}[g(s)] = G(t)$$
   allora
   $$L^{-1}[f(s)g(s)] = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G.$$
   $F * G$ è detta Convoluzione di F e G.

   Dimostrazione. La tesi è dimostrata se si prova che
   $$f(s)g(s) = L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right].$$

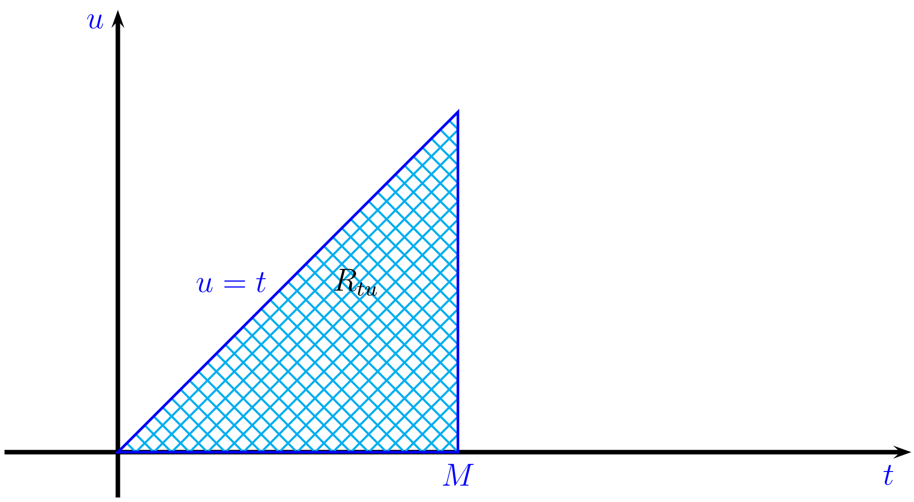
Allora

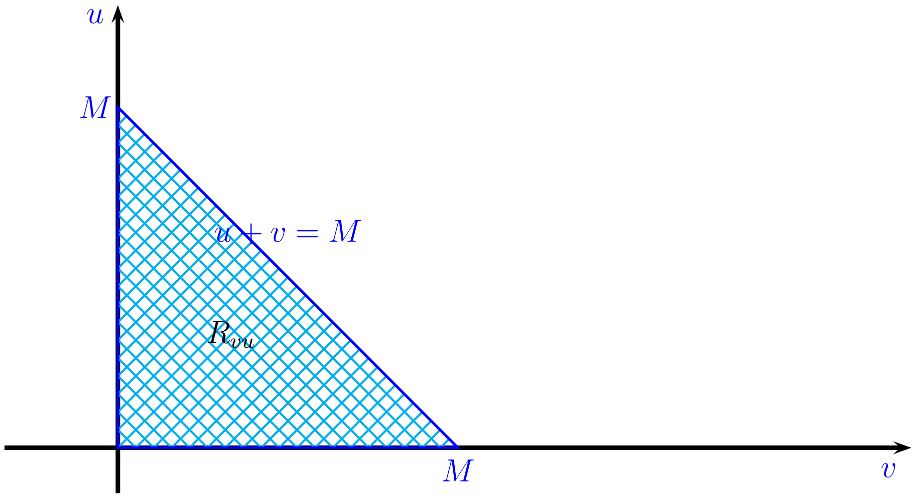
$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty} S_M \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_M &= \int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st}F(u)G(t-u)dudt. \end{aligned}$$

ed R_{tu} è la zona indicata in figura.





Consideriamo ora il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} v = t - u & \qquad t = t(v,u) = v + u \\ u = u & \qquad u = (v,u) = u. \end{cases}$$

Cosicchè la regione R_{tu} è trasformata nella regione R_{vu} in figura. Per un noto teorema sul cambiamento di variabile negli integrali doppi si ha:

$$\begin{aligned} S_M &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)dudt \\ &= \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)J(u,v)dudv. \end{aligned}$$

dove

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial v} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} & \dfrac{\partial u}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

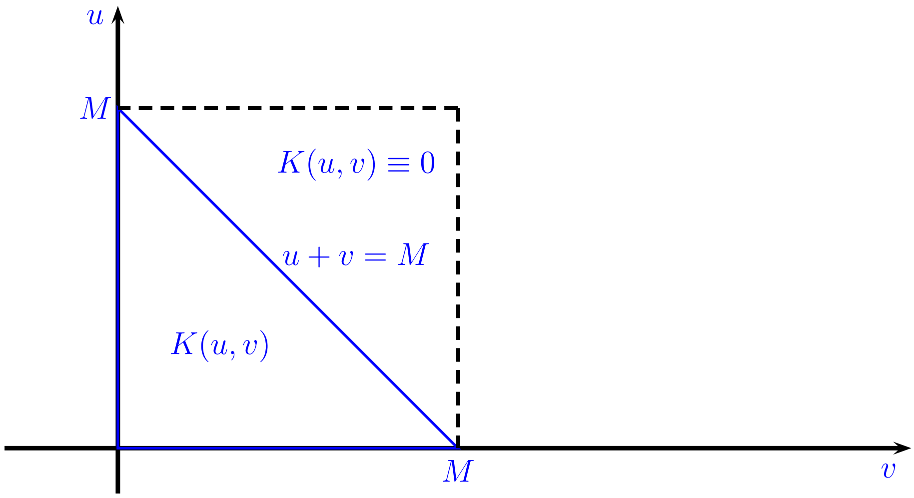
$$S_M = \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

Dunque

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

Definiamo ora la seguente funzione:

$$K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)}F(u)G(v) & u+v \leq M \\ \\ 0 & u+v > M,\ 0 \leq v \leq M. \end{cases}$$



In termini di questa funzione abbiamo

$$S_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty} S_M &= \lim_{M\to+\infty}\int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv \\
&= \lim_{M\to+\infty}\int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv \\
&= \lim_{M\to+\infty}\int_{u=0}^{M} e^{-su}F(u)du\int_{v=0}^{M} e^{-sv}G(v)dv \\
&= \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-su}F(u)du\right)\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-sv}G(v)dv\right) = f(s)g(s). \ \square
\end{aligned}$$

Si può dimostrare che il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa, commutativa e distributiva.

2.3 Scomposizione in Frazioni Parziali

Sia $f(s)$ una funzione razionale a coefficienti reali

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{2.5}$$

tale che il grado del polinomio al denominatore sia maggiore di quello al numeratore. Il problema della scomposizione in frazioni parziali (detta anche in fratti semplici) consiste nello scrivere $f(s)$ come combinazione lineare di funzioni razionali (dette appunto frazioni parziali) del tipo

$$\frac{1}{s-\alpha_j}, \ \frac{1}{(s-\alpha_j)^2}, \ \ldots, \frac{1}{(s-\alpha_j)^n}, \ \frac{As+B}{(s-\alpha)^{+}\beta^2}, \ \frac{C}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

determinando ovviamente i coefficienti della combinazione. Il motivo di tale necessità sta nel fatto che tali funzioni ammettono tutte un'antitrasformata calcolabile in modo immediato rispetto alla rappresentazione (2.5).

Definizione 2.3.1 *Sia $s = a$ un punto di discontinuità della funzione $f(s)$ (in generale funzione di variabile complessa). Se la funzione $f(s)$ può essere scritta come*

$$f(s) = \frac{\Phi(s)}{(s-a)^n}, \quad \Phi(a) \neq 0$$

dove $\Phi(s)$ è continua in una regione che contiene $s = a$ ed n è un intero positivo, allora $z = a$ viene detto polo di ordine n.

Vedremo che la scomposizione in frazioni parziali dipende dai poli di $f(s)$.
I Caso: La funzione $f(s)$ ammette n poli reali distinti.
Questo significa che il polinomio $Q(s)$ ha grado n ed ammette appunto n radici reali e distinti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$. In questo caso la funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$\boxed{f(s) = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n}. = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}} \tag{2.6}$$

Per calcolare i coefficienti $A_1, \ldots A_n$ ci sono diversi modi. Supponiamo sia

$$f(s) = \frac{3s^2+s-1}{s(s^2-1)}.$$

I poli della funzione sono $s = 0, s = \pm 1$, pertanto

$$\frac{3s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}.$$

Si riducono le frazioni al medesimo denominatore e quindi si uguagliano i coefficienti dei numeratori ottenendo un sistema di equazioni algebriche lineari che, risolto, permette di determinare i coefficienti. Quindi

$$\frac{A(s^2-1) + Bs(s+1) + Cs(s-1)}{s(s^2-1)} = \frac{(A+B+C)s^2 + (B-C)s - A}{s(s^2-1)}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si deve risolvere il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} A & +B & +C & = & 3 \\ & B & -C & = & 1 \\ -A & & & = & -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lrrcr} A & & & = & 1 \\ & B & +C & = & 2 \\ & B & -C & = & 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lcr} A & = & 1 \\ B & = & 3/2 \\ C & = & 1/2 \end{array} \right.$$

Appare chiaro che la tecnica appena descritta potrebbe portare alla necessità di risolvere un sistema lineare di dimensioni elevate (proporzionali al numero di poli della funzione razionale). Descriviamo ora un secondo metodo che evita tale eventualità e che viene detto metodo (o tecnica) dei residui.
Volendo calcolare il coefficiente A_k moltiplichiamo la relazione (2.6) per $s - \alpha_k$ ottenendo

$$f(s)(s - \alpha_k) = A_k + \sum_{j \neq k} A_j \frac{s - \alpha_k}{s - \alpha_j}.$$

Calcolando il limite per $s \to \alpha_k$ e considerando che tutti i poli α_j sono distinti si ottiene

$$A_k = \lim_{s \to \alpha_k} f(s)(s - \alpha_k).$$

Il valore A_k prende il nome di residuo della funzione $f(s)$ rispetto al polo α_j. Rappresenta il coefficiente dello sviluppo in frazioni parziali che moltiplica la funzione $(s - \alpha_k)^{-1}$, e solitamente si scrive:

$$A_k = R[f(s), \alpha_k].$$

Considerando l'esempio visto in precedenza

$$f(s) = \frac{3s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}.$$

dove

$$A = \lim_{s\to 0} sf(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s^2+s-1}{s^2-1} = 1$$

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)f(s) = \lim_{s\to 1} \frac{3s^2+s-1}{s(s+1)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \lim_{s\to -1}(s+1)f(s) = \lim_{s\to -1} \frac{3s^2+s-1}{s(s-1)} = \frac{1}{2}.$$

II Caso: La funzione $f(s)$ ammette un polo di ordine n.
Sia

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

ed assumiamo che $f(s)$ abbia un solo polo α di ordine n (ovvero $s = \alpha$ è radice del denominatore con molteplicità n). In questo caso $f(s)$ può essere scomposta nel seguente modo

$$\boxed{f(s) = \frac{A_1}{s-\alpha} + \frac{A_2}{(s-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-\alpha)^n}.} \tag{2.7}$$

In questo caso sappiamo solo che A_1 è il residuo del polo α rispetto alla funzione $f(s)$

$$A_1 = R[f(s), \alpha].$$

Moltiplicando per $(s-\alpha)$ si ottiene

$$(s-\alpha)f(s) = A_1 + \frac{A_2}{s-\alpha} + \cdots + \frac{A_n}{(s-\alpha)^{n-1}}$$

da cui segue

$$A_2 = R[(s-\alpha)f(s), \alpha]$$

e, in generale, la proprietà che

$$\boxed{A_k = R\left[(s-\alpha)^{k-1}f(s), \alpha\right],\ k = 1, \ldots, n} \tag{2.8}$$

che, però non fornisce un metodo pratico per calcolare tali costanti. Moltiplicando (2.7) per $(s-\alpha)^n$ si ottiene

$$(s-\alpha)^n f(s) = A_1(s-\alpha)^{n-1} + A_2(s-\alpha)^{n-2} + \cdots + (s-\alpha)A_{n-1} + A_n, \tag{2.9}$$

da cui, calcolando il limite

$$A_n = \lim_{s\to\alpha}(s-\alpha)^n f(s).$$

Derivando (2.9) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s-\alpha)^n f(s) &= A_1(n-1)(s-\alpha)^{n-2} + (n-2)A_2(s-\alpha)^{n-3} \\ &+ \cdots + A_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

da cui, calcolando il limite

$$A_{n-1} = \lim_{s\to\alpha}\frac{d}{ds}(s-\alpha)^n f(s).$$

Derivando la relazione (2.10) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}(s-\alpha)^n f(s) &= A_1(n-1)(n-2)(s-\alpha)^{n-3} + (n-2)(n-3)A_2(s-\alpha)^{n-4} \\ &+ \cdots + 2A_{n-2}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

da cui segue

$$A_{n-2} = \frac{1}{2}\lim_{s\to\alpha}\frac{d^2}{ds^2}(s-\alpha)^n f(s)$$

e via via fino a calcolare A_1:

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to\alpha}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s-\alpha)^n f(s). \tag{2.12}$$

La formula (2.12) fornisce quindi l'espressione generale del residuo di un polo di molteplicità n, quindi insieme alla relazione (2.8) consente di calcolare tutte le costanti A_k, $k = 1, \dots, n$.

Come esempio calcoliamo ora la scomposizione in frazioni parziali della funzione

$$f(s) = \frac{3s^3 - 2s^2 + s + 4}{(s-1)^4}.$$

Si ha

$$f(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{(s-1)^4}.$$

Quindi

$$A = R\left[f(s), 1\right] = \frac{1}{3!}\lim_{s\to 1}\frac{d^3}{ds^3}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) = 3,$$

$$B = R\left[(s-1)f(s), 1\right] = \frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) = 7,$$

$$C = R\left[(s-1)^2 f(s), 1\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) = 6,$$

$$D = R\left[(s-1)^3 f(s), 1\right] = \lim_{s\to 1}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) = 6.$$

In definitiva abbiamo

$$f(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{7}{(s-1)^2} + \frac{6}{(s-1)^3} + \frac{6}{(s-1)^4}.$$

III Caso: La funzione ammette due poli complessi coniugati.
Il caso dei poli semplici complessi coniugati rientra evidentemente nel caso più generale già visto per i poli semplici. Tuttavia una scomposizione ad hoc per questo caso può risultare molto utile. Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati. L'estensione poi al caso di più poli semplici complessi coniugati è abbastanza immediata.
Sia

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

con $Q(s)$ avente una coppia di zeri semplici in $z_0 = \alpha + \iota\beta$ e $\overline{z}_0 = \alpha - \iota\beta$. Inoltre assumiamo che $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi a coefficienti reali.
Allora $F(z)$ ammette la seguente scomposizione:

$$\boxed{F(s) = 2A\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - 2B\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}} \tag{2.13}$$

$$\boxed{A = \Re e\left(R[f(s), z_0]\right)} \tag{2.14}$$

e

$$\boxed{B = \Im m\left(R[f(s), s_0]\right)} \tag{2.15}$$

ovvero $A + \iota B = R[f(s), s_0]$.
Dalla decomposizione di f per poli semplici possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{R[f(s), z_0]}{s - z_0} + \frac{R[f(s), \overline{z}_0]}{s - \overline{z}_0} = \\ &= \frac{R[f(s), z_0]}{s - z_0} + \frac{\overline{R[f(s), z_0]}}{s - \overline{z}_0}. \end{aligned}$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$R[f(s), \overline{z}_0] = \overline{R[f(s), z_0]}.$$

Innanzitutto osserviamo che

$$Q(s) = (s - z_0)(s - \overline{z}_0),$$

Calcoliamo ora il residuo in z_0:

$$\begin{aligned} R[f(s), z_0] &= \lim_{s \to z_0} (s - z_0) f(s) \\ &= \lim_{s \to z_0} \frac{P(s)}{s - \overline{z}_0} = \frac{P(z_0)}{z_0 - \overline{z}_0} \\ &= \frac{P(z_0)}{2\iota \Im m(z_0)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\overline{R[f(s), z_0]} = \frac{\overline{P(z_0)}}{-2\iota \Im m(z_0)}.$$

Calcoliamo ora il residuo in $\overline{z}_0$:

$$\begin{aligned} R[f(s), \overline{z}_0] &= \lim_{s \to \overline{z}_0} (s - \overline{z}_0) f(s) \\ &= \lim_{s \to \overline{z}_0} \frac{P(s)}{s - z_0} = \frac{P(\overline{z}_0)}{\overline{z}_0 - z_0} \\ &= \frac{P(\overline{z}_0)}{-2\iota \Im m(z_0)}. \end{aligned}$$

Poichè $P(s)$ è un polinomio a coefficienti reali allora $P(\overline{z}_0) = \overline{P(z_0)}$ segue la tesi:

$$R[f(s), \overline{z}_0] = \overline{R[f(s), z_0]}.$$

Posto $A = \Re e[R[f(s), z_0]]$ e $B = \Im m[R[f(s), z_0]]$ abbiamo

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{A + \iota B}{(z-\alpha) - \iota\beta} + \frac{A - \iota B}{(z-\alpha) + \iota\beta} \\
&= \frac{(A + \iota B)[(z-\alpha) + \iota\beta] + (A - \iota B)[(z-\alpha) - \iota\beta]}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} \\
&= \frac{A(z-\alpha) + \iota B(z-\alpha) + \iota A\beta - B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} \\
&\quad + \frac{A(z-\alpha) - \iota B(z-\alpha) - \iota A\beta - B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} \\
&= \frac{2A(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}.
\end{aligned}$$

Esempio 2.3.1 *Scomporre in frazioni parziali con il metodo dei residui la funzione*

$$f(s) = \frac{10s - 22}{s^2 + 4s + 13}.$$

Il denominatore della funzione assegnata presenta due zeri complessi coniugati nei punti

$$s_1 = -2 + 3\iota, \qquad s_2 = -2 - 3\iota.$$

Calcoliamo ora il residuo nel polo s_1:

$$\begin{aligned}
R[f(s), s_1] &= \lim_{s \to s_1} (s - s_1) f(s) = \lim_{s \to -2+3\iota} \frac{10s - 22}{s + 2 + 3\iota} \\
&= \left[\frac{10s - 22}{s + 2 + 3\iota}\right]_{s=-2+3\iota} = \frac{-20 + 30\iota - 22}{6\iota} \\
&= \frac{-42 + 30\iota}{6\iota} = 5 + 7\iota.
\end{aligned}$$

Quindi in questo caso risulta:

$$\begin{aligned} f(s) &= 2A\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - 2B\frac{3}{(s+2)^2+9} \\ &= 10\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - 14\frac{3}{(s+2)^2+9}. \end{aligned}$$

Abbiamo visto i tre casi separatamente ma, come vedremo in seguito, quando una funzione presenta contemporaneamente poli di natura diversa allora la scomposizione in frazioni parziali è la somma dei contributi derivanti dalla scomposizione rispetto a ciascun polo. Per esempio la funzione

$$f(s) = \frac{5s+1}{s^2(s-1)(s^2+2s+2)}$$

ammette la seguente scomposizione

$$f(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{2D(s+1)}{(s+1)^2+1)} - \frac{2E}{(s+1)^2+1}.$$

con

$$\begin{aligned} A &= R[f(s), 1] \\ B &= R[f(s), 0] \\ C &= R[sf(s), 0] \\ D + \iota E &= R[f(s), -1+\iota]. \end{aligned}$$

2.4 Applicazioni delle trasformate di Laplace

Applicazione alle equazioni differenziali

Esempio 2.4.1 *Risolvere la seguente equazione differenziale applicando le trasformate di Laplace*

$$\begin{cases} Y''(t) + Y(t) = t \\ Y(0) = 1 \qquad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale.

$$L[Y''(t) + Y(t)] = L[t],$$

posto $y(s) = L[Y(t)]$ risulta

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+1)y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2 = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2}$$

e, in definitiva:

$$y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s^2+1)}.$$

La funzione ammette il polo doppio $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm\iota$, pertanto la scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{2Cs}{s^2+1} - \frac{2D}{s^2+1}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R[y(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2+1} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(3s^2 - 4s)(s^2+1) - 2s(s^3 - 2s^2 + 1)}{(s^2+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$B = R[sy(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2+1} = 1$$

$$C + \iota D = R[y(s), \iota] = \lim_{s\to\iota} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s+\iota)} = \frac{-\iota + 3}{-2\iota} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\iota$$

Quindi

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1},$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace si ricava

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right] = t + \cos t - 3\sin t.$$

Esempio 2.4.2 *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$Y'''(t) - 3Y''(t) + 3Y'(t) - Y(t) = t^2 e^t.$$

Poichè in questo caso le condizioni iniziali sono arbitrarie, poniamo

$$Y(0) = A, \qquad Y'(0) = B, \qquad Y''(0) = C$$

con A, B, C costanti arbitrarie. Passando alle trasformate di Laplace si ha:

$$L[Y^{(3)}(t)] - 3L[Y''(t)] + 3L[Y'(t)] - L[Y(t)] = L[t^2 e^t]$$

ovvero, detta $y(s)$ la trasformata di $Y(t)$:

$$(s^3 y(s) - As^2 - Bs - C) - 3(s^2 y(s) - As - B) +$$

$$+3(sy(s) - A) - y(s) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Isolando $y(s)$ segue

$$y(s) = \frac{As^2 + (B - 3A)s - 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$y(s) = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}.$$

Passando all'antitrasformata di Laplace si trova

$$Y(t) = \frac{c_1 t^2}{2}\, e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5}{60}\, e^t.$$

Esempio 2.4.3 *Risolvere la seguente equazione differenziale applicando le trasformate di Laplace*

$$Y''(t) - 2Y'(t) + Y(t) = \sinh t$$

con condizioni iniziali $Y(0) = 1$ *e* $Y'(0) = 2$.

Applicando la trasformata di Laplace

$$L[Y''(t)] - 2L[Y'(t)] + L[Y(t)] = L[\sinh t]$$

e ponendo $y(s) = L[Y(t)]$ segue

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2sy(s) + 2Y(0) + y(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$s^2y(s) - s - 2 - 2sy(s) + 2 + y(s) = \frac{1}{s^2-1}$$
$$(s^2 - 2s + 1)y(s) = s + \frac{1}{s^2-1} = \frac{s^3-s+1}{s^2-1}$$
$$y(s) = \frac{s^3-s+1}{(s-1)^3(s+1)}.$$

La funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}$$

dove

$$A = R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{s^3-s+1}{(s-1)^3} = -\frac{1}{8};$$

$$\begin{aligned}
B &= R[y(s), 1] = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1} \frac{d^2}{ds^2}\ \frac{s^3-s+1}{s+1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\ \frac{(3s^2-1)(s+1)-(s^3-s+1)}{(s+1)^2} = \frac{1}{2}\lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\ \frac{2s^3+3s^2-2}{(s+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\ \frac{(6s^2+6s)(s+1)^2-2(s+1)(2s^3+3s^2-2)}{(s+1)^4} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\ \frac{(6s^2+6s)(s+1)-2(2s^3+3s^2-2)}{(s+1)^3} = \frac{1}{2}\ \frac{24-6}{8} = \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\ \frac{s^3-s+1}{s+1} = \lim_{s\to 1} \frac{2s^3+3s^2-2}{(s+1)^2} = \frac{3}{4}.$$

$$D = R[(s-1)^2 y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{s^3-s+1}{s+1} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{9}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2(s-1)^3},$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace

$$Y(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{9}{8}e^{t} + \frac{3}{4}te^{t} + \frac{1}{4}t^2e^{t}.$$

Esempio 2.4.4 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y''(t) + \omega^2 Y(t) = F(t) \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$L[Y''(t)] + \omega^2 L[Y(t)] = L[F(t)]$$

$$(s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)) + \omega^2 y(s) = f(s)$$

ovvero

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s-2}{s^2+\omega^2} + \frac{f(s)}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{2}{s^2+\omega^2} + \frac{f(s)}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Applicando il teorema di convoluzione

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+\omega^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\right] \\ &= \cos\omega t - \frac{2\sin\omega t}{\omega} + F(t) * \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ &= \cos\omega t - \frac{2\sin\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t F(u)\sin\omega(t-u)du. \end{aligned}$$

Esempio 2.4.5 *Risolvere il seguente problema ai limiti:*

$$\begin{cases} Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y(\pi/2) = -1. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto, ma interviene nelle trasformate delle derivate, poniamo arbitrariamente $Y'(0) = k$. Allora

$$L[Y''(t)] + 9L[Y(t)] = L[\cos 2t]$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - k + 9y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$s^2y(s)+9y(s)=s+k+\frac{s}{s^2+4}=\frac{s^3+ks^2+5s+4k}{s^2+4}$$

$$y(s)=\frac{s^3+ks^2+5s+4k}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$y(s)=\frac{2As}{s^2+4}-\frac{4B}{s^2+4}+\frac{2Cs}{s^2+9}-\frac{6D}{s^2+9}$$

dove

$$\begin{aligned} A+\iota B &= R[y(s),2\iota]=\lim_{s\to 2\iota}\frac{s^3+ks^2+5s+4k}{(s+2\iota)(s^2+9)} \\ &= \frac{-8\iota-4k+10\iota+4k}{5(4\iota)}=\frac{1}{10} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C+\iota D &= R[y(s),3\iota]=\lim_{s\to 3\iota}\frac{s^3+ks^2+5s+k}{(s^2+4)(s+3\iota)} \\ &= \frac{-27\iota-9k+15\iota+4k}{(-5)(6\iota)}=\frac{-5k-12\iota}{-30\iota}=\frac{2}{5}-\frac{k}{6}\iota. \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace $y(s)$ risulta quindi

$$y(s)=\frac{1}{5}\ \frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{5}\ \frac{s}{s^2+9}+\frac{k}{s^2+9}.$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t)=\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{k}{3}\sin 3t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2)=-1$ segue $k=12/5$ e quindi la soluzione richiesta è:

$$Y(t)=\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{4}{5}\sin 3t.$$

Esempio 2.4.6 *Risolvere il seguente problema ai limiti:*

$$\begin{cases} Y''(t)-2Y'(t)+2Y(t)=\cos t \\ \\ Y(0)=0 \qquad Y(\pi/2)=0. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto poniamo arbitrariamente $Y'(0) = k$. Applichiamo la trasformata di Laplace al problema assegnato.

$$L[Y''(t)] - 2L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = L[\cos t]$$

$$s^2y(s) - sY(0) - k - 2sy(s) + 2Y(0) + 2y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2 - 2s + 2)y(s) = \frac{ks^2 + s + k}{s^2+1}$$

$$y(s) = \frac{ks^2 + s + k}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}.$$

La funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati $\pm\iota$ e $1\pm\iota$, quindi ha la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{2As}{s^2+1} - \frac{2B}{s^2+1} + \frac{2C(s-1)}{(s-1)^2+1} - \frac{2D}{(s-1)^2+1}$$

dove

$$\begin{aligned} A + \iota B &= R[y(s), \iota] = \lim_{s\to\iota} \frac{ks^2 + s + k}{(s+\iota)(s^2-2s+2)} \\ &= \frac{\iota}{(2\iota)(1-2\iota)} = \frac{1}{(1-2\iota)}\,\frac{1+2\iota}{1+2\iota} = \frac{1}{10}(1+2\iota) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C + \iota D &= R[y(s), 1+\iota] = \lim_{s\to 1+\iota} \frac{ks^2+s+k}{(s^2+1)(s-1+\iota)} \\ &= \frac{2\iota k + 1 + \iota + k}{(1+2\iota)(2\iota)} = \frac{2\iota k + 1 + \iota + k}{2(-2+\iota)}\,\frac{-2-\iota}{-2-\iota} \\ &= \frac{1}{10}(-4\iota k + 2k - 2 - \iota - 2\iota + 1 - 2k + \iota k) \\ &= \frac{1}{10}(-1 - 5\iota k - 3\iota) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{10}(5k+3)\iota. \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace $y(s)$ risulta

$$y(s) = \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\,\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{5k+3}{5}\,\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^t\cos t + \frac{5k+3}{5}\ e^t \sin t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2) = 0$ segue

$$Y(\pi/2) = -\frac{2}{5} + \frac{5k+3}{5}\ e^{\pi/2} = 0$$

da cui si ricava

$$k = \frac{2 - 3e^{\pi/2}}{5e^{\pi/2}}$$

quindi la soluzione è:

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^t\cos t + \frac{2}{5e^{\pi/2}}\ e^t \sin t.$$

Esempio 2.4.7 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}, \qquad Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 6.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 3L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = 4L[t] + 12L[e^{-t}],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$\begin{aligned} s^2y(s) - 6 - 3sy(s) + 2y(s) &= \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}, \\ y(s)(s^2 - 3s + 2) &= 6 + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} \\ &= \frac{6s^3 + 18s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s^2 - 3s + 2)} \\ &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ha un polo doppio e tre poli semplici quindi ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$\frac{y(s)}{2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

dove

$$\begin{aligned}
A \; &= R[y(s),0] = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^3-2s^2-s+2} = \frac{3}{2} \\
B &= R[sy(s),0] = \lim_{s\to 0} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = 1 \\
C &= R[y(s),-1] = \lim_{s\to -1} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s-1)(s-2)} = 1 \\
D &= R[y(s),1] = \lim_{s\to 1} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-2)} = -8 \\
E &= R[y(s),2] = \lim_{s\to 2} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-1)} = \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{16}{s-1} + \frac{11}{s-2}.$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$Y(t) = 1 + 2t + 2e^{-t} - 16e^t + 11e^{2t}.$$

Esempio 2.4.8 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t) - 4Y'(t) + 3Y(t) = F(t), \qquad Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = 0,$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace $f(s)$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 4L[Y'(t)] + 3L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2 y(s) - s - 4sy(s) + 4 + 3y(s) = f(s)$$

$$(s^2 - 4s + 3)y(s) = s - 4 + f(s)$$

quindi

$$y(s) = \frac{s-4}{s^2 - 4s + 3} + \frac{f(s)}{s^2 - 4s + 3}.$$

Osserviamo che possiamo trasformare in frazioni parziali il primo addendo a secondo membro, in quanto è indipendente da $F(t)$, per il secondo addendo possiamo scomporre in frazioni parziali la funzione che non dipende da $f(s)$ e per antitrasformare il risultato applichiamo il teorema di convoluzione. Quindi

$$y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} + f(s)\left[\frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-1}\right].$$

Calcoliamo i coefficienti A, B, C, e D:

$$A = \lim_{s \to 3}(s-3)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \to 1}(s-1)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \lim_{s \to 3}(s-3)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s \to 1}(s-1)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{1}{2(s-3)} + \frac{3}{2(s-1)} + f(s)\left[\frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s-1)}\right].$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza applicando il teorema di convoluzione

$$\begin{aligned} Y(t) &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + F(t) * e^{3t} + F(t) * e^t \\ &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + \int_0^t F(u) * e^{3(t-u)} du + \int_0^t F(u) e^{t-u} du. \end{aligned}$$

Esempio 2.4.9 *Utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale:*

$$Y''(t) + 4Y(t) = F(t), \qquad Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] + 4L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = L[F(t)]$$

$$s^2y(s) - 1 + 4y(s) = L[F(t)]$$

A questo punto si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione $F(t)$ applicando direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1-e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

L'equazione algebrica diventa

$$(s^2+4)y(s) = 1 + \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{s+1-e^{-s}}{s}.$$

da cui

$$y(s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

e scomponiamo in frazioni parziali $g(s)$, che ammette un polo semplice $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm 2\iota$:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2C\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

dove
$$A = R[g(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{4}$$
$\alpha = 0$, $\beta = 2$ e inoltre
$$B + \iota C = R[g(s), 2\iota] = \lim_{s\to 2\iota} \frac{1}{s(s+2\iota)} = -\frac{1}{8}.$$
In definitiva
$$g(s) = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}$$
e quindi
$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{4s} + \frac{se^{-s}}{4(s^2+4)}.$$
L'antitrasformata delle due funzioni dove compare il fattore e^{-s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:
$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4s}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$
e
$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4(s^2+4)}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$
La soluzione $Y(t)$ è quindi:
$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$
da cui semplificando ulteriormente:
$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti variabili

La trasformata di Laplace può essere utilizzata anche per risolvere alcune classi di equazioni differenziali a coefficienti variabili. In particolare essa è molto utile per risolvere equazioni differenziali i cui termini hanno la forma:

$$t^m Y^{(n)}(t).$$

Infatti in questo caso la trasformata di Laplace è data da

$$L\left[t^m Y^{(n)}(t)\right] = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} L[Y^{(n)}(t)].$$

Esempio 2.4.10 *Risolvere*

$$\begin{cases} tY''(t) + Y'(t) + 4tY(t) = 0 \\ \\ Y(0) = 3 \qquad Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene

$$L[tY''(t)] + L[Y'(t)] + 4L[tY(t)] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\big(s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)\big) + sy(s) - Y(0) - 4\frac{d}{ds}y(s) = 0$$

$$-2sy(s) - s^2\frac{dy}{ds} + Y(0) + sy(s) - Y(0) - 4\frac{dy}{ds} = 0$$

ovvero

$$(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{sds}{s^2+4}.$$

Integrando si ha

$$\log y + \frac{1}{2}\log(s^2+4) = C$$

cioè

$$y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+4}}.$$

Per determinare l'antitrasformata di $y(s)$, consultando la tabella delle trasformate si verifica che

$$Y(t) = CJ_0(2t).^1$$

[1] $J_0(t)$ è la funzione di Bessel di ordine zero definita da:

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

Imponendo la condizione $Y(0) = CJ_0(0) = 3$ segue $C = 3$; dunque

$$Y(t) = 3J_0(2t).$$

Esempio 2.4.11 *Risolvere il seguente problema ai limiti con coefficienti variabili*

$$\begin{cases} tY''(t) + 2Y'(t) + tY(t) = 0 \\ Y(0^+) = 1 \qquad Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ogni termine,

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2y(s) - sY(0^+) - Y'(0^+)\right) + 2(sy(s) - Y(0^+)) - \frac{d}{ds}y(s) = 0.$$

ovvero

$$-s^2y'(s) - 2sy(s) + 1 + 2sy(s) - 2 - y'(s) = 0$$

cioè

$$-(s^2+1)y'(s) - 1 = 0; \qquad y'(s) = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Integrando si ha

$$y(s) = -\arctan s + A.$$

Poichè per il teorema 2.1.8 $y(s) \to 0$ per $s \to +\infty$ deve essere $A = \pi/2$. Quindi

$$y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}.$$

Dalla tabella delle trasformate di Laplace risulta

$$Y(t) = L^{-1}\left[\arctan\frac{1}{s}\right] = \frac{\sin t}{t}.$$

Si noti che questa funzione soddisfa la condizione $Y(\pi) = 0$.

---

e risulta

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Esempio 2.4.12 *Risolvere*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 2X(t) - 3Y(t) \\ \\ \dfrac{dY}{dt} = Y(t) - 2X(t) \\ \\ X(0) = 8 \qquad Y(0) = 3. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ambo i membri abbiamo:

$$\begin{cases} L\left[\dfrac{dX}{dt}\right] = 2L[X(t)] - 3L[Y(t)] \\ \\ L\left[\dfrac{dY}{dt}\right] = L[Y(t)] - 2L[X(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - 8 &= 2x(s) - 3y(s) \\ \\ sy(s) - 3 &= y(s) - 2x(s) \end{cases}$$

dove $x(s)$ e $y(s)$ sono le trasformate di Laplace di $X(t)$ e $Y(t)$ rispettivamente. Equivalentemente

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 3y(s) = 8 \\ \\ 2x(s) + (s-1)y(s) = 3. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, per esempio con la regola di Cramer, si trova

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$x(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-4}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R[x(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{8s-17}{s-4} = 5 \\ B &= R[x(s), 4] = \lim_{s\to 4} \frac{8s-17}{s+1} = 3, \end{aligned}$$

quindi

$$x(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

e la prima componente della soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} X(t) &= L^{-1}[x(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right] \\ &= 5e^{-t} + 3e^{4t}. \end{aligned}$$

Per la funzione $y(s)$ risulta

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s-2) & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-4}$$

dove

$$\begin{aligned} C &= R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{3s-22}{s-4} = 5 \\ D &= R[y(s), 4] = \lim_{s\to 4} \frac{3s-22}{s+1} = -2, \end{aligned}$$

quindi

$$y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

quindi la seconda componente della soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}\right] \\ &= 5e^{-t} - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Esempio 2.4.13 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} X'(t) - Z(t) = e^{-t} \\ Y'(t) + Z'(t) = 1 \\ -X(t) + Y'(t) = 0 \\ X(0) = -2 \qquad Y(0) = Z(0) = 0. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema ponendo $x(s) = L[X(t)]$, $y(s) = L[Y(t)]$ e $z(s) = L[Z(t)]$:

$$\begin{cases} L[X'(t)] - L[Z(t)] = L[e^{-t}] \\ L[Y'(t)] + L[Z'(t)] = L[1] \\ -L[X(t)] + L[Y'(t)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) - z(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) = \dfrac{1}{s} \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) + 2 - z(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \dfrac{1}{s} \\ sy(s) - x(s) = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo $x(s)$ dalla terza equazione e sostituiamo la sua espressione nelle altre due:

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ s^2y(s) - z(s) = \dfrac{1}{s+1} - 2 = -\dfrac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ z(s) = s^2y(s) + \dfrac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + s^3y(s) + \dfrac{2s^2+s}{s+1} = \dfrac{1}{s}. \end{cases}$$

Ora consideriamo solo la terza equazione.

$$s(s^2+1)y(s) = -\frac{2s^2+s}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s(s+1)}$$

Da cui

$$y(s) = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s^2(s^2+1)(s+1)}$$

quindi i poli di $y(s)$ sono 0 (polo doppio), -1 e $\pm\iota$ pertanto ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2D(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2E\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

dove $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, mentre i coefficienti sono

$$A = R[y(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{1+s-s^2-2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 0$$

$$B = R[sy(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{1+s-s^2-2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 1$$

$$C = R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{1+s-s^2-2s^3}{s^2(s^2+1)} = -\frac{1}{2}$$

mentre

$$\begin{aligned} D + \iota E &= R[y(s), \iota] = \lim_{s\to\iota} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{s^2(s+\iota)(s+1)} \\ &= \frac{1 + \iota + 1 + 2\iota}{-2\iota(\iota+1)} \\ &= -\frac{3\iota + 2}{2(\iota - 1)} = \frac{1}{4}(-1 + 5\iota). \end{aligned}$$

Quindi $D = -1/4$ ed $E = 5/4$, cosicchè risulta

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{5}{2(s^2+1)}$$

la cui antitrasformata di Laplace è

$$Y(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t.$$

Per calcolare $X(t)$ potremmo ripetere un procedimento analogo (lo studente può farlo per esecizio verificando alla fine che il risultato è lo stesso) oppure ricavare $X(t)$ dalla terza equazione del sistema di partenza poichè

$$X(t) = Y'(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{5}{2}\cos t$$

e quindi calcolare $Z(t)$ dalla prima equazione

$$Z(t) = X'(t) - e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t.$$

Esempio 2.4.14 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} X'(t) + 2Y(t) = 2X(t) + e^t \\ Y'(t) - X(t) = -Y(t) - e^t \\ X(0) = -1 \qquad Y(0) = 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema:

$$\begin{cases} L[X'(t)] + 2L[Y(t)] = 2L[X(t)] + L[e^t] \\ \\ L[Y'(t)] - L[X(t)] = -L[Y(t)] - L[e^t]. \end{cases}$$

Poniamo, come al solito, $x(s) = L[X(t)]$ e $y(s) = L[Y(t)]$:

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) + 2y(s) = 2x(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = -y(s) - \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 2y(s) = -1 + \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{2-s}{s-1} \\ \\ -x(s) + (s+1)y(s) = 1 - \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{s-2}{s-1} \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema lineare usiamo la regola di Cramer. Calcoliamo prima il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s-2)(s+1) + 2 = s^2 - s = s(s-1)$$

quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2-s}{s-1} & 2 \\ \\ \dfrac{s-2}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{s(s-1)} \\ &= \frac{(s+1)(2-s) - 2(s-2)}{s(s-1)^2} = \frac{6-s-s^2}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = R[x(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{6-s-s^2}{(s-1)^2} = 6$$

$$\begin{aligned} B = R[x(s), 1] &= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{6-s-s^2}{s} \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{(-1-2s)s-(6-s-s^2)}{s^2} = -7 \end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)x(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{6-s-s^2}{s} = 4.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{7}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per $y(s)$:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s-2 & \dfrac{2-s}{s-1} \\ \\ -1 & \dfrac{s-2}{s-1} \end{vmatrix}}{s(s-1)} \\ &= \frac{(s-2)^2+(2-s)}{s(s-1)^2} = \frac{s^2-5s+6}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = R[y(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{s^2-5s+6}{(s-1)^2} = 6$$

$$\begin{aligned} B = R[y(s), 1] &= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{s^2-5s+6}{s} \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{(2s-5)s-(s^2-5s+6)}{s^2} = -5 \end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{s^2-5s+6}{s} = 2.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

e la soluzione del sistema di equazioni differenziali è

$$X(t) = 6 - 7e^t + 4te^t$$

$$Y(t) = 6 - 5e^t + 2te^t.$$

Applicazione alle equazioni integrali e integro-differenziali

Un'equazione integrale è un'equazione avente la forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du \tag{2.16}$$

dove $F(t)$ e $K(u,t)$ sono date, a e b sono costanti note o funzioni di t e la funzione $Y(t)$ che compare sotto segno di integrale deve invece essere determinata. La funzione $K(u,t)$ è detta anche nucleo dell'equazione integrale. Se a e b sono delle costanti, l'equazione è detta anche equazione integrale di Fredholm. Se a è una costante, mentre $b = t$, l'equazione è detta equazione integrale di Volterra.
È inoltre possibile trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione integrale.
Un'equazione integrale particolarmente importante è la seguente

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du.$$

Quest'equazione, di tipo convoluzione, può essere scritta nella forma

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t).$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, assumendo che esistano $L[F(t)] = f(s)$ e $L[K(t)] = k(s)$, si ha

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \qquad \text{o} \qquad \boxed{y(s) = \frac{f(s)}{1-k(s)}.}$$

La soluzione può essere trovata applicando l'antitrasformata di Laplace.
Se nell'equazione (2.16) si trova $Y'(t)$ oppure una derivata di ordine superiore allora l'equazione è detta integro-differenziale, la cui risoluzione tuttavia, avviene nello stesso modo.

Esempio 2.4.15 *Risolvere l'equazione integrale*

$$Y(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-u)Y(u)du.$$

L'equazione integrale può essere scritta nella forma

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t.$$

Applicando la trasformata di Laplace e il teorema di convoluzione, posto $y(s) = L[Y(t)]$, si ha

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{y(s)}{s^2+1}$$

$$y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2}{s^3}$$

risolvendo

$$y(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}\right] \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = t^2 + \frac{1}{12}t^4. \end{aligned}$$

Esempio 2.4.16 *Risolvere l'equazione integrale*

$$\int_0^t Y(t-u)Y(u)du = 16 \sin 4t \tag{2.17}$$

L'equazione può essere scritta nella forma

$$Y(t) * Y(t) = 16 \sin 4t.$$

Prendendo la trasformata di Laplace si ha, per $y(s) = L[Y(t)]$,

$$(y(s))^2 = \frac{64}{s^2+16}$$

oppure

$$y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}.$$

Allora

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \pm 8J_0(4t)$$

dove $J_0(t)$ è la funzione di Bessel di ordine zero che abbiamo già visto a pagina 59. Così

$$Y(t) = 8J_0(4t)$$

e

$$Y(t) = -8J_0(4t)$$

sono entrambe soluzioni dell'equazione integrale (2.17).

Esempio 2.4.17 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = \cosh 2t + \int_0^t (t-u)Y(u)du.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo, al solito, $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[\cosh 2t] + L\left[\int_0^t (t-u)Y(u)du\right]$$

Il secondo addendo a secondo membro è proprio il prodotto di convoluzione tra le funzioni $G(t) = t$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate delle funzioni t e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{s}{s^2-4} + \frac{y(s)}{s^2}$$

quindi

$$y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2-4}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2-4)}.$$

I poli di $y(s)$ sono ± 1 e ± 2 pertanto $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A = R[y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$B = R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$C = R[y(s), 2] = \lim_{s\to 2} \frac{s^3}{(s+2)(s^2-1)} = \frac{2}{3}.$$

Si può infine agevolmente verificare che $D = C$ quindi

$$y(s) = -\frac{1}{6(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} + \frac{2}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+2)}.$$

Quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

Esempio 2.4.18 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) = \int_0^t \cos(t-u)Y(u)du$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] = L\left[\int_0^t \cos(t-u)Y(u)du\right]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 = \frac{sy(s)}{s^2+1}$$

$$sy(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = 1$$

$$y(s) = \frac{s^2+1}{s^3}.$$

In questo caso la scomposizione in frazioni parziali è immediata

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

e anche la soluzione si trova semplicemente

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Esempio 2.4.19 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) + 2Y(t) + 2\int_0^t Y(t-u)du = \cos t$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] + 2L\left[\int_0^t Y(t-u)du\right] = L[\cos t]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 + 2y(s) + \frac{2}{s}y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{s^2+2s+2}{s}y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+1}$$

da cui si ricava $y(s)$

$$y(s) = \frac{s^3+s^2+s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}.$$

La funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati

$$s_{1/2} = \pm\iota, \qquad s_{3/4} = -1 \pm \iota$$

quindi la scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{2As}{s^2+1} - \frac{2B}{s^2+1} + \frac{2C(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{2D}{(s+1)^2+1}.$$

Calcoliamo i residui

$$
\begin{aligned}
A + \iota B &= R[y(s), \iota] = \lim_{s \to \iota} \frac{s^3 + s^2 + s}{(s + \iota)(s^2 + 2s + 2)} \\
&= \frac{-\iota - 1 + \iota}{2\iota(-1 + 2\iota + 2)} = \frac{-1}{2\iota(1 + 2\iota)} \\
&= \frac{1}{2\iota(2 - \iota)} \frac{2 + \iota}{2 + \iota} = \frac{1}{10}(2 + \iota).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C + \iota D &= R[y(s), -1 + \iota] = \lim_{s \to -1+\iota} \frac{s^3 + s^2 + s}{(s^2 + 1)(s + 1 + \iota)} \\
&= \frac{2\iota + 2 - 2\iota - 1 + \iota}{(1 - 2\iota)2\iota} = \frac{1 + \iota}{2(2 + \iota)} \frac{2 - \iota}{2 - \iota} \\
&= \frac{1}{10}(2 - \iota + 2\iota + 1) = \frac{3}{10} + \frac{\iota}{10}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
y(s) = \frac{2}{5} \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{5} \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{5} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} - \frac{1}{5} \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}.
$$

mentre la soluzione è

$$
Y(t) = \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \frac{3}{5} e^{-t} \cos t - \frac{1}{5} e^{-t} \sin t.
$$

Applicazioni ai circuiti elettrici

Un circuito elettrico, detto di tipo LRC, (vedere Figura 2.1) è formato dai seguenti elementi, collegati in serie con un interruttore:

1. un generatore che fornisce una forza elettromotrice f.e.m. E (misurata in *Volt*);
2. un resistore avente resistenza R (misurata in *Ohm*);
3. un induttore avente induttanza L (misurata in *Henry*);
4. un condensatore avente capacità C (misurata in *Farad*).

Quando si chiude il circuito, una carica Q (misurata in *Coulomb*) si trasferisce alle armature del condensatore. Il flusso di tale carica è definito da

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

ed è detto *corrente* (misurata in *Ampere* se il tempo è misurato in secondi). Un importante problema da risolvere in questi circuiti è determinare la carica del condensatore e la corrente in funzione del tempo. A tal fine si introduce la caduta di potenziale (o di tensione) attraverso gli elementi del circuito:

a) caduta di potenziale attraverso un resistore:

$$RI = R\frac{dQ}{dt};$$

b) caduta di potenziale attraverso un induttore:

$$L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2};$$

c) caduta di potenziale attraverso un condensatore:

$$\frac{Q}{C}$$

d) Caduta di potenziale attraverso un generatore:

$$-E.$$

Valgono le seguenti Leggi di Kirchhoff:

1. la somma algebrica delle correnti che fluiscono verso un nodo qualunque (per esempio A nella Figura 2.2) è sempre uguale a zero;

2. la somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un qualsiasi circuito chiuso (per esempio $ABDFGHA$ nella Figura 2.2) è sempre uguale a zero.

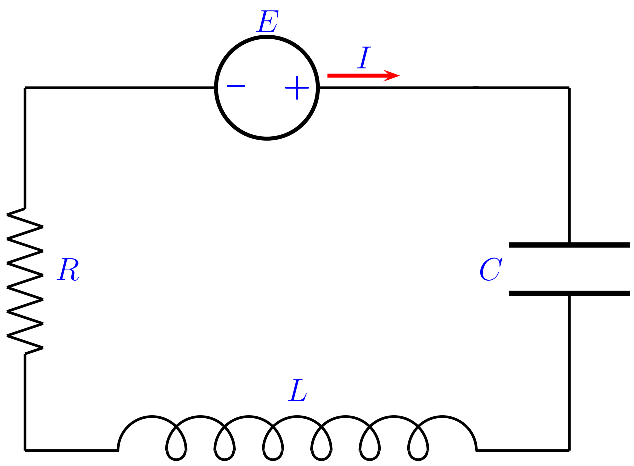


Figura 2.1: Esempio di circuito LRC.

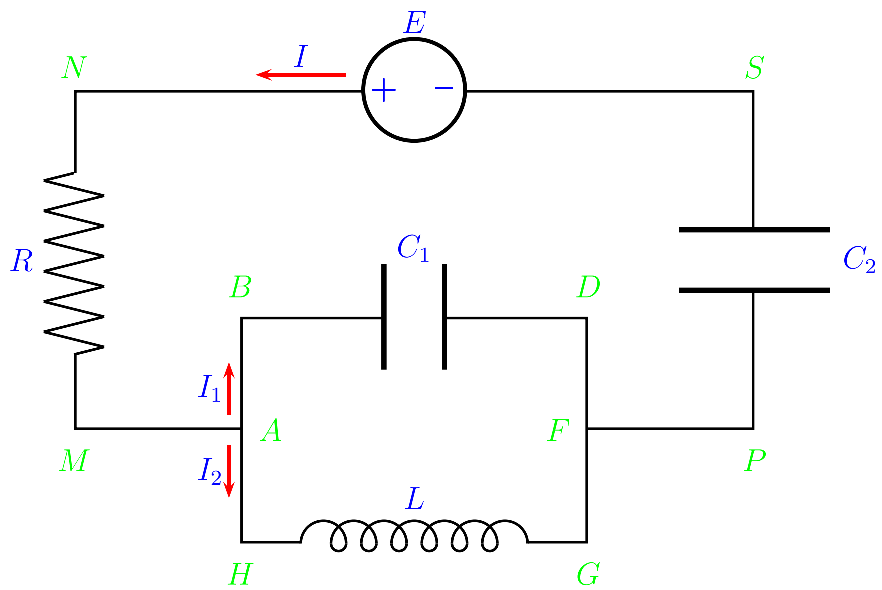


Figura 2.2:

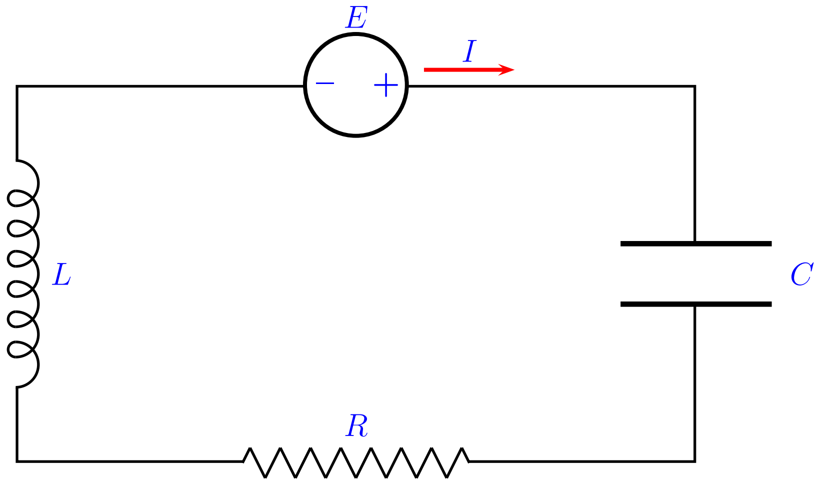


Figura 2.3: Circuito per l'Esempio 2.4.20.

Tenendo conto delle relazioni $a)$, $b)$, $c)$ e $d)$ e della seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito in Figura 2.1 risulta:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} - E = 0$$

ovvero

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E.$$

Esempio 2.4.20 *Un induttore L di 2 Henry, un resistore R di 16 Ohm ed un condensatore C di 0.02 Farad sono collegati in serie con una f.e.m. di E Volt, come mostrato in Figura 2.3. Per $t = 0$ la carica del condensatore e la corrente nel circuito sono nulle. Determinare la carica e la corrente in ogni istante $t > 0$ se*

$a)$ $E = 300$ *Volt;*

$b)$ $E(t) = 50 \sin 3t$ *Volt.*

Applicando la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere

$$2\frac{dI}{dt} + 16I(t) + \frac{Q(t)}{0.02} = E.$$

ovvero, tenendo conto che $I(t) = dQ/dt$:

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{0.02} = E. \tag{2.18}$$

Le condizioni iniziali sono:

$$Q(0) = 0 \qquad\qquad I(0) = Q'(0) = 0. \tag{2.19}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri di (2.18) segue:

$$2L\left[\frac{d^2Q}{dt^2}\right] + 16L\left[\frac{dQ}{dt}\right] + \frac{1}{0.02}L[Q(t)] = L[E]. \tag{2.20}$$

a) Posto $q(s) = L[Q(t)]$ l'equazione (2.20) si scrive

$$(s^2q(s) - sQ(0) - Q'(0)) + 8(sq(s) - Q(0)) + 25q(s) = \frac{150}{s}.$$

Isolando $q(s)$ e tendendo conto delle condizioni iniziali (2.19) si ha:

$$q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 8s + 25)}.$$

I poli della funzione sono $s = 0$ ed $s = -4 \pm 3\iota$ quindi la funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$q(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s+4)}{(s+4)^2 + 9} - \frac{6C}{(s+4)^2 + 9}$$

dove

$$A = R[q(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{150}{s^2 + 8s + 25} = 6$$

e

$$\begin{aligned} B + \iota C &= R[q(s), -4 + 3\iota] = \lim_{s\to -4+3\iota} \frac{150}{s(s + 4 + 3\iota)} \\ &= \frac{150}{(-4 + 3\iota)6\iota} = -\frac{25}{3 + 4\iota}\,\frac{3 - 4\iota}{3 - 4\iota} = -3 + 4\iota, \end{aligned}$$

quindi

$$q(s) = \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2 + 9} - \frac{24}{(s+4)^2 + 9}.$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace risulta

$$\begin{aligned} Q(t) &= 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t \\ I(t) &= Q'(t) = 50e^{-4t}\sin 3t; \end{aligned}$$

b) Se $E(t) = 50\sin 3t$ la (2.20) diventa

$$(s^2 + 8s + 25)q(s) = \frac{150}{s^2 + 9}$$

per cui

$$q(s) = \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)}$$

cosicchè la funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati $s = \pm 3\iota$ e $s = -4 \pm 3\iota$ pertanto lo sviluppo in frazioni parziali è il seguente

$$q(s) = \frac{2As}{s^2 + 9} - \frac{6B}{s^2 + 9} + \frac{2C(s + 4)}{(s + 4)^2 + 9} - \frac{6D}{(s + 4)^2 + 9}.$$

Calcoliamo le costanti

$$\begin{aligned} A + \iota B &= R[q(s), 3\iota] = \lim_{s\to 3\iota} \frac{150}{(s + 3\iota)(s^2 + 8s + 25)} \\ &= \frac{150}{6\iota(16 + 24\iota)}\frac{25}{8\iota(2 + 3\iota)} = \frac{25}{8\iota(-3 + 2\iota)}\ \frac{-3 - 2\iota}{-3 - 2\iota} \\ &= \frac{25}{104}(-3 - 2\iota); \\ C + \iota D &= R[q(s), -4 + 3\iota] = \lim_{s\to -4+3\iota} \frac{150}{(s^2 + 9)(s - 4 + 3\iota)} \\ &= \frac{150}{6\iota(16 - 24\iota)} \\ &= \frac{25}{8\iota(2 - 3\iota)} = \frac{25}{8\iota(3 - 2\iota)}\ \frac{3 + 2\iota}{3 + 2\iota} \\ &= \frac{25}{104}(-3 - 2\iota), \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} q(s) &= -\frac{75}{52}\,\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\,\frac{1}{s^2+9} + \frac{75}{52}\,\frac{s+4}{(s+4)^2+9} + \\ &\quad -\frac{75}{26}\,\frac{1}{(s+4)^2+9}. \end{aligned}$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\cos 3t - \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t \\ &= \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t - 2\sin 3t) \\ I(t) &= Q'(t) = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(\sin 3t + 18\cos 3t). \end{aligned}$$

Esempio 2.4.21 *Assegnata la rete in Figura 2.4 determinare la corrente nei vari rami assumendo nulle le correnti iniziali e considerando che:*

$$R_1 = 20\Omega, \qquad R_2 = 10\Omega, \qquad R_3 = 30\Omega$$

e inoltre

$$E = 110V, \qquad L_1 = 4H, \qquad L_2 = 2H.$$

Percorriamo i circuiti chiusi $KLMNK$ e $NPJKN$ in senso orario. Percorrendo questi circuiti consideriamo le cadute di tensione positive quando si va contro corrente. Un aumento di tensione è considerato come una caduta di tensione negativa. Se I è la corrente nel circuito $NPJKN$ questa si divide, nel nodo K, in I_1 e I_2 in modo tale che $I = I_1 + I_2$ (prima legge di Kirchhoff). Applichiamo ora la seconda legge di Kirchhoff ai circuiti $KLMNK$ e $NPJKN$, ottenendo rispettivamente:

$$\begin{cases} -10I_1(t) - 2\dfrac{dI_1}{dt} + 4\dfrac{dI_2}{dt} + 20I_2(t) = 0 \\ \\ 30I(t) - 110 + 2\dfrac{dI_1}{dt} + 10I_1(t) = 0 \end{cases}$$

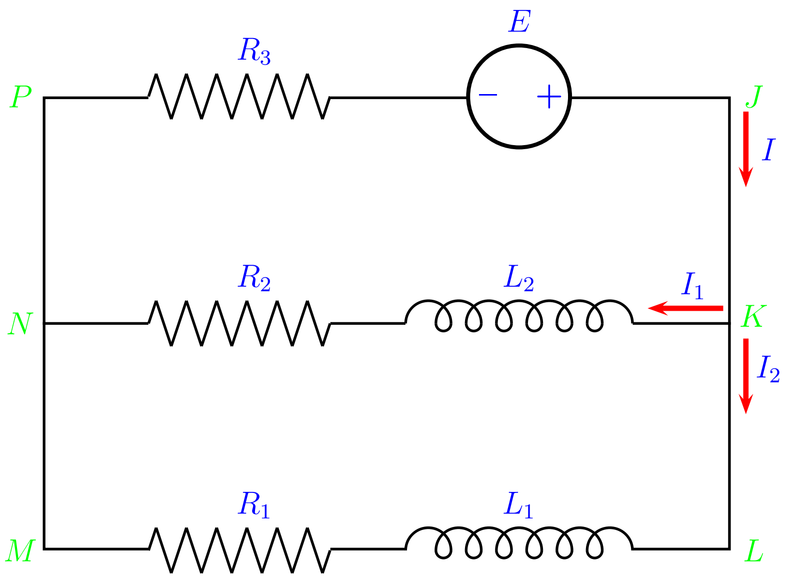


Figura 2.4: Circuito per l'Esempio 2.4.21.

ovvero

$$\begin{cases} -5I_1(t) - \dfrac{dI_1}{dt} + 2\dfrac{dI_2}{dt} + 10I_2(t) = 0 \\ \\ \dfrac{dI_1}{dt} + 20I_1(t) + 15I_2(t) = 55 \end{cases}$$

con condizioni iniziali $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Passando alle trasformate di Laplace segue:

$$\begin{cases} -5i_1(s) - (si_1(s) - i_1(s)(0)) + 2(si_2(s) - I_2(0)) + 10i_2(s) = 0 \\ \\ (si_1(s) - I_1(0)) + 20i_1(s) + 15i_2(s) = \dfrac{55}{s} \end{cases}$$

e, sostituendo le condizioni iniziali,

$$\begin{cases} (s+5)i_1(s) - (2s+10)i_2(s) = 0 \\ \\ (s+20)i_1(s) + 15i_2(s) = \dfrac{55}{s} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} i_1(s) = 2i_2(s) \\ \\ i_2(s) = \dfrac{55}{s(2s+55)}. \end{cases}$$

La funzione $i_2(s)$ ammette come scomposizione in frazioni parziali

$$i_2(s) = \frac{A}{s} + \frac{C}{s - 55/2}$$

dove

$$A = R[i_2(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{55}{2s+55} = 1$$

$$B = R[i_2(s), -55/2] = \lim_{s \to -55/2} \frac{55}{2s} = -1$$

quindi

$$i_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 55/2}$$

che ammette come antitrasformata di Laplace

$$\begin{aligned} I_2(t) &= 1 - e^{-55t/2} \\ I_1(t) &= 2 - 2e^{-55t/2} \\ I(t) &= I_1(t) + I_2(t) = 3 - 3e^{-55t/2}. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Trasformate di Fourier

3.1 Introduzione

La motivazione principale nell'introduzione delle trasformate di Fourier sta nel tentativo di utilizzare uno strumento che consentisse di calcolare, in forma chiusa, le soluzioni di alcune classiche equazioni alle derivate parziali (storicamente dell'equazione del calore). Infatti, a differenza di quello che accade per le equazioni differenziali ordinarie le tecniche analitiche per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali risultano essere scarsamente generalizzabili, ovvero ogni tipo di equazione richiede un particolare metodo. Alla base delle trasformate di Fourier c'è la teoria delle serie di Fourier, una tecnica analitica di rappresentazione delle funzioni di variabile reale alternativa alle serie di Taylor, sicuramente più semplici ma di utilità reale non molto elevata. Lo sviluppo in serie di Fourier, che solo apparentemente sembra applicabile ad una classe molto ristretta di funzioni (quelle periodiche), consente di rappresentare, appunto attraverso opportune trasformazioni, le soluzioni di tali equazioni alle derivate parziali, definite su intervalli limitati. La generalizzazione delle serie consente, attraverso il Teorema Integrale di Fourier, di rappresentare in forma integrale le soluzioni di equazioni alle derivate parziali definite su domini illimitati.

3.2 Serie di Fourier

È ben noto che una buon numero di funzioni sia rappresentabile, in maniera più o meno complicata, in serie di potenze. Comunque questo non è il solo modo per sviluppare in serie funzioni di variabile reale. Un modo alternativo è l'espressione di una funzione come somma di seni e coseni. Tali serie prendono il nome di serie di Fourier. Un punto di forza di tali sviluppi in serie è che esistono anche se le funzioni presentano punti di discontinuità e non sono differenziabili in qualche punto del dominio. Inoltre le funzioni trigonometriche sono facilmente differenziabili ed integrabili. Può meravigliare il fatto che una qualsiasi funzione possa essere sviluppata, in un determinato intervallo, come somma di funzioni pari e dispari, tuttavia consideriamo che se $F(x)$ può essere scritta nel seguente modo:

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x) + F(x) - F(-x)]$$

Posto

$$P(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]; \qquad D(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

risulta $F(x) = P(x) + D(x)$ con $P(x)$ funzione pari e $D(x)$ funzione dispari. Per iniziare lo studio delle serie di Fourier introduciamo le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni di variabile reale per poter essere sviluppabili in serie. Tali condizioni sono dette condizioni di Dirichlet e sono sufficienti per la convergenza della serie di Fourier:

1. $F(x)$ è definita per ogni $x \in]c, c + 2l[$;
2. $F(x)$ e $F'(x)$ sono generalmente continue per $x \in]c, c + 2l[$;
3. $F(x + 2l) = F(x)$, cioè $F(x)$ è periodica di periodo $2l$.

Allora in ogni punto di continuità di F si ha

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{3.1}$$

mentre in ogni punto di discontinuità si ha

$$\frac{1}{2} \left(F(x + 0) + F(x - 0) \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{3.2}$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{c}^{c+2l} F(x) dx, \tag{3.3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

e

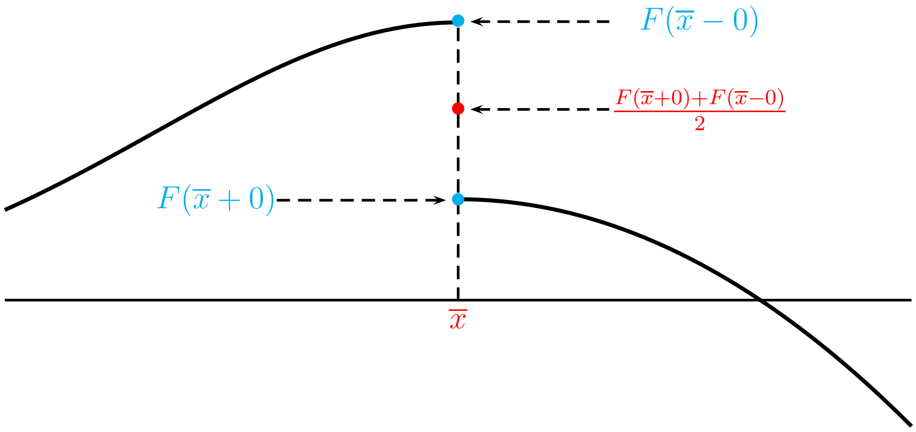
$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

e $F(x+0)$ e $F(x-0)$ indicano rispettivamente i limiti destro e sinistro nella discontinuità. Infatti il limite di $F(x)$ da destra si indica spesso con

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x+0).$$

Analogamente il limite di $F(x)$ da sinistra si indica con

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x-\varepsilon) = F(x-0).$$



La serie (3.1), o (3.2), con i coefficienti definiti da (3.3), (3.4) e (3.5), si chiama serie di Fourier di $F(x)$. In molti casi risulta $c = 0$ oppure $c = -l$. La serie di Fourier converge ad $F(x)$ in ogni punto di continuità della funzione, mentre nei punti di discontinuità la serie converge al valor medio del salto. Nelle pagine seguenti considereremo sempre il caso $c = -l$.
Prima di dimostrare quanto appena affermato consideriamo ora alcuni risultati preliminari che risulteranno molto utili nell'applicazione delle serie e delle trasformate di Fourier.

Lemma 3.2.1 *Se $k \in \mathbb{N}^*$ allora*

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}dx = 0.$$

Dimostrazione. Per $k \in \mathbb{N}^*$ abbiamo

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{l}{k\pi} \int_{-l}^{l} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{k\pi x}{l} \right) dx = -\frac{l}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^{l} = 0$$

e

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^{l} \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^{l} = 0. \ \square$$

Lemma 3.2.2 *Risulta, per $m, n \in \mathbb{N}^*$:*

a)

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \\ l & m = n \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Dimostrazione. a) Richiamiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \tag{3.6}$$

e

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \tag{3.7}$$

Sommando e sottraendo (3.6) a (3.7) seguono rispettivamente

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right] \\ \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Per $m \neq n$ la a) può essere riscritta

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^{l} \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \int_{-l}^{l} \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0$$

per il lemma 3.2.1. Analogamente, sempre per $m \neq n$:

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^{l} \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \int_{-l}^{l} \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0.$$

Se $m = n$ allora ricordiamo innanzitutto che

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

quindi

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left[1 + \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

e analogamente

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left[1 - \sin \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l.$$

b) Dalle relazioni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \tag{3.8}$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \tag{3.9}$$

segue

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \right].$$

Allora per $m \neq n$

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \left[\sin \frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \right] dx$$

e il risultato è una conseguenza del lemma 3.2.1. Se invece $m = n$

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \sin \frac{2m\pi x}{l} = 0. \ \square$$

Teorema 3.2.1 *Se la serie*

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

converge uniformemente a $F(x)$ *nell'intervallo* $(-l, l)$ *allora, per* $n = 1, 2, \dots$

$\alpha)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$\beta)$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$\gamma)$

$$A = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) dx.$$

Dimostrazione. $\alpha)$ Per ipotesi

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \tag{3.10}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\cos \frac{m\pi x}{l}$ e integrando tra $-l$ ed l si ha:

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx = \int_{-l}^{l} \left[A + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \tag{3.11}$$

Tenuto conto che, per il lemma 3.2.2,

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \qquad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

la relazione (3.11) diventa

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} F(x)dx = A \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx \right\}$$

$$= a_m l \qquad m \neq 0.$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos\frac{m\pi x}{l} dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

β) Moltiplicando la relazione (3.11) per $\sin\frac{m\pi x}{l}$, integrando tra $-l$ e l ed applicando le relazioni già viste abbiamo:

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} F(x)dx = A \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx \right\}$$

$$= b_m l \qquad m \neq 0.$$

Quindi

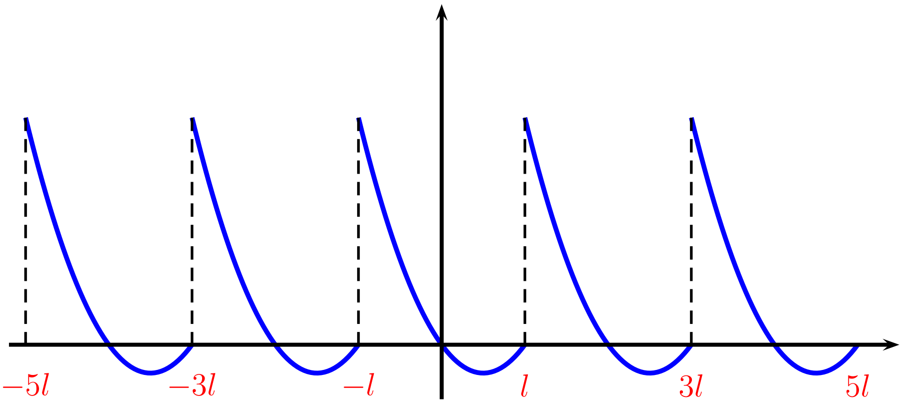
$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \sin\frac{m\pi x}{l} dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

γ) Integriamo ora la relazione (3.10) tra $-l$ ed l, e tenendo conto del lemma 3.2.1 otteniamo

$$\int_{-l}^{l} F(x)dx = 2Al \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x)dx = \frac{a_0}{2}. \ \square$$

Osservazione. I risultati ora ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione sono sostituiti da c e $c + 2l$. Osserviamo anche esplicitamente che l'ipotesi di convergenza uniforme è intervenuta nell'integrazione termine a termine della serie.

L'ipotesi di periodicità della funzione sembrerebbe essere particolarmente restrittiva, in realtà non è così poichè se una funzione $f(x)$ è definita e continua (o anche generalmente continua) nell'intervallo $[-l, l]$ allora la funzione può essere prolungata periodicamente, riproducendola tale e quale, in tutti gli intervalli di ampiezza $2l$ che si trovano a destra e a sinistra dell'intervallo di definizione.



3.2.1 Forma complessa della serie di Fourier

In forma complessa la serie di Fourier (3.1) e i suoi coefficienti possono essere scritti così:

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\imath n \frac{\pi x}{l}}}$$

dove, ponendo $c = -l$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) e^{-\imath n \frac{\pi x}{l}} dx.}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{-n} e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (c_{-n} + c_n) \cos \frac{n\pi x}{l} + \iota (c_n - c_{-n}) \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}.
\end{aligned}$$

Risulta evidentemente $c_0 = a_0/2$, mentre

$$\begin{aligned}
c_{-n} + c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) \left[e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} + e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iota (c_n - c_{-n}) &= \frac{\iota}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) \left[e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} - e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] dx \\
&= \frac{\iota}{2l} \int_{-l}^{l} F(x)(-2\iota) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, .
\end{aligned}$$

3.3 Trasformate finite di Fourier

Abbiamo visto che, se $F(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $]-l, l[$, allora in ogni punto di continuità di $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota \frac{n\pi x}{l}} \tag{3.12}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)e^{-\iota\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Posto

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} F(x)e^{-\iota\frac{n\pi x}{l}}dx} \tag{3.13}$$

allora $F(x)$ si scrive

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{\iota\frac{n\pi x}{l}}.} \tag{3.14}$$

La (3.13) prende il nome di Trasformata finita di Fourier e spesso viene indicata con $f(n) = \mathcal{F}\{F(x)\}$, mentre $F(x)$ si chiama Antitrasformata finita di Fourier.
Se x non è punto di continuità allora nella (3.12) $F(x)$ va sostituito con $(F(x+0) + F(x-0))/2$.

3.3.1 Trasformate finite seno e coseno di Fourier

Riconsideriamo ora lo sviluppo di Fourier di $F(x)$, $-l < x < l$, nella formulazione (3.1) con i coefficienti dati in α), β) e γ) ovvero

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la funzione $F(x)$ sia dispari. In questo caso $F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$ mentre $F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ è una funzione pari per ogni $n \in \mathbb{N}$. Conseguentemente

$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mentre

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{3.15}$$

Pertanto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

con b_n definiti da (3.15).
Definiamo ora

$$\boxed{f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots} \tag{3.16}$$

allora

$$b_n = \frac{2}{l}f_s(n)$$

e perciò si scrive

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l}.} \tag{3.17}$$

La (3.16) prende il nome di Trasformata finita seno di Fourier di $F(x)$ per $0 < x < l$ e viene indicata nel seguente modo

$$f_s(n) = \mathcal{F}_s\{F(x)\}$$

mentre la (3.17) si chiama Antitrasformata finita seno di Fourier di $f_s(n)$ e si scrive

$$F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}.$$

Assumiamo ora che $F(x)$ sia pari. In questo caso la funzione $F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari in $]-l,l[$ mentre la funzione $F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ è pari in $]-l,l[$, e pertanto $b_n = 0$ per ogni n. Conseguentemente

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

con

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)dx$$

ovvero

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{l}\int_0^l F(x)dx$$

e

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Posto

$$\boxed{f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots} \tag{3.18}$$

risulta

$$a_0 = \frac{1}{l}f_c(0), \qquad a_n = \frac{2}{l}f_c(n)$$

e di conseguenza

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l}.} \tag{3.19}$$

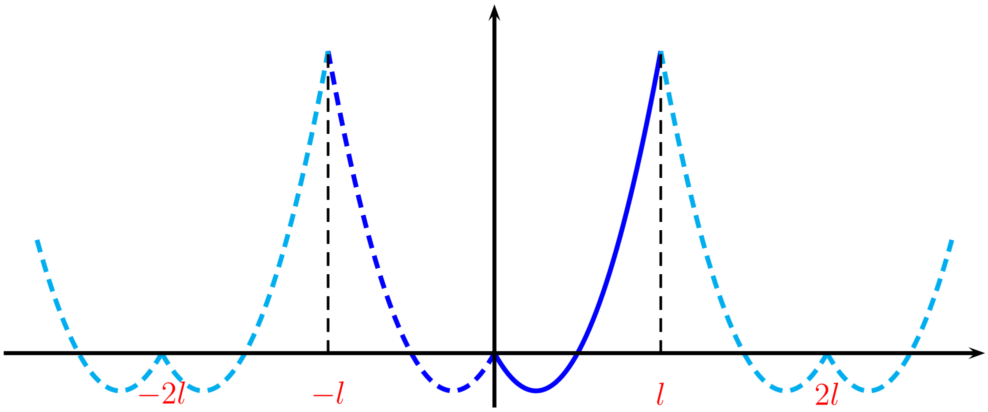
La (3.18) prende il nome di Trasformata finita coseno di Fourier di $F(x)$ per $0 < x < l$ e viene indicata nel seguente modo

$$f_c(n) = \mathcal{F}_c\{F(x)\}$$

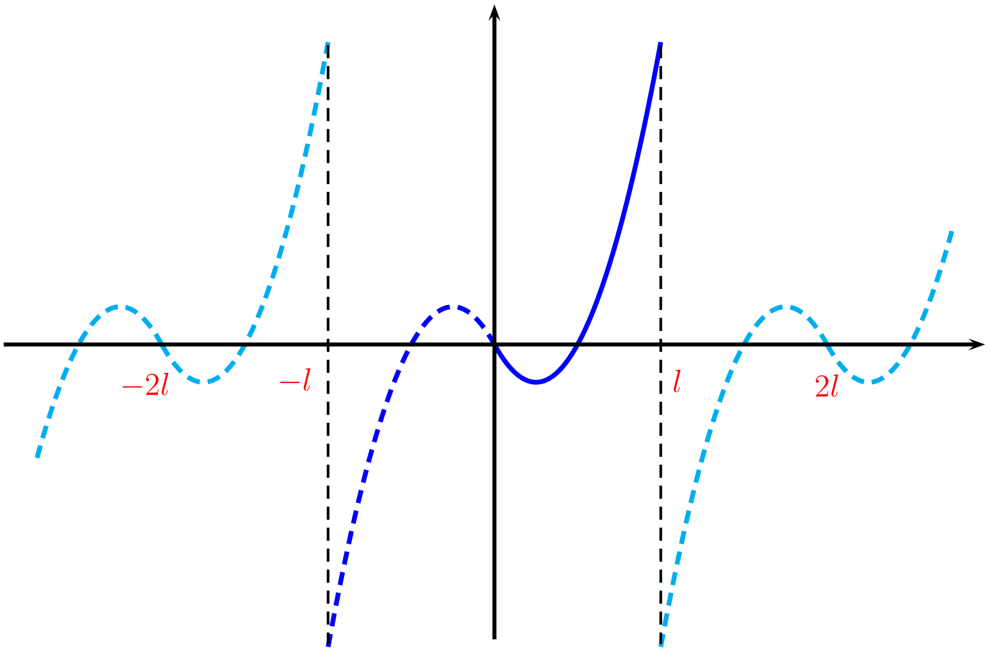
mentre $F(x)$ si dice Antitrasformata finita coseno di Fourier di $f_c(n)$ e si scrive

$$F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}.$$

Anche in questo caso sembrerebbe che l'ipotesi di funzione pari (o dispari) sia eccessivamente restrittiva. In realtà se una funzione è definita ed è continua nell'intervallo $[0, l]$, possiamo calcolare la trasformata coseno del suo prolungamento periodico pari, che si ottiene prima prolungando la funzione nell'intervallo $[-l, 0]$ in modo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e poi prolungando per periodicità come già visto in precedenza. Nel seguente grafico ne è riportato un esempio.



Per calcolare invece la trasformata seno si definisce il prolungamento periodico dispari della funzione, che si ottiene prima prolungando la funzione nell'intervallo $[-l, 0]$ in modo simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano e poi prolungando per periodicità come già visto in precedenza. Nel seguente grafico ne è riportato un esempio.

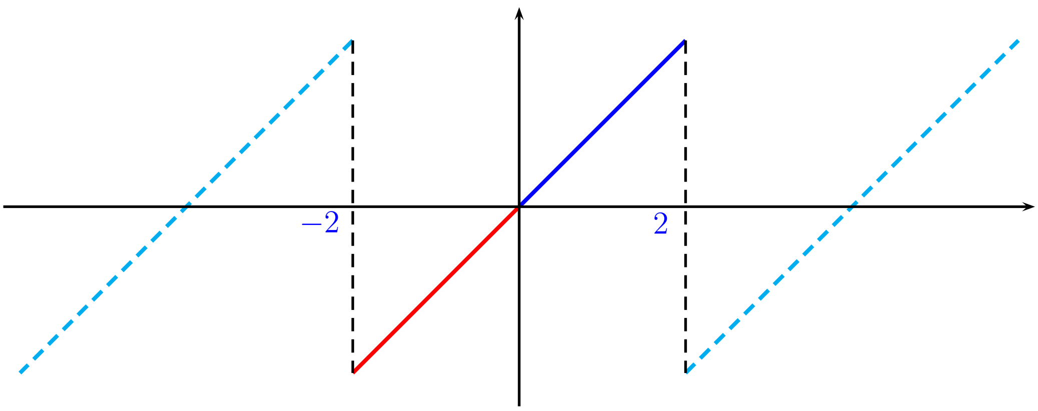


Esempio 3.3.1 *Sviluppare la funzione $F(x) = x$, per $0 < x < 2$:*

a) in serie di Fourier di soli seni;

b) in serie di Fourier di soli coseni.

a) Per sviluppare $F(x)$ in serie di soli seni è necessario che $F(x)$ sia periodica e dispari. Estendiamo quindi la definizione di $F(x)$ a quella di funzione dispari di periodo 4 (e quindi $l = 2$, vedere figura seguente).



Possiamo ora scrivere per $F(x)$ lo sviluppo

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

ovvero

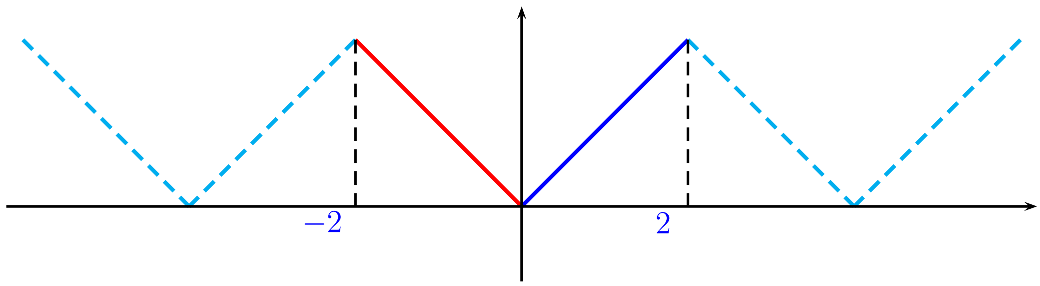
$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{n\pi x}{2} \right) dx \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left[\left[x \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \right) = -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi}
\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4 \cos n\pi}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} \\
&= -4 \left[-\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.
\end{aligned}$$

La serie converge ad $F(x)$ in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ ad eccezione di $x = 2 \pm 4n$, $n \in \mathbb{N}$, in cui la serie converge a zero mentre la funzione tende ad assumere i valori ± 2.

b) Per sviluppare $F(x)$ in serie di soli coseni è necessario che $F(x)$ sia periodica e pari. Estendiamo quindi la sua definizione a quella di funzione pari di periodo 4 (quindi $l = 2$).



Allora

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{2l} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1$$

e

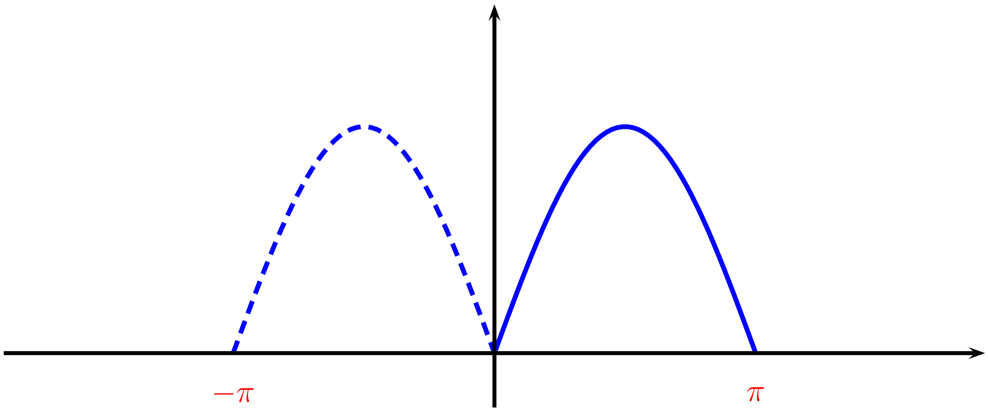
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \left[x \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \left[- \left(\frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 3.3.2 *Sviluppare la funzione $F(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, in serie coseno di Fourier.*

Poichè per ottenere uno sviluppo in serie di soli coseni $F(x)$ deve essere periodica pari effettuiamo un'estensione pari di $F(x)$ di periodo 2π (vedere figura seguente).



Risulta allora

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con $l = \pi$. Quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \; dx = \frac{2}{\pi}$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \; dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x + nx) + \sin(x - nx))\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\ &= -\frac{2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Se n=1 allora

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \left[\frac{2}{\pi} \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = 0.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Esempio 3.3.3 *Determinare la serie di Fourier per la funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 3 \\ \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

di periodo 6*.*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6} \int_{-3}^{3} F(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\int_{-3}^{0} F(x) dx + \int_0^3 F(x) dx \right] = \frac{1}{3} \int_0^3 x \ dx = \frac{3}{2} \\ a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} F(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{n\pi x}{3} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{n\pi x}{3} \right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\left[x \sin \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\ &= \frac{6}{(n\pi)^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 = \frac{6}{(n\pi)^2} [\cos n\pi - 1]. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\left[\int_0^3 2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left[\int_0^3 2x\frac{3}{n\pi}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right] \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left[\left[x\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 - \int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right] \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left[3\cos n\pi - \frac{3}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\right] \\
&= \frac{-6}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}
$$

Quindi in definitiva

$$
F(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{3} - \frac{6}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{3}\right].
$$

Esempio 3.3.4 *Determinare*

a) la trasformata finita seno di Fourier

b) la trasformata finita coseno di Fourier

della funzione $F(x) = 2x$, $0 < x < 4$.

a)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{F(x)\} &= f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\
&= \int_0^4 2x\sin\frac{n\pi x}{4}dx \\
&= \left[2x\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - 2\left(\frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right]_0^4 \\
&= -\frac{32}{n\pi}\cos n\pi;
\end{aligned}
$$

b) se $n > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\{F(x)\} &= f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \int_0^4 2x\cos\frac{n\pi x}{4}dx \\ &= \left[2x\left(\frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - 2\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right]_0^4 \\ &= 32\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}.\end{aligned}$$

Se $n = 0$

$$f_c(0) = \int_0^4 2xdx = 16.$$

Risoluzione di equazioni alle derivate parziali

Le trasformate seno e coseno di Fourier possono essere applicate anche a funzioni in due variabili $U(x,t)$. in questo caso la trasformata di $U(x,t)$ è una funzione che dipende dalla variabile t e dal parametro n, numero naturale, cosicchè scriveremo

$$u_c(n,t) = \mathcal{F}_c\{U(x,t)\},$$

oppure

$$u_s(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}.$$

Infatti una delle principali applicazioni delle trasformate di Fourier è la risoluzione di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Vediamo ora come determinare le trasformate seno e coseno di Fourier per tali derivate. Calcoliamo la trasformata finita seno di Fourier di $\dfrac{\partial U}{\partial x}$.

Per definizione la trasformata finita seno è

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \left[U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\};} \tag{3.20}$$

Invece per la trasformata finita coseno di Fourier di $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, dove $U(x,t)$ è una funzione definita per $0 < x < l$ e $t > 0$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \left[U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l + \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\{U(x,t)) + U(l,t)\cos n\pi - U(0,t).} \tag{3.21}$$

Calcoliamo ora le trasformate della derivata parziale $\dfrac{\partial U}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_c\{U(x,t)).$$

Da questi esempi si può inoltre ricavare che

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_c\{U(x,t))$$

e

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_s\{U(x,t)).$$

Determiniamo le trasformate finite seno e coseno della funzione $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.
Sostituendo $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ ad $U(x,t)$ in (3.20) si ha

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$$

e, sostituendo l'espressione (3.21), si ottiene infine

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\} + \frac{n\pi}{l}\left[U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\right].} \tag{3.23}$$

Per la trasformata coseno si procede in modo analogo

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \left[U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\right]$$

ottenendo

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\} - \left[U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\right].} \tag{3.24}$$

Nel successivo esempio applicheremo le trasformate di Fourier ad un'equazione alle derivate parziali. Osserviamo che la scelta sull'uso della trasformata

seno o coseno dipende esclusivamente dalle condizioni al contorno note. Infatti se conosciamo la funzione $U(x,t)$ ai bordi del dominio, cioè per $x=0$ e $x=l$, allora si deve applicare necessariamente la trasformata seno che dipende da tali valori. Se, al contrario, si conosce il valore della derivata parziale $U_x(x,t)$ per $x=0$ e $x=l$ allora si deve utilizzare la trasformata coseno.
Poichè le trasformate seno e coseno sono applicate alternativamente nella risoluzione degli esercizi, per semplicità, si ometterà l'indicazione del pedice relativo al tipo di trasformata utilizzata.

Esempio 3.3.5 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno $U(0,t) = U(4,t) = 0$ *e* $U(x,0) = 2x$, *per* $0 < x < 4$ *e* $t > 0$.

Prendendo la trasformata finita seno di ambo i membri dell'equazione assegnata (con $l = 4$), abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e tenendo conto della relazione (3.22)

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \frac{d}{dt}u(n,t).$$

Applicando ora (3.23)

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{16}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\} + \frac{n\pi}{4}[U(0,t) - U(4,t)\cos n\pi].$$

In definitiva si deve risolvere l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u(n,t)$$

ottenendo

$$u(n,t) = u(n,0)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

dove

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{2x\} = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi}.$$

Quindi

$$u(n,t) = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-32\cos n\pi}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin\frac{n\pi x}{4} \\ &= \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\cos n\pi}{n}\right) e^{-n^2\pi^2 t/16} \sin\frac{n\pi x}{4}. \end{aligned}$$

Esempio 3.3.6 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x,t)$ *soggetta alle seguenti condizioni iniziali* $U(0,t) = U(6,t) = 0$*, per* $t \geq 0$ *e*

$$U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 3 \\ \\ 0 & 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita seno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36} u(n,t)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con A costante da calcolare. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = A$$

dobbiamo calcolare la trasformata seno della condizione iniziale

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} &= \int_0^6 U(x,0)\sin\frac{n\pi x}{6}dx \\ &= \int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{6}dx \\ &= \frac{6}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{6}\right]_0^3 = \frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n,t) = \frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right]e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x,t) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right]e^{-n^2\pi^2 t/36}\sin\frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 3.3.7 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali: $U(0,t) = U(2,t) = 0$, *per* $t \geq 0$ *e*

$$U_t(x,0) = 0, \qquad U(x,0) = \frac{1}{20}x(2-x)$$

con $0 \leq x \leq 2$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 2$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = 9\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ si deve risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{9n^2\pi^2}{4}u(n,t)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \frac{9n^2\pi^2}{4} = 0$$

che ammette due radici complesse coniugate $\lambda = \pm\imath 3n\pi/2$, cosicchè la soluzione generale è

$$u(n,t) = A\sin\frac{3n\pi t}{2} + B\cos\frac{3n\pi t}{2}$$

con A e B costanti da determinarsi. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{20}x(2-x)\right\}$$

quindi

$$u(n,0) = B = \mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{20}x(2-x)\right\}.$$

Inoltre

$$u'(n,0) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\{U_t(x,0)\} = 0$$

quindi calcolando la derivata prima dell'integrale generale risulta

$$u'(n,t) = A\frac{3}{2}n\pi\cos\frac{3n\pi t}{2} - B\frac{3}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2}$$

e, poichè $u'(n,0) = 0$ deve essere $A = 0$. Calcoliamo quindi la trasformata seno della condizione iniziale $U(x,0)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{U(x,0)) &= \int_0^2 \frac{1}{20}x(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{1}{10}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{20}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx.
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx &= \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale è:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx &= \left[-\frac{2x^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{8}{n^2\pi^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2} \\
&= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{16}{n^3\pi^3}[\cos n\pi - 1] - \frac{8}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

La costante cercata vale pertanto

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{2}{5n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{5n^3\pi^3}[\cos n\pi - 1] + \frac{2}{5n\pi} \\
&= \frac{4}{5n^3\pi^3}[1-\cos n\pi].
\end{aligned}$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \frac{4}{5n^3\pi^3}[1-\cos n\pi]\cos\frac{3n\pi t}{2}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5n^3\pi^3}[1-\cos n\pi]\cos\frac{3n\pi t}{2}\sin\frac{n\pi 2}{2}.$$

Esempio 3.3.8 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

dove la funzione $U(x,t)$ è soggetta alle condizioni iniziali $U(0,t) = U(1,t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$U(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 3x$$

con $0 \leq x \leq 1$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 1$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = -\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e otteniamo che il primo membro è uguale a

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}u(n,t)$$

mentre il secondo diventa

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -n^2\pi^2 u(n,t)$$

cosicchè si deve risolvere ora la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = n^2\pi^2 u(n,t). \tag{3.25}$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione (3.25) è

$$\lambda^2 - n^2\pi^2 = 0$$

che ammette due radici reali distinte $\lambda = \pm n\pi$, cosicchè essa ammette come soluzione generale una combinazione lineare di esponenziali:

$$u(n,t) = Ae^{n\pi t} + Be^{-n\pi t}$$

con A e B costanti da determinarsi utilizzando le altre condizioni iniziali note. Infatti

$$U(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\{0\} = 0$$

quindi

$$u(n,0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

e la soluzione può essere scritta come

$$u(n,t) = Ae^{n\pi t} - Ae^{-n\pi t}.$$

Inoltre, poichè

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 3x \quad \Rightarrow \quad u'(n,0) = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)\right\} = \mathcal{F}_s\{3x\}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata seno della funzione $3x$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{3x\} &= \int_0^1 3x\sin(n\pi x)dx = 3\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{3}{n\pi}\left[-x\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1 \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$u'(n,t) = An\pi e^{n\pi t} + An\pi e^{-n\pi t}$$

e

$$u'(n,0) = 2An\pi \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u'(n,0)}{2n\pi}$$

cosicchè

$$A = \frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}.$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}(e^{n\pi t} + e^{-n\pi t})$$

mentre la soluzione cercata è

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}[e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}]\sin(n\pi x) = \\
&= 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}[e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}]\sin(n\pi x).
\end{aligned}$$

Esempio 3.3.9 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x,t)$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali: $U_x(0,t) = U_x(6,t) = 0$, per $t \geq 0$ e $U(x,0) = 2x$, per $0 \leq x \leq 6$.

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_c\{U(x,t)\}$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(n,t) + U_x(6,t)\cos(n\pi) - U_x(0,t) = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(n,t)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con A costanti da calcolare. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_c\{U(x,0)\} = A$$

dobbiamo calcolare la trasformata coseno della condizione iniziale

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{U(x,0)\} = & \int_0^6 2x\cos\frac{n\pi x}{6}dx = 2\int_0^6 x\cos\frac{n\pi x}{6}dx \\
& = \frac{12}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{6}\right]_0^6 - \frac{12}{n\pi}\int_0^6 \sin\frac{n\pi x}{6}dx \\
& = -\frac{72}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{6}\right]_0^6 = -\frac{72}{n\pi}[\cos(n\pi) - 1]
\end{aligned}$$

mentre se $n = 0$ la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^6 2x dx = 36.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n,t) = \frac{72}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi) - 1]e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x,t) = 6 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi) - 1]e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos\frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 3.3.10 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali: $U(0,t) = U(4,t) = 0$, *per* $t \geq 0$ *e*

$$U(x,0) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)$$

con $0 \leq x \leq 4$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 4$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = 2\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t))$ si deve risolvere l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{8}u(n,t)$$

che ammette come integrale generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/8}$$

dove la costante A indica la trasformata seno di Fourier della condizione iniziale

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata di Fourier di $U(x,0)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} &= \int_0^4 (\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))\sin\frac{n\pi x}{4}dx \\
&= \int_0^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx + \int_0^4 \sin(4\pi x))\sin\frac{n\pi x}{4}dx.
\end{aligned}$$

Consideriamo separatamente i due integrali:

$$\int_0^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \begin{cases} 2 & n=8 \\ \\ 0 & n\neq 8, \end{cases}$$

in cui la prima uguaglianza deriva dal fatto che la funzione integranda è pari, mentre la seconda segue applicando il lemma 3.2.2.

$$\int_0^4 \sin(4\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^4 \sin(4\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \begin{cases} 2 & n=16 \\ \\ 0 & n\neq 16. \end{cases}$$

La costante cercata vale pertanto

$$A = \begin{cases} 2 & n=8,16 \\ \\ 0 & n\neq 8,16. \end{cases}$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \begin{cases} 2e^{-8\pi^2 t} & n=8 \\ \\ 2e^{-32\pi^2 t} & n=16 \\ \\ 0 & n\neq 8,16. \end{cases}$$

La soluzione cercata si riduce ad una somma di due soli addendi (quasi tutti i coefficienti della serie di Fourier sono nulli):

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2}\left(2e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x) + 2e^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x)\right) \\ &= e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x) + e^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x). \end{aligned}$$