Capitolo 1

Introduzione

1.1 Modelli Matematici

Il termine modello indica una struttura appositamente costruita per evidenziare le caratteristiche di oggetti reali. Alcune volte i modelli possono essere concreti (come ad esempio i modelli che rappresentano i prototipi di aerei, navi oppure automobili), ma spesso sono di tipo astratto, come i cosiddetti modelli matematici che usano appunto il simbolismo matematico per evidenziare determinate caratteristiche di oggetti veri. In poche parole i modelli matematici non sono altro che insiemi di relazioni che descrivono, in modo semplificato, fenomeni reali. L'interesse nella modellistica deriva dal fatto che essa consente di studiare l'evoluzione di tali fenomeni senza che questo accada realmente. Si pensi per esempio alle simulazioni matematiche degli effetti di eventi catastrofici come i terremoti in zone abitate, in grado di fornire informazioni sulle loro conseguenze che ovviamente non potrebbero mai essere note se non dopo tale evento (e di conseguenza del tutto inutili). I campi di applicazione dei modelli matematici sono attualmente i più svariati: esempi concreti sono i modelli che descrivono la dinamica delle popolazioni, oppure la diffusione di epidemie oppure lo studio dell'inquinamento in determinati territori. Nei capitoli seguenti saranno analizzate le proprietà dei modelli matematici di ottimizzazione e saranno descritti alcuni metodi numerici per determinarne la soluzione.
I modelli matematici possono essere di due tipi:

1. Modelli stocastici: quando descrivono problemi influenzati da eventi casuali (ad esempio il modello matematico della teoria delle code, in

cui il tempo di servizio di uno sportello è di tipo casuale);

2. Modelli deterministici: quando descrivono relazioni esatte tra grandezze.

Una seconda suddivisione riguarda la validità dei modelli dal punto di vista temporale, infatti i modelli matematici possono essere:

1. Modelli statici: se le relazioni tra le grandezze restano invariate nel tempo;
2. Modelli dinamici: se le relazioni tra le grandezze dipendono dal tempo.

Un'ultimo tipo di classificazione è inerente la tipologia di relazioni matematiche tra grandezze:

1. Modelli lineari: se le relazioni tra le grandezze sono descritte da equazioni/disequazioni di tipo lineare;
2. Modelli non lineari: se almeno una delle relazioni tra le grandezze non è di tipo lineare.

L'approccio modellistico di un problema reale viene realizzato attraverso diverse fasi:

1. Analisi del problema: Consiste nell'analisi della struttura del problema con lo scopo di determinare l'obiettivo da raggiungere e le relazioni logico-funzionali;
2. Costruzione del modello: Si descrivono in termini matematici le principali caratteristiche del problema e si traducono le relazioni tra le grandezze del problema;
3. Analisi del modello: Si deducono analiticamente le proprietà matematiche del modello (esistenza, unicità della soluzione, stabilità della soluzione e altre);
4. Soluzione numerica: Si desinisce un algoritmo per determinare (anche via software) la soluzione del problema;
5. Validazione dei risultati: Si verifica la congruenza dei risultati numerici rispetto ai dati sperimentali di cui si è in possesso. Nel caso in cui i dati siano discordanti allora si effettua un raffinamento del modello e si ripetono i passi precedenti.

Come detto la costruzione del modello matematico consiste nel tradurre una serie di relazioni logiche tra le grandezze reali coinvolte in termini, appunto, matematici. Per far questo è necessario applicare leggi fisiche, economiche, di mercato tradotte in equazioni algebriche, disequazioni, funzioni e così via. Poichè il modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono è necessario che queste siano il più indipendenti possibile dai dati introdotti poichè un modello deve essere usato in più situazioni e con valori differenti.
I risultati numerici devono essere considerati sempre in modo critico: la loro affidabilità dipende da molti fattori (precisione dei dati, affidabilità del software, efficacia e stabilità dell'algoritmo numerico e altri).
Nei successivi paragrafi saranno descritti alcuni classici Problemi di Ottimizzazione in diversi ambiti applicativi.

Il problema della dieta

Supponiamo di avere n alimenti (o classi di alimenti, carne, pesce, uova, legumi e altri) ed m sostanze nutritive che essi contengono (per esempio proteine, vitamine, carboidrati e altre). Si vuole determinare la quantità giornaliera di ciascun alimento che una persona deve assumere in modo tale che venga minimizzato il costo giornaliero del cibo ma che sia garantito il fabbisogno minimo di ogni sostanza nutriente di cui un uomo ha bisogno.
Per formulare il modello matematico del problema dobbiamo innanzitutto elencare i dati assegnati. In dettaglio è necessario conoscere le seguenti quantità:

- c_j = costo unitario del $j-$esimo alimento, per $j = 1, \ldots, n$;

- b_i = fabbisogno minimo giornaliero dell'$i-$esimo nutriente, per $i = 1, \ldots, m$;
- a_{ij} = quantità dell'$i-$esimo nutriente presente nell'unità del $j-$esimo alimento, per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Finora il problema è stato descritto attraverso il linguaggio naturale ma per formulare il relativo modello matematico bisogna seguire una serie di passi. Innanzitutto bisogna capire quali sono le grandezze che si vogliono determinare.

I Passo: Identificare le variabili

In questo caso l'identificazione è molto semplice in quanto dobbiamo determinare le quantità giornaliere di ciascun alimento, quindi definiamo le seguenti grandezze:
x_j = quantità giornaliera del $j-$esimo alimento, per $j = 1, \dots, n$.
Il passo successivo è quello di determinare l'obiettivo del modello ovvero definire la funzione che descrive lo scopo del problema e che prende il nome appunto di **funzione obiettivo**.

II Passo: Definire la funzione obiettivo

L'obiettivo è la minimizzazione del costo giornaliero della dieta, ovvero il costo complessivo di tutti gli alimenti. Quindi una quantità x_1 del primo alimento costa c_1x_1,una quantità x_2 del secondo costa c_2x_2, quindi il costo complessivo degli alimenti è

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

L'obiettivo è quello di determinare le quantità x_j, $j = 1, \dots, n$, in modo tale che venga minimizzato il valore di Z, purchè le quantità dell'$i-$esimo nutriente sia superiore al valore minimo giornaliero b_i. Le variabili x_j non possono assumere valori arbitrari ma questi devono essere tali da soddisfare una serie di vincoli, ovvero un vincolo per ciascuna sostanza nutriente. E questo porta all'ultima fase nella definizione del modello.

III Passo: Scrivere i vincoli del problema

Come detto i vincoli riguardano esclusivamente le sostanze nutrienti. Bisogna calcolare la quantità complessiva di ciascuna sostanza nutriente presente in tutti n gli alimenti assunti nelle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$. Per esempio nella quantità x_1 del primo alimento è presente $a_{11}x_1$ quantità del primo nutriente, $a_{21}x_1$ del secondo e così via. Nella quantità x_2 del secondo alimento sono presenti $a_{12}x_2$ quantità del primo nutriente, $a_{22}x_2$ del secondo e così via. Volendo determinare la quantità del primo nutriente questa risulta:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

che deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

che costituisce il primo vincolo del modello. In generale la necessità di soddisfare il fabbisogno dell'$i-$esimo nutriente definisce un vincolo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

In questo modo definiamo esattamente m vincoli. Al termine di questa fase abbiamo un passo finale che consiste nella formulazione del modello.

IV Passo: Formulazione completa del modello

In definitiva il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\min \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Soggetto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Supponiamo per esempio di dover decidere la composizione della dieta giornaliera a base di pasta, carne, verdura e formaggio, tenendo conto che giornalmente si devono assumere almeno 70 g. di proteine, almeno 50 g. di grassi ed almeno 250 g. di zuccheri. Nella seguente tabella sono indicati i grammi di nutrienti in ogni 100 grammi di alimento ed i relativi costi.

	Pasta	Carne	Verdura	Formaggio
Proteine	9.9	20.8	2	22
Grassi	1.2	1.1	0.2	26
Zuccheri	75.3	0	4	0
Costo €/kg	1.4	12	1.2	12

Ad esempio un etto di pasta contiene 9.9 grammi di proteine, 1.2 g. di grassi e 75.3 g. di zuccheri. Di conseguenza un chilo di pasta contiene 99 grammi

di proteine, 12 grammi di grassi e 753 grammi di zuxxheri. L'obiettivo che ci poniamo è quello di minimizzare la spesa giornaliera per l'acquisto degli alimenti in modo tale che venga soddisfatto il fabbisogno giornaliero di grassi, zuccheri e proteine.
Indicando con x_1 la quantità (in chilogrammi) di pasta, con x_2 la quantità (in chilogrammi) di carne, con x_3 la quantità (in chilogrammi) di verdura e con x_4 la quantità (in chilogrammi) di formaggio da acquistare, il problema può essere formulato come segue:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\min \; Z = 1.4x_1 + 12x_2 + 1.2x_3 + 12x_4} \\
\multicolumn{6}{l}{\text{Soggetto a:}} \\
99x_1 & +208x_2 & +20x_3 & +220x_4 & \geq & 70 \\
12x_1 & +11x_2 & +2x_3 & +260x_4 & \geq & 50 \\
753x_1 & & +40x_3 & & \geq & 250 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.}
\end{array}
$$

Un problema di miscelazione

Una fonderia deve produrre 1000 pezzi del peso ciascuno di un chilogrammo. Il ferro con cui tali pezzi sono fatti dovrà contenere manganese e silicio nelle seguenti quantità:

$$0,45\% \leq \text{manganese}, \qquad 3,25\% \leq \text{silicio} \leq 5.5\%.$$

Sono disponibili tre tipi di materiale ferroso le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Materiale ferroso	A	B	C
Silicio (%)	4.00	1.00	0.60
Manganese (%)	0.45	0.50	0.40
Costo (Euro / kg.)	0.025	0.030	0.018

Inoltre si può aggiungere direttamente manganese al costo di 10 Euro al kg. Il problema che si vuole modellare è quello di determinare il piano di produzione che minimizza il costo del materiale utilizzato. Si vuole cioè individuare le quantità di materiale per ciascuno dei tre tipi A, B, o C e di manganese puro da acquistare per produrre i 1000 pezzi richiesti, spendendo il meno possibile.
Proviamo a costruire un modello analitico per il problema. A questo scopo introduciamo le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, aventi il seguente significato:
$x_1 (\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso A da utilizzare;

$x_2(\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso B da utilizzare;
$x_3(\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso C da utilizzare;
$x_4(\geq 0)$: la quantità in kg di manganese da utilizzare.
Abbiamo imposto che le quantità di prodotto acquistate siano dei valori non negativi (vincoli di nonnegatività). Esistono poi altri vincoli che dovranno essere rispettati e che descriviamo di seguito. Il numero totale di kg prodotti deve essere 1000:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

La quantità di silicio, in kg, presente nel prodotto risultante è data da

$$0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3$$

che deve essere tale da essere compresa nei limiti voluti (cioè deve essere superiore a 32.5 kg su 1000 kg di prodotto finito e inferiore a 55 kg nella stessa quantità di prodotto):

$$32.5 \leq 0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3 \leq 55.$$

Possiamo quindi esprimere la condizione sulla percentuale di silicio mediante i due vincoli lineari

$$\begin{array}{llllll} 4x_1 & +x_2 & +0.6x_3 & \geq & 3250 \\ 4x_1 & +x_2 & +0.6x_3 & \leq & 5500. \end{array}$$

Analogamente, per la condizione sulla percentuale di manganese (che deve essere superiore a 4.5 kg su 1000 kg di prodotto) si ottiene

$$0.0045x_1 + 0.005x_2 + 0.004x_3 + x_4 \geq 4.5$$

e quindi

$$0.45x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 100x_4 \geq 450.$$

Infine il costo complessivo del prodotto risultante è

$$0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4.$$

Il problema della determinazione di un piano di produzione che minimizza il costo può quindi essere formulato come segue:

$$\min\ Z = 0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4$$

$$\begin{array}{lllllr} 4x_1 & +x_2 & +0.6x_3 & & \geq & 3250 \\ 4x_1 & +x_2 & +0.6x_3 & & \leq & 5500 \\ 0.45x_1 & +0.5x_2 & +0.4x_3 & +100x_4 & \geq & 450 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1000 \end{array}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Le variabili x_1, x_2, x_3 e x_4 corrispondono alle scelte operative che il problema reale richiede di compiere, e ciascun vincolo del modello corrisponde ad una condizione imposta dal problema reale. Determinare i valori delle variabili in modo che i vincoli siano soddisfatti e la funzione obiettivo assuma il minimo valore fornisce il miglior piano di produzione.

Un problema di pianificazione della produzione

Un'industria chimica produce quattro tipi di fertilizzante, la cui lavorazione è affidata a due reparti: produzione e confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria la lavorazione in entrambi i reparti. La seguente tabella riporta, per ciascun tipo di fertilizzante, i tempi (in ore) necessari per la lavorazione in ciascun reparto per avere una tonnellata di prodotto pronto per la vendita

Reparto	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Produzione	2	1.5	0.5	2.5
Confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto, da ciascuna tonnellata, il costo del materiale grezzo, una tonnellata di fertilizzante produce i seguenti profitti (in euro per tonnellata):

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Profitto netto	250	230	110	350

Si vuol determinare la quantità di fertilizzante di ciascun tipo da produrre settimanalmente in modo tale da massimizzare il profitto sapendo che il reparto produzione può lavorare al più 100 ore la settimana mentre il reparto

confezionamento al più 50 ore settimanali.
Definiamo, come variabili del modello, quelle pari al numero di tonnellate prodotte settimanalmente per ciascun tipo di fertilizzante:

$x_i =$ tonnellate dell'$i-$esimo tipo di fertilizzante prodotte settimanalmente.

Scopo è la massimizzazione del profitto complessivo, che si ottiene moltiplicando il profitto unitario per il numero di tonnellate prodotte:

$$Z = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4.$$

I vincoli riguardano il numero di ore settimanali che i due reparti possono lavorare. Per il reparto produzione il vincolo sul tempo necessario a produrre le quantità di prodotto pari a x_1, x_2, x_3 e x_4 è:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100,$$

mentre per il reparto confezionamento il vincolo è:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50.$$

Il problema della pianificazione settimanale della produzione può quindi essere formulato come segue:

$$\max\ Z = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & +1.5x_2 & +0.5x_3 & +2.5x_4 & \leq\ 100 \\ 0.5x_1 & +0.25x_2 & +0.25x_3 & +x_4 & \leq\ 50 \end{array}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Il problema dello zaino

Sia dato un insieme E di n elementi, a ciascuno dei quali sia assegnato un peso w_i ed un valore c_i, $i = 1, \ldots, n$, interi e positivi. Il problema dello zaino (KP, da Knapsack Problem) consiste nel determinare un sottoinsieme di elementi che abbia valore totale massimo ed il cui peso totale non superi un prefissato intero b. Il nome deriva dal fatto che viene usualmente descritto come il problema di scegliere quali oggetti di un dato insieme mettere in uno zaino in modo da non superare un dato peso (o capacità) e da massimizzare appunto il valore complessivo degli oggetti selezionati. Si assume che sia

$$0 < b < \sum_{i=1}^{n} w_i,$$

altrimenti il problema sarebbe banale e che inoltre sia

$$w_i \leq b, \qquad i = 1, \ldots, n$$

in quanto nessun elemento di peso superiore alla capacità b può far parte di una soluzione e quindi ogni elemento di peso superiore a b può essere eliminato da E. Il problema può essere scritto come un problema di massimo. Possiamo formulare il problema come uno di programmazione lineare introducendo, per ogni oggetto $i = 1, 2, \ldots, n$, una variabile $x_i \in \{0, 1\}$, con il significato che la variabile assume valore 1 se l'elemento i-esimo appartiene al sottoinsieme selezionato, e 0 altrimenti (si decide cioè se inserire o meno l'oggetto). La condizione relativa alla capacità dello zaino diviene

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq b$$

infatti, dato che ciascuna x_i può assumere solo i valori 0 o 1, nella somma vengono considerati i pesi dei soli oggetti selezionati. Analogamente, la funzione obiettivo, da massimizzare, è

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

nella funzione obiettivo si somma il valore dei soli oggetti selezionati. La formulazione finale del problema è la seguente

$$\begin{aligned} \max\ Z &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq b \\ &x_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Un problema di pianificazione regionale

Una comunità agricola, composta da tre cooperative, deve pianificare la produzione agricola per l'intero anno. Il rendimento di ogni cooperativa dipende dalla quantità di terreno disponibile e dalla quantità di acqua, come risulta dalla seguente tabella:

Cooperativa	Terra disponibile (ettari)	Acqua disponibile (migliaia metri cubi)
1	160	400
2	240	600
3	120	175

I raccolti possibili sono barbabietole, cotone e sorgo. Queste coltivazioni differiscono per la quantità di acqua di cui necessitano e dal rendimento netto per ettaro, dati riportati nella seguente tabella:

Prodotto	Consumo di acqua (metri-cubi/ettaro)	Guadagno netto (euro/ettaro)
Barbabietole	3	1000
Cotone	2	750
Sorgo	1	250

Si deve considerare inoltre che per ciascuna coltivazione la comunità ha fissato la massima quantità di terreno coltivabile che si può usare: 240 ettari per le barbabietole, 200 per il cotone e 130 per il sorgo. Inoltre è stato stabilito che la percentuale di terreno che ogni cooperativa può utilizzare per le coltivazioni deve essere la stessa.
Ovviamente le quantità da determinare sono le aree di ciascuna delle tre cooperative da destinare alle tre coltivazioni, quindi definiamo nove variabili:

Coltivazione	Cooperativa 1	2	3
Barbabietola	x_1	x_2	x_3
Cotone	x_4	x_5	x_6
Sorgo	x_7	x_8	x_9

Ovviamente la funzione da massimizzare è il guadagno totale netto che si ottiene moltiplicando la quantità totale di ettari destinati a ciascun singolo prodotto per il guadagno netto per ettaro:

$$Z = 1000(x_1 + x_2 + x_3) + 750(x_4 + x_5 + x_6) + 250(x_7 + x_8 + x_9).$$

I vincoli sono di quattro tipi:
1) Terra utilizzabile da ciascuna cooperativa:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_4 & +x_7 & \leq \; 160 \\ x_2 & +x_5 & +x_8 & \leq \; 240 \\ x_3 & +x_6 & +x_9 & \leq \; 120, \end{array}$$

2) Acqua utilizzabile da ciascuna cooperativa:

$$\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_4 & +x_7 & \leq \; 400 \\ 3x_2 & +2x_5 & +x_8 & \leq \; 600 \\ 3x_3 & +2x_6 & +x_9 & \leq \; 175, \end{array}$$

3) Terra utilizzabile complessivamente per ciascuna coltivazione:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq \; 240 \\ x_4 & +x_5 & +x_6 & \leq \; 200 \\ x_7 & +x_8 & +x_9 & \leq \; 130, \end{array}$$

4) Stessa proporzione di terra coltivata:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_4 + x_7}{160} &= \frac{x_2 + x_5 + x_8}{240} \\ \frac{x_2 + x_5 + x_8}{240} &= \frac{x_3 + x_6 + x_9}{120} \\ \frac{x_3 + x_6 + x_9}{120} &= \frac{x_1 + x_4 + x_7}{160}, \end{aligned}$$

che in questo caso sono espresse scrivendo tutte le variabili al primo membro:

$$\begin{aligned} 3(x_1 + x_4 + x_7) - 2(x_2 + x_5 + x_8) &= 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 - 2(x_3 + x_6 + x_9) &= 0 \\ 4(x_3 + x_6 + x_9) - 3(x_1 + x_4 + x_7) &= 0, \end{aligned}$$

ovviamente oltre alla condizioni di nonnegatività, $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 9$.

Un problema di scheduling del personale

Una compagnia aerea sta riorganizzando i servizi nel proprio aeroporto principale e per questo deve effettuare una politica di nuove assunzioni delle quali

si deve decidere la numerosità. Per questo vengono analizzate le necessità legate ai diversi momenti della giornata, considerando che il proprio personale deve essere ripartito in 5 turni di lavoro che coprono l'intero arco delle 24 ore:
Turno 1: dalle 6.00 alle 14.00
Turno 2: dalle 8.00 alle 16.00
Turno 3: dalle 12.00 alle 20.00
Turno 4: dalle 16.00 alle 24.00
Turno 5: dalle 22.00 alle 6.00.
Inoltre, per il numero minimo di lavoratori che devono essere presenti nelle diverse fasce orarie della giornata e per i relativi costi di un'unita di personale sono stati individuati i seguenti dati:

	Turno					
Fascia oraria	1	2	3	4	5	Addetti
6.00-8.00	$\times$					40
8.00-10.00	$\times$	$\times$				70
10.00-12.00	$\times$	$\times$				65
12.00-14.00	$\times$	$\times$	$\times$			80
14.00-16.00		$\times$	$\times$			65
16.00-18.00			$\times$	$\times$		70
18.00-20.00			$\times$	$\times$		80
20.00-22.00				$\times$		40
22.00-24.00				$\times$	$\times$	50
24.00-6.00					$\times$	15
Costo per addetto	170€	160€	175€	180€	200€	

Il problema è determinare il numero di dipendenti che devono essere assegnati a ciascun turno in modo tale da minimizzare il costo complessivo e superando il numero minimo di persone che devono essere presenti in ciascuna fascia oraria.
È evidente in questo caso definire le seguenti variabili:

$$x_j = \text{numero di dipendenti assegnati al turno } j,\ j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Il vincolo principale per i possibili valori di queste variabili è che il loro numero presente durante ogni intervallo di tempo deve superare i valori riportati nell'ultima colonna. Per esempio dalle 8.00 alle 10.00 sono in servizio i dipendenti del secondo e del terzo turno e la loro somma deve superare 70:

$$x_1 + x_2 \geq 70.$$

La funzione da minimizzare è il costo complessivo giornaliero che è la somma dei costi relativi ai dipendenti assegnati a ciascun turno, quindi:

$$\text{minimizzare} \;\; Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 200x_5$$

mentre i vincoli sono:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & & & \geq & 40 \\
x_1 & +x_2 & & & & \geq & 70 \\
x_1 & +x_2 & & & & \geq & 65 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & \geq & 80 \\
 & x_2 & +x_3 & & & \geq & 65 \\
 & & x_3 & +x_4 & & \geq & 70 \\
 & & x_3 & +x_4 & & \geq & 80 \\
 & & & x_4 & & \geq & 40 \\
 & & & x_4 & +x_5 & \geq & 50 \\
 & & & & x_5 & \geq & 15
\end{array}$$

e inoltre

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5$$

ed x_j variabile intera per ogni j. Si può osservare che alcuni vincoli non sono necessari. Infatti i vincoli di nonnegatività per x_1, x_4 e x_5 sono ridondanti in virtù del primo, dell'ottavo e del decimo vincolo, così come anche il terzo vincolo, a causa della presenza del secondo (se la somma tra x_1 e x_2 deve essere maggiore di 70 allora è chiaro che supera anche 65) ma anche il sesto esattamente per un motivo analogo.

Un problema di pianificazione urbana

Il piano regolatore di una città prevede che in una zona debbano essere costruiti il nuovo ospedale, il carcere, una caserma dei Vigili del Fuoco, una scuola, un parcheggio ed una chiesa. Sono state individuate 6 zone in cui le strutture potrebbero essere costruite e, per ciascun'opera, sono stati determinati i costi per l'eventuale realizzazione in ognuna delle aree. Tali costi (in milioni di euro) sono riassunti nella seguente tabella.

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6
Carcere	7.0	8.0	6.5	9.0	8.0	7.0
Ospedale	9.0	9.0	8.0	7.0	6.0	9.0
Caserma	4.0	4.5	3.5	4.0	3.0	3.5
Scuola	2.0	2.0	1.5	2.5	1.0	1.5
Parcheggio	0.5	0.3	0.5	0.6	0.5	0.6
Chiesa	2.0	1.5	1.0	1.5	2.0	1.8

Si vuole pianificare la costruzione delle 6 opere pubbliche minimizzando il costo complessivo della loro realizzazione.
In questo caso il problema che si vuole descrivere è quello di associare ad ogni elemento di un insieme (ovvero quello delle opere da costruire) un singolo elemento di un secondo insieme (ovvero quello delle zone edificabili), in modo tale che non ci sia nessun elemento (di entrmbi gli insiemi) che non sia associato a nulla oppure abbia più associazioni. Definiamo quindi le variabili x_{ij} tali che

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{−esima opera viene realizzata nella } j\text{−sima zona;} \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i, j = 1, \ldots, 6$. Ogni x_{ij} è una variabile binaria (può assumere solo due valori). Per esempio se fosse $x_{11} = 1$ allora tutte le variabili x_{1j}, con $j \neq 1$, e x_{i1}, con $i \neq 1$, dovrebbero essere uguali a zero. Il valore assunto da tale insieme di variabili potrebbe essere riassunto in una matrice, per esempio la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Indicato con c_{ij} il costo richiesto per la realizzazione della $i-$esima opera nella $j-$sima zona, il costo complessivo richiesto risulterebbe essere

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} c_{ij} x_{ij} \tag{1.2}$$

Se la scelta fosse stata quella schematizzata dalla matrice (1.1) allora il costo complessivo sarebbe stato pari a

$$Z = 7 + 8 + 3.5 + 2.5 + 0.3 + 2 = 15.3 \text{ M€}.$$

Obiettivo è quello di minimizzare la funzione (1.2) al variare di tutte le possibili matrici (1.1). I vincoli sono legati alla richiesta che ogni riga ed in ogni colonna della matrice X ci deve essere solo un elemento uguale a 1. Questo può essere tradotto richiedendo che la somma degli elementi di ogni riga e di ogni colonna della matrice X sia uguale a 1 e che gli elementi possano essere uguali a 0 o a 1.
Riassumendo il modello matematico è il seguente

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij}$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 6\\
&\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, 6\\
&x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Un esempio sportivo

Si sa che una squadra di pallavolo dopo 15 partite di campionato ha vinto 20 set e ne ha persi 30. Si vuol determinare il massimo dei punti che potrebbe avere ottenuto.
Come noto i possibili risultati di una partita di pallavolo sono solo sei: tre per la vittoria (per 3 set a zero, 3 set a 1 oppure 3 set a 2) e tre per la sconfitta (analogamente 0-3, 1-3 oppure 2-3). Il numero di punti assegnati per la vittoria varia da 3 (se il risultato è 3-0 oppure 3-1) o 2 (se il risultato è 3-2). Per la sconfitta è assegnato solo un punto se il risultato è 2-3, altrimenti non sono assegnati punti. Poichè è noto il numero dei set vinti e persi conviene

definire sei variabili, ognuna delle quali conta un diverso risultato:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{numero di vittorie per } 3-0;\\
x_2 &= \text{numero di vittorie per } 3-1;\\
x_3 &= \text{numero di vittorie per } 3-2;\\
x_4 &= \text{numero di sconfitte per } 0-3;\\
x_5 &= \text{numero di sconfitte per } 1-3;\\
x_6 &= \text{numero di sconfitte per } 2-3.
\end{aligned}
$$

In questo caso il numero di punti è la funzione

$$Z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6$$

che deve essere massimizzata. I vincoli sono tre:
1) Il numero di partite:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15;$$

2) Il numero di set vinti

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 = 20;$$

3) Il numero di set persi

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 30.$$

Riassumendo, la formulazione matematica del problema è la seguente

$$
\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{l}{\max\ Z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6} \\
x_1 & + & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & = & 15 \\
3x_1 & + & 3x_2 & +3x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = & 20 \\
 & & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +3x_5 & +3x_6 & = & 30. \\
\multicolumn{9}{l}{x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6,\ \text{variabili intere.}}
\end{array}
$$

Il problema del trasporto

Una ditta di trasporto deve trasferire container vuoti dai propri 6 Magazzini, situati a Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia, ai principali Porti nazionali (Genova, Venezia, Ancona, Napoli, Bari). Le disponibilità di container vuoti ai Magazzini sono le seguenti

	Container vuoti
Verona	10
Perugia	12
Roma	20
Pescara	24
Taranto	18
Lamezia	30

e le richieste ai Porti sono le seguenti:

	Container richiesti
Genova	20
Venezia	15
Ancona	25
Napoli	33
Bari	21

Il costo del trasporto dei dai magazzini ai porti costa è proporzionale alla distanza percorsa dal camion che lo trasporta. I costi (in €) di trasporto per un singolo container sono riportati nella seguente tabella:

	Genova	Venezia	Ancona	Napoli	Bari
Verona	290	115	355	715	810
Perugia	380	340	165	380	610
Roma	505	530	285	220	450
Pescara	655	450	155	240	315
Taranto	1010	840	550	305	95
Lamezia	1072	1097	747	372	333

Si vuole formulare il relativo problema di ottimizzazione avendo come obiettivo la minimizzazione dei costi di trasporto.
Innanzitutto associamo ad ognuno dei sei magazzini un numero intero (1=Verona, 2=Perugia, 3=Roma, 4=Pescara, 5=Taranto, 6=Lamezia) e ad ognuno dei porti un altro numero intero (1=Genova, 2=Venezia, 3=Ancona, 4=Napoli, 5=Bari). Per determinare il costo complessivo del trasporto si deve conoscere il numero di container che sono trasportati da ciascun magazzino ad ogni porto. Definiamo pertanto le seguenti variabili nonnegative

$$x_{ij} = \text{il numero di container spediti dal magazzino i al porto j},$$

con $i = 1, \ldots, 6$, e $j = 1, \ldots, 5$.
Per semplicità indichiamo con c_{ij} il costo unitario per trasportare un container dall'$i-$esmo magazzno al $j-$esimo porto.
La funzione obiettivo, da minimizzare, è pertanto

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}.$$

I vincoli derivano dalla richiesta che ovviamente tutti i container presenti in ciascun magazzino devono essere inviati ai porti. Pertanto avremo esattamente 6 vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & +x_{15} & = & 10 \\ x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & +x_{25} & = & 12 \\ x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & +x_{35} & = & 20 \\ x_{41} & +x_{42} & +x_{43} & +x_{44} & +x_{55} & = & 24 \\ x_{51} & +x_{52} & +x_{53} & +x_{54} & +x_{55} & = & 18 \\ x_{61} & +x_{62} & +x_{63} & +x_{64} & +x_{65} & = & 30 \end{array}$$

Analogamente ogni porto potrà ricevere un numero di container pari alla sua capacità. Dobbiamo pertanto aggiungere altri 5 vincoli, uno per ciascun porto:

$$\begin{array}{lllllll} x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & +x_{41} & +x_{51} & +x_{61} = & 20 \\ x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & +x_{42} & +x_{52} & +x_{62} = & 15 \\ x_{13} & +x_{23} & +x_{33} & +x_{43} & +x_{53} & +x_{63} = & 25 \\ x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & +x_{44} & +x_{54} & +x_{64} = & 33 \\ x_{15} & +x_{25} & +x_{35} & +x_{45} & +x_{55} & +x_{65} = & 21 \end{array}$$

A questi vanno aggiunti i vincoli di interezza per ciascuna variabile x_{ij}.

Un esempio di pianificazione edilizia

In un terreno di 8 ettari una società deve costruire alcuni impianti sportivi, ovvero campi di calcio, di calcetto, di tennis, di pallavolo e di pallacanestro. Si vuole massimizzare il numero di impianti da costruire considerando che i relativi costi e le dimensioni sono riassunti nella seguente tabella:

Impianto	Dimensioni (in metri)	Costo (in M€)
Calcio	100×50	1.0
Calcio a 5	40×20	0.4
Tennis	24×11	0.3
Pallavolo	18×9	0.5
Pallacanestro	28×15	0.5

Bisogna inoltre considerare che l'estensione di ciascun impianto va aumentata del 10% per gli spazi da adibire a strade, spogliatoi e spazio libero intorno ai campi, che la società ha a disposizione 4 milioni di euro, che bisogna costruire almeno un impianto per ciascuna tipologia e che il numero di campi di pallacanestro e pallavolo non deve superare la metà del numero degli altri impianti.
La funzione da massimizzare è il numero di impianti complessivo pertanto bisogna conoscere il numero di ciascun tipo di impianto da costruire. Definiamo pertanto 5 variabili:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Numero di campi di calcio da costruire} \\ x_2 &= \text{Numero di campi di calcio a 5 da costruire} \\ x_3 &= \text{Numero di campi di tennis da costruire} \\ x_4 &= \text{Numero di campi di pallavolo da costruire} \\ x_5 &= \text{Numero di campi di pallacanestro da costruire.} \end{aligned}$$

La funzione obiettivo, da massimizzare, è pertanto la seguente:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

Il primo vincolo riguarda lo spazio a disposizione, bisogna pertanto calcolare i metri quadri richiesti da ciascun impianto sportivo.

$$\begin{array}{lll} \text{Superificie campo di calcio} & = 100 \times 50\ m^2 = 5000 & +10\% = 5050m^2 \\ \text{Superificie campo di calcio a 5} & = 40 \times 20\ m^2 = 800 & +10\% = 880m^2 \\ \text{Superificie campo di tennis} & = 24 \times 11\ m^2 = 464 & +10\% = 510.4m^2 \\ \text{Superificie campo di pallavolo} & = 18 \times 9\ m^2 = 162 & +10\% = 178.2m^2 \\ \text{Superificie campo di pallacanestro} & = 28 \times 15\ m^2 = 720 & +10\% = 792m^2. \end{array}$$

Pertanto deve risultare:

$$5050x_1 + 880x_2 + 510.4x_3 + 178.2x_4 + 792x_5 \leq 80000m^2.$$

Il secondo vincolo riguarda i costi complessivi che non devono superare la cifra disponibile:

$$x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 \leq 4 \text{ M€}.$$

L'ultima riguarda il vincolo sul numero di campi di pallacanestro e pallavolo:

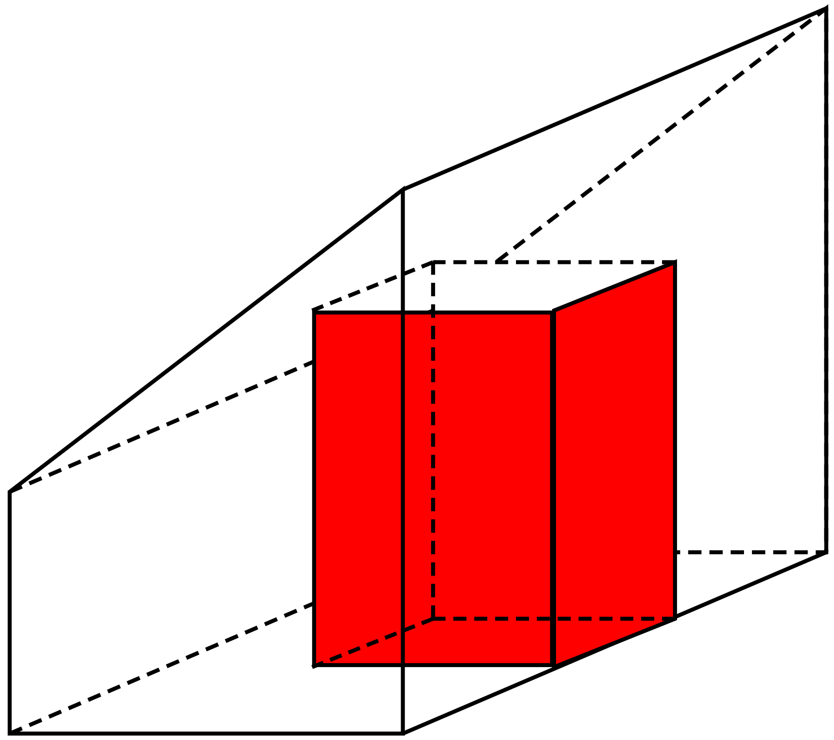
$$x_4 + x_5 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

Il vincolo di nonnegatività è sostituito dal requisito che tutte le variabili x_i devono essere maggiori o uguali di 1. La formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\max\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \\
5050x_1 & +880x_2 & +510.4x_3 & +178.2x_4 & +792x_5 & \leq & 80000 \\
x_1 & +0.4x_2 & +0.3x_3 & +0.5x_4 & +0.5x_5 & \leq & 4 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & -2x_5 & \geq & 0. \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1,\ \text{variabili intere.}}
\end{array}$$

Un esempio di modello non lineare

Un'industria chimica deve costruire un serbatoio scoperto da adibire all'immagazzinamento di un prodotto liquido utilizzando una quantità di lamiera pari a 150 metri quadri. Il serbatoio deve essere collocato all'interno di un capannone a pianta quadrata con lato di 15 metri e con un tetto spiovente dall'altezza di 7 metri fino all'altezza di 4 metri. Per semplicità si suppone che il serbatoio abbia la forma di un prisma retto con base quadrata. Si vuole formulare il problema di determinare le dimensioni del serbatoio in modo tale che il volume sia massimo.



Appare chiaro che, dovendo determinare le dimensioni del serbatoio, ovvero la lunghezza del lato di base e dell'altezza, si pongano, come variabili del problema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{lunghezza del lato di base} \\ x_2 &= \text{lunghezza dell'altezza.} \end{aligned}$$

Il volume del serbatoio è quindi

$$Z = x_1^2 x_2$$

che è la funzione da massimizzare.
I vincoli sulle variabili del problema sono di due tipi:
1) vincoli sulla quantità di lamiera da utilizzare;
2) vincoli sulle dimensioni del serbatoio rispetto al capannone che lo deve contenere.
La lamiera disponibile (ovvero 150 metri quadri) deve essere sufficiente per costruire solo la base e le pareti laterali, ovvero la superficie complessiva deve essere

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = 150.$$

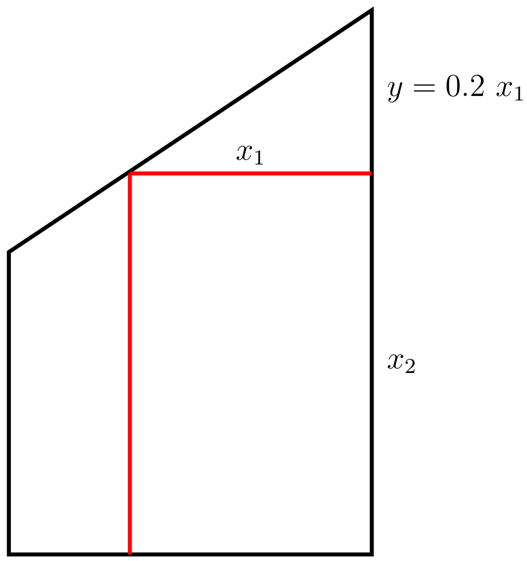
Per quello che riguarda le dimensioni deve essere innanzitutto

$$x_1 \leq 15.$$

Per determinare il vincolo sull'altezza calcoliamo prima la pendenza del tetto (ovvero il rapporto tra la differenza di ordinate e quella di ascisse):

$$p = \frac{7-4}{15} = \frac{3}{15} = 0.2.$$

cosicchè, dalla seguente figura (non in scala)



si evince che deve essere

$$x_2 + 0.2x_1 = 7.$$

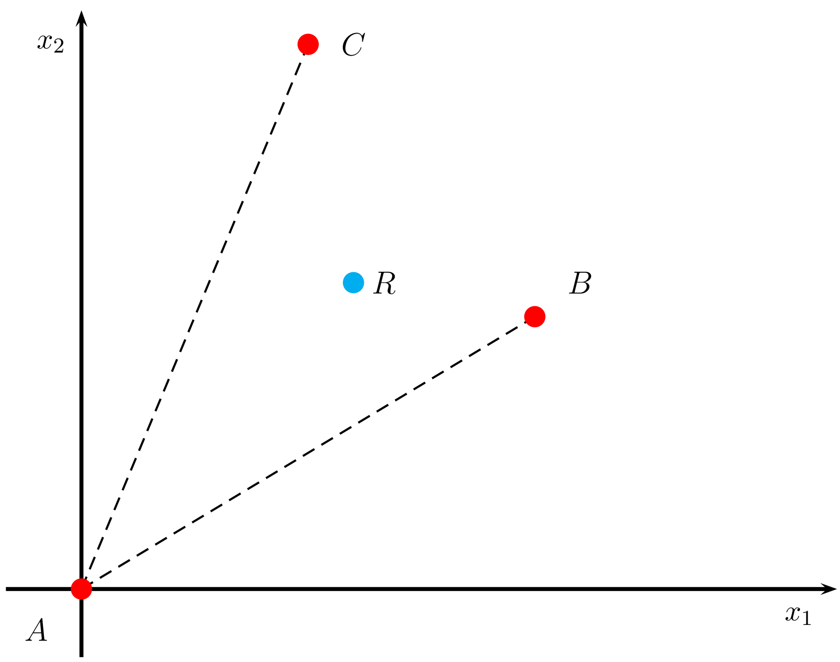
Il problema di programmazione lineare può quindi essere riassunto nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} \max\ Z = x_1^2 x_2 \\ \begin{array}{lcl} x_1^2 + 4x_1x_2 & = & 150 \\ x_1 & \leq & 15 \\ 0.2x_1 + x_2 & \leq & 7 \end{array} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

In questo esempio sia la funzione Z che i vincoli sulle variabili x_1, x_2 sono di tipo non lineare.

Un secondo esempio di modello non lineare

Una compagnia petrolifera si rifornisce di greggio in tre città portuali, indicate con A, B e C. Il porto B è ubicato a 200 km a est e a 150 km a nord del porto A. Il porto C si trova a 100 km a est e a 300 km a nord del porto A. La compagnia intende costruire una nuova raffineria in modo tale da minimizzare la quantità totale di tubi occorrenti per collegare la raffineria ai porti. Inoltre la raffineria non può essere costruita a sud del porto A nè a meno di 100 km di distanza da questo.
Innanzitutto scegliamo un sistema di riferimento in cui il porto A coincide con l'origine, in modo tale che i tre porti abbiano le seguenti coordinate: $A(0,0), B(200,150)$ e $C(100,300)$.



Siano (x_1, x_2) le coordinate del punto dove costruire la raffineria R. Calcoliamo le distanze di R dai tre porti:

$$\begin{aligned}
\overline{AR} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\
\overline{BR} &= \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} \\
\overline{CR} &= \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}
\end{aligned}$$

cosicchè la distanza totale dai tre porti è la funzione

$$Z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} + \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}.$$

Un primo vincolo è che risulti $x_2 \geq 0$ (la raffineria deve trovarsi infatti a nord del porto A). Inoltre deve distare da questo più di 100 km quindi deve essere

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 100^2.$$

Il problema può essere quindi formulato nel seguente modo

$$\min\ Z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} + \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \ \geq\ 10000$$

$$x_2 \geq 0.$$

Capitolo 2

Programmazione lineare

2.1 Introduzione

I problemi di ottimizzazione, alcuni dei quali sono stati descritti nel precedente capitolo, hanno la seguente forma

$$\begin{cases} \max\ Z = f(x) \\ x \in S \end{cases} \tag{2.1}$$

dove f è una funzione

$$f\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mentre $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Una possibile variazione del problema (2.1) è che il problema sia quello di minimizzare $f(x)$. La funzione

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

viene detta funzione obiettivo, le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prendono il nome di variabili decisionali. Una qualunque assegnazione di valore alle variabili decisionali è detta soluzione. L'insieme S, che viene definito solitamente attraverso una serie di disequazioni, o anche equazioni, dette vincoli, prende il nome di regione ammissibile, o regione di ammissibilità. Ogni $x \in S$ viene detto soluzione ammissibile. Una soluzione non ammissibile è una soluzione che viola almeno un vincolo. La soluzione ottima è quella che fornisce il valore migliore per la funzione obiettivo (cioè il massimo o il minimo in base al tipo di problema da risolvere). Un problema viene detto inammissibile se $S = \emptyset$. Tra i diversi problemi di ottimizzazione è possibile distinguere i seguenti tipi:

- Problemi di Ottimizzazione Continua, se le variabili possono assumere valori reali, ovvero $x \in \mathbb{R}^n$, in particolare si parla di Ottimizzazione Vincolata se $S \subset \mathbb{R}^n$, Ottimizzazione Non Vincolata se $S = \mathbb{R}^n$.

- Problemi di Ottimizzazione Discreta, se le variabili possono assumere valori interi, ovvero $x \in \mathbb{N}^n$, in particolare si parla di Programmazione Intera se $S \subset \mathbb{N}^n$, Programmazione Binaria se le variabili decisionali possono assumere come valore solo 0 oppure 1.

- Problemi di Programmazione Mista, se alcune variabili possono assumere valori interi mentre le altre possono assumere valori reali.

Quando la funzione $f(x)$ è di tipo lineare, ovvero può essere scritta come

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ed anche i vincoli che definiscono S sono tipo lineare allora il problema di ottimizzazione viene detto di programmazione lineare, dove in questo caso il termine programmazione deve essere inteso come sinonimo di pianificazione. Come visto negli esempi del precedente capitolo la programmazione lineare riguarda la pianificazione di alcune attività al fine di ottenere il risultato migliore, ovvero l'uso ottimale delle risorse disponibili. Dal punto di vista matematico il modello consiste nel determinare il valore assunto dalle variabili decisionali in modo tale che la funzione $f(x)$ sia massima. I vincoli lineari posti sulle variabili decisionali sono detti vincoli funzionali (o strutturali):

$$\begin{array}{rrlrcl}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m,
\end{array}$$

con $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. A questo si aggiungono vincoli di nonnegatività per le variabili decisionali: $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Il numero di variabili decisionali è indipendente dal numero di vincoli strutturali. Il tipo di problema appena definito viene detto in forma standard, e chiaramente è possibile definire problemi che abbiano caratteristiche differenti da quanto visto, per esempio si potrebbe porre il problema di minimizzare la funzione obiettivo, oppure qualche vincolo potrebbe essere in forma di uguaglianza

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

oppure con differente verso nella disuguaglianza

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

oppure potrebbe mancare qualche vincolo di nonnegatività oppure si potrebbe richiedere che una variabile sia intera oppure binaria.

2.2 Il metodo grafico

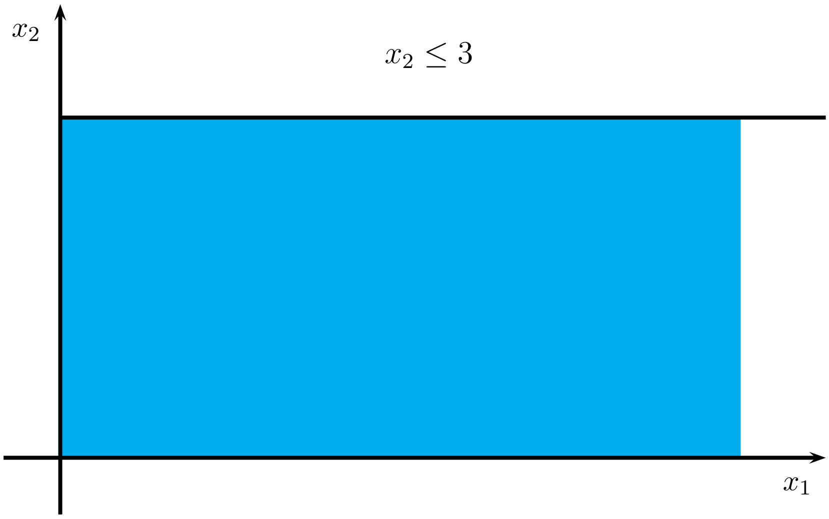
Quando un problema ha soltanto due variabili decisionali, per esempio x_1 e x_2, allora è possibile risolverlo per via grafica. Tale tecnica consite nel tracciare, nel piano (x_1, x_2) (cioè x_1 ascissa e x_2 ordinata), i contorni della regione ammissibile. Si considerano quindi i vincoli uno per uno e si identificano le regioni del piano contenenti i punti che soddisfano tale vincolo e che vengono intesecate con la regione già identificata grazie ai vincoli che sono già stati considerati. I vincoli di nonnegatività $x_1, x_2 \geq 0$ restringono la ricerca della regione di ammissibilità al solo primo quadrante del piano cartesiano.
Consideriamo ora il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{rrrl}
\max & Z = 3x_1 + 5x_2 & & \\
 & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & +x_2 & \leq & 5 \\
-x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.}
\end{array}$$

Rappresentiamo graficamente le regioni del piano (x_1, x_2) che sono identificate dai vincoli del problema. Per identificare la regione del piano cartesiano identificata dal primo vincolo tracciamo il grafico della retta

$$x_2 = 3.$$

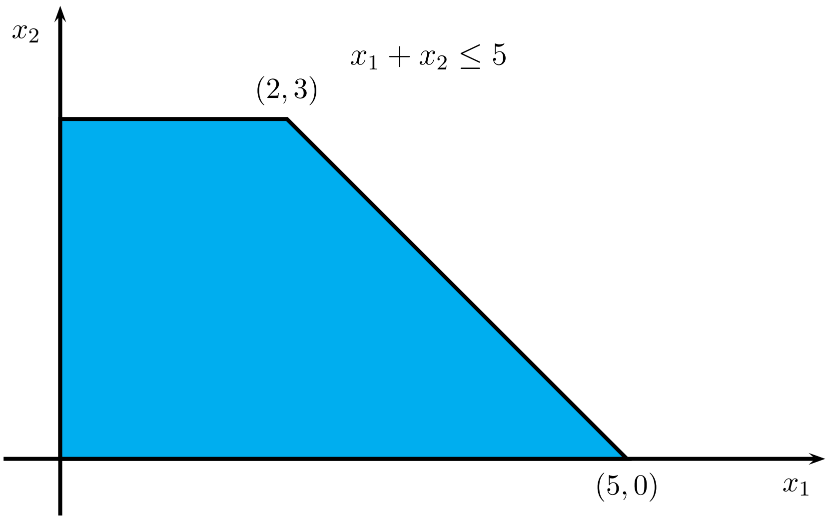
I punti sono quelli che si trovano al di sotto di questa, come evidenziato nella figura.



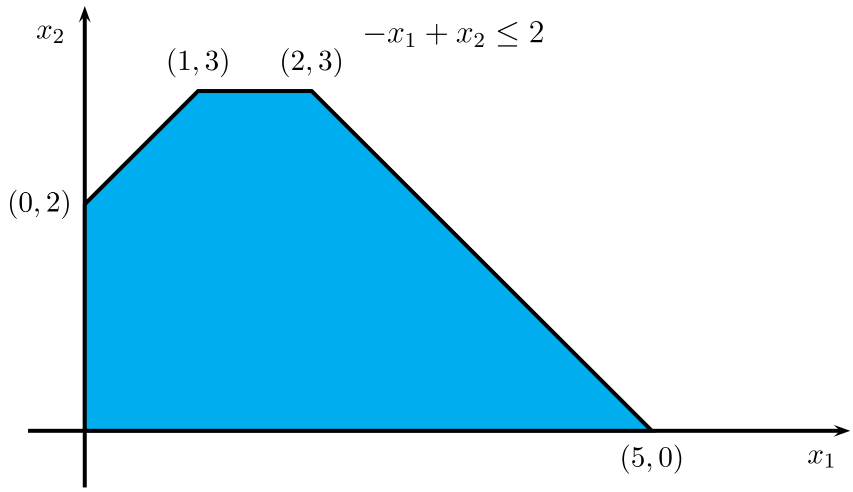
Per il secondo vincolo consideriamo la retta

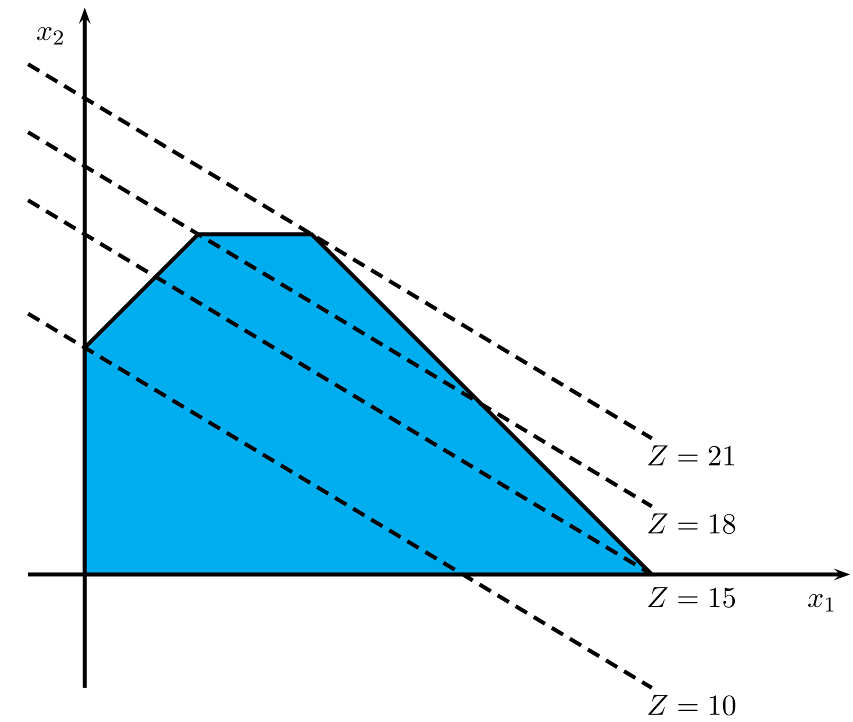
$$x_1 + x_2 = 5.$$

Per individuare la regione di interesse osserviamo che l'origine $(0, 0)$ soddisfa la disequazione quindi la porzione del piano di interesse è quella che la contiene. La regione ammissibile si ottiene effettuando l'intersezione tra quella appena determinata e l'insieme identificato dal primo vincolo.



Procediamo in modo analogo anche per il terzo vincolo, ottenendo la seguente regione ammissibile.





Si ricava ora la variabile x_2 dall'espressione della funzione obiettivo

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z.$$

L'equazione della funzione obiettivo in forma esplicita rappresenta un fascio di rette parallele aventi coefficiente angolare $-3/5$ ed ordinata del punto di intersezione con l'asse x_2 pari a $Z/5$. Assegnando qualche valore a Z si può determinare in quale direzione di tale fascio il valore aumenta. In questo modo il valore massimo della funzione obiettivo viene assunto necessariamente nel vertice della regione ammissibile che viene incontrato per ultimo procedendo nella direzione del fascio di rette che aumenta il valore di Z. Ponendo $Z = 0$ la retta del fascio passa per l'origine del riferimento cartesiano mentre la retta passante per il punto $(0, 2)$ ha valore $Z = 10$. I valori di Z crescono (come era prevedibile) in corrispondenza di rette del fascio che si muovono verso la direzione delle ordinate crescenti. Quindi la soluzione ottima coincide con il punto $(2, 3)$ in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 21$.
Volendo verificare che la soluzione ottima è quella trovata si può calcolare il valore di Z anche negli altri vertici:
nel punto $(1, 3)$ si ha $Z = 18$;
nel punto $(5, 0)$ si ha $Z = 15$.
Riassumendo il metodo grafico per risolvere problemi di programmazione lineare in due dimensioni prevede i seguenti passi:

1. Individuare la regione ammissibile calcolando l'intersezione tra tutti gli insiemi cui appartengono i punti che soddisfano ogni singolo vincolo;

2. Individuare la direzione del fascio di rette identificato dalla funzione obiettivo;

3. Individuare la direzione di crescita o decrescita di Z in base al tipo di problema assegnato;

4. Identificare la soluzione ottima come l'ultimo vertice della regione ammissibile intersecata con una retta del fascio che si muove lungo la direzione individuata al passo precedente.

2.2.1 Alcune osservazioni sul metodo grafico

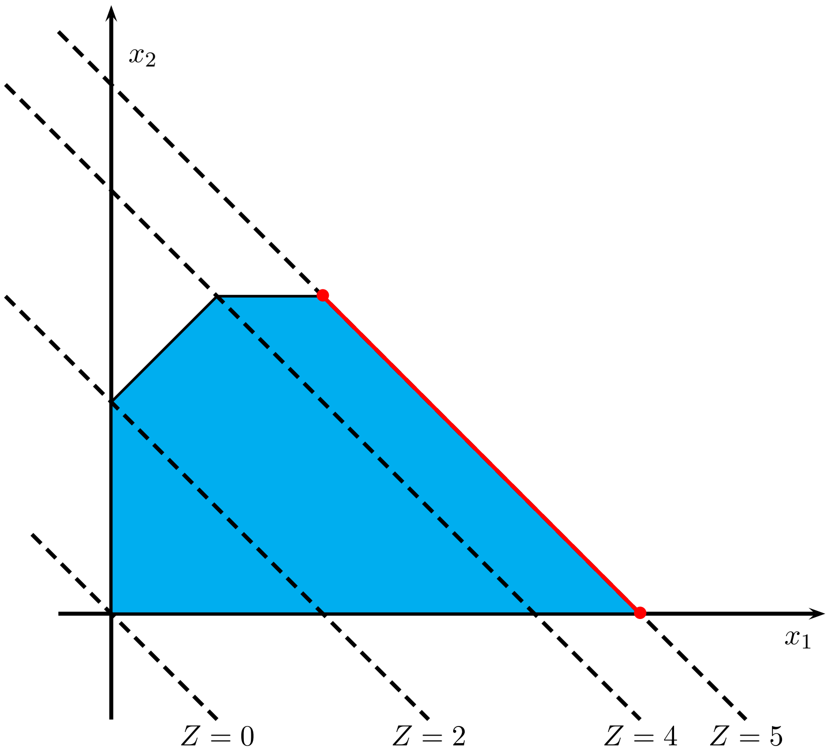
Osservazione 1. Il metodo grafico si può applicare facilmente quando il problema ha due variabili. Se il problema avesse tre variabili decisionali la regione ammissibile diventerebbe una figura solida (un poliedro in particolare) mentre la funzione obiettivo sarebbe un fascio di piani paralleli. È chiaro come la rappresentazione grafica di tali enti geometrici diventi molto più complessa, seppur non impossibile da studiare.

Osservazione 2. Il metodo grafico consente alcune osservazioni che sono valide anche nel caso in cui le variabili decisionali siano un numero maggiore. Infatti la soluzione si trova sempre sulla frontiera della regione ammissibile ed è localizzata (quando esiste ed e unica) in un vertice. Sulla questione relativa all'esistenza e all'unicità della soluzione tuttavia ci sono altre osservazioni da fare.

Osservazione 3. Consideriamo la stessa regione ammissibile dell'esempio fatto ma cambiamo la funzione obiettivo:

$$\max \ Z = x_1 + x_2$$

allora cambia la soluzione.

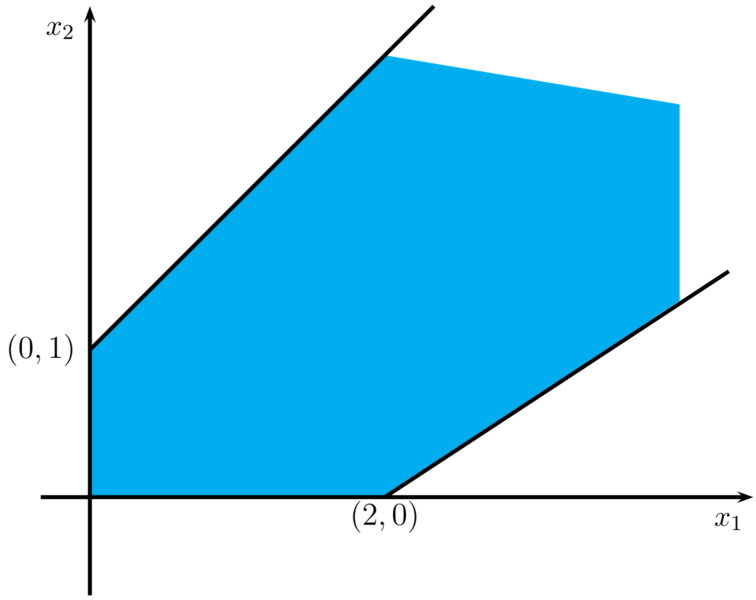


Infatti osserviamo che le soluzioni sarebbero state tutti i punti appartenenti al segmento congiungente $(5, 0)$ e $(2, 3)$, cioè sarebbero state infinite.

Osservazione 4. Se i vincoli fossero stati i seguenti:

$$\begin{array}{lll} -x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1 & -3x_2 & \leq & 4 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

allora la regione ammissibile sarebbe stata la seguente

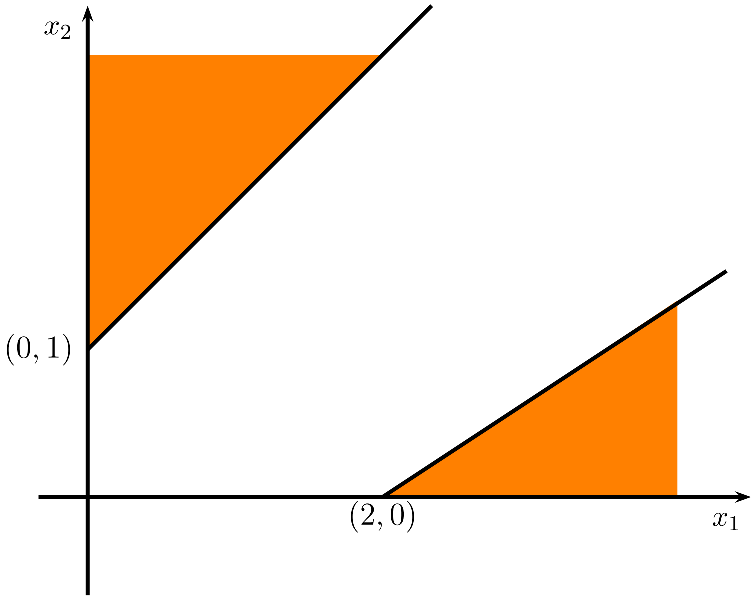


cioè una regione illimitata superiormente allora anche la funzione obiettivo sarebbe stata illimitata e quindi la soluzione sarebbe stata $Z = +\infty$, quindi il problema di massimo non avrebbe ammesso soluzione.

Osservazione 5. Se invece si fossero considerati i vincoli opposti, cioè

$$\begin{array}{lll} -x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ 2x_1 & -3x_2 & \geq & 4 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

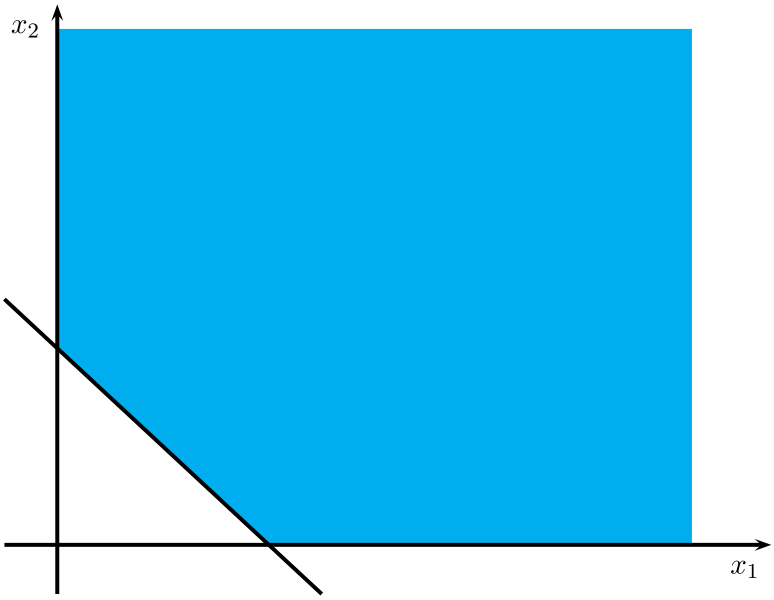
allora la regione ammissibile sarebbe stata l'intersezione tra gli insiemi evidenziati nel seguente grafico, ovvero sarebbe stata vuota ed il problema non avrebbe ammesso soluzione.



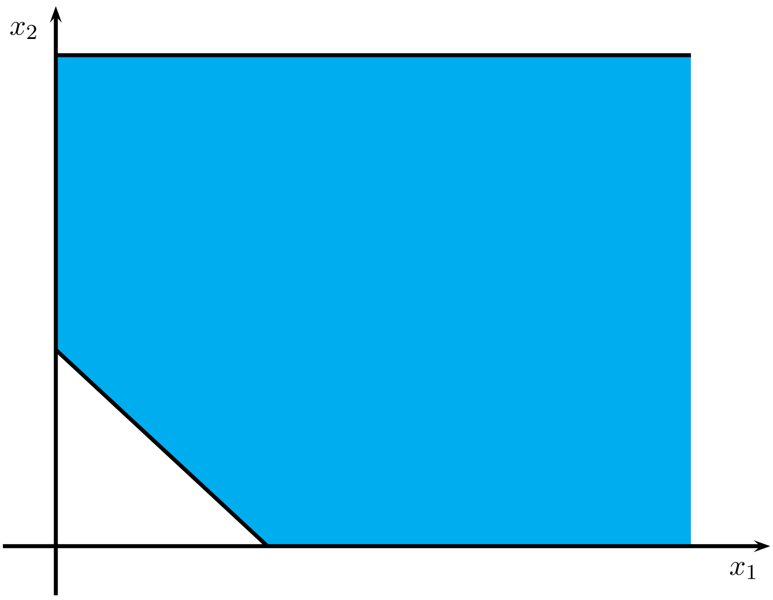
Esempio 2.2.1 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{array}{rrcr} \min & Z = 3x_1 + 4x_2 & & \\ x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & -x_2 & \leq & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

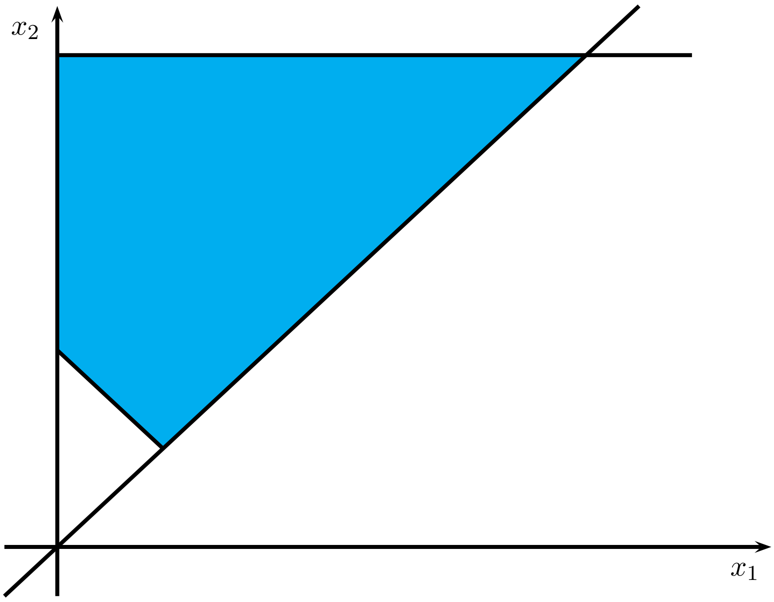
Rappresentiamo graficamente le regioni del piano (x_1, x_2) che sono identificate dai vincoli del problema, iniziando dalla retta $x_1 + x_2 = 4$



L'insieme dei punti che soddisfa il primo vincolo è quello che non contiene l'origine pertanto coincide con quello evidenziato in ciano. La retta $x_2 = 10$ è parallela all'asse x_1 cosicchè il secondo vincolo identifica i punti che appartengono alla striscia delimitata dalle due rette e, intersecandola con l'insieme già ottenuto si ottiene il seguente



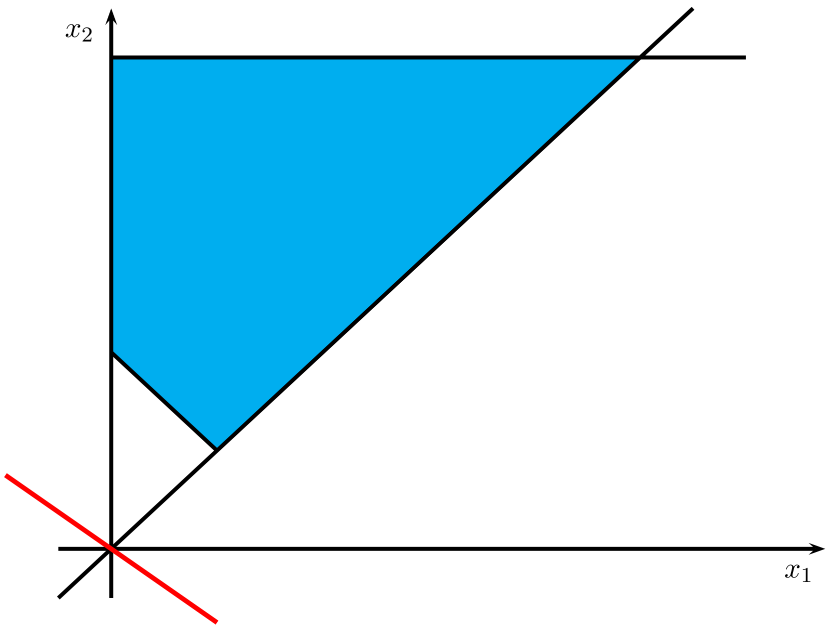
Il terzo vincolo è delimitato dalla retta $x_1 = x_2$ (ovvero la bisettrice del primo e terzo quadrante), e, poichè è soddisfatto dal punto di coordinate $(0, 1)$ allora la regione ammissibile è la seguente



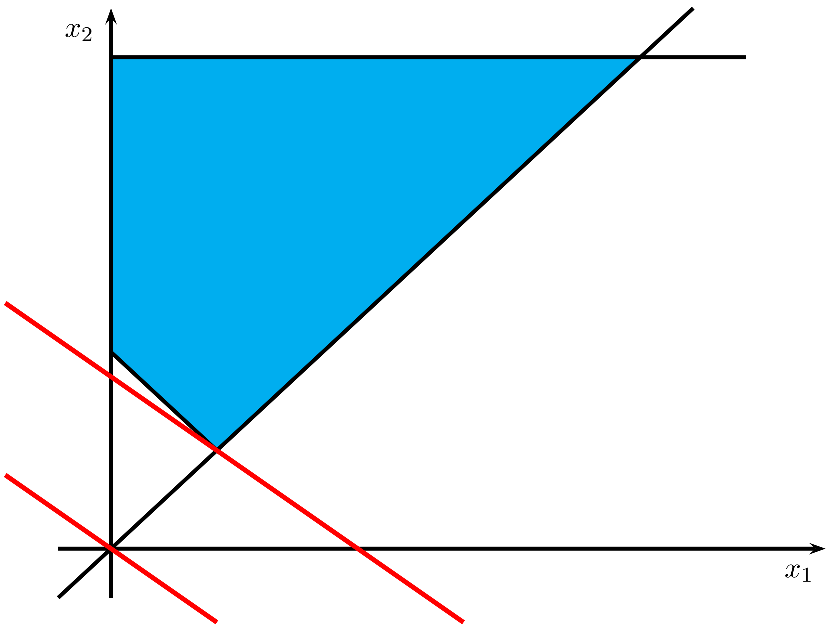
Consideriamo ora la funzione obiettivo e ricaviamo la variabile x_2

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}Z$$

che rappresenta l'equazione del fascio di rette parallele di coefficiente angolare $-3/4$. Poichè la funzione obiettivo deve essere minimizzata la soluzione coincide con il punto della regione ammissibile che appartiene al fascio e avente il minimo valore di Z. Tracciando la retta del fascio passante per l'origine (con $Z = 0$ quindi)



si vede graficamente che la soluzione è il punto $(2, 2)$ per cui $Z = 14$.



2.3 La geometria dei problemi di programmazione lineare

Nei paragrafi seguenti l'attenzione sarà rivolta allo studio delle proprietà geometriche e alla risoluzione dei problemi di programmazione lineare in forma standard. cioè tali che

1. Funzione obiettivo da massimizzare;
2. Vincoli funzionali (o strutturali) nella forma $\leq$ e termine noto $b_i \geq 0$ per ogni i;
3. Vincoli di nonnegatività per le variabili decisionali.

Osserviamo che il vincolo di nonnegatività del termine noto serve a discriminare effettivamente tra le diverse tipologie di disuguaglianza. Infatti considerando il vincolo

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 2$$

moltiplicandolo per -1 diventerebbe

$$-3x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -2$$

e quindi apparentemente potrebbe essere trattato come un vincolo di tipo $\leq$. In realtà le cose sono piuttosto differenti e vedremo in seguito che esistono meccanismi sostanzialmente molto diversi per risolvere problemi con differenti tipi di disuguaglianza.
In termini matematici il problema in forma standard è il seguente

$$\max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

ed inoltre $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.
Le variabili x_i che definiscono le incognite del problema sono dette, come abbiamo visto variabili decisionali. Talvolta questi problemi possono essere

rappresentati in forma compatta ponendo

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

con $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, la funzione obiettivo risulta essere pertanto pari al prodotto scalare tra i vettori $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{x}$, e, per quello che riguarda i vincoli, posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

costituiscono un sistema di disequazioni

$$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.$$

La forma matriciale di un problema di programmazione lineare in forma standard risulta essere la seguente

$$\begin{aligned} &\max \;\; Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Si definisce frontiera del vincolo l'iperpiano in $\mathbb{R}^n$ di equazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

L'insieme dei punti che soddisfa la disequazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

rappresenta un semispazio in $\mathbb{R}^n$. La regione ammissibile è l'intersezione di tutti i semispazi e gli iperpiani definiti dai vincoli. L'intersezione tra un numero finito di iperpiani e semispazi è detta poliedro in $\mathbb{R}^n$. Se un poliedro è chiuso e limitato allora si dice politopo.
Una proprietà importante di cui gode sempre la regione ammissibile è che si tratta di un insieme convesso.

Definizione 2.3.1 *Un insieme $P \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$ risulta*

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in P, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

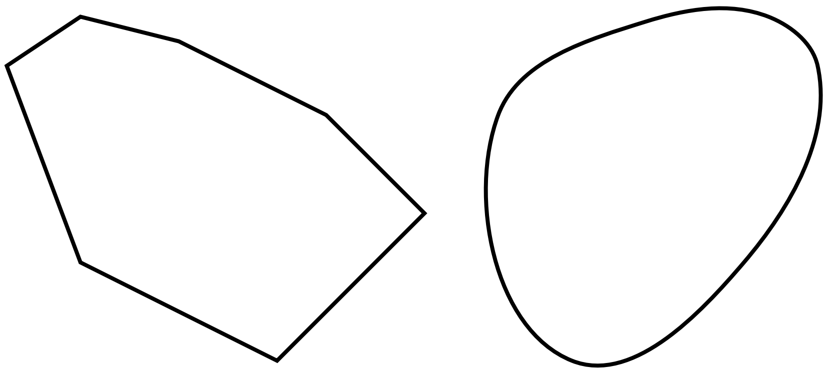
La relazione

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$$

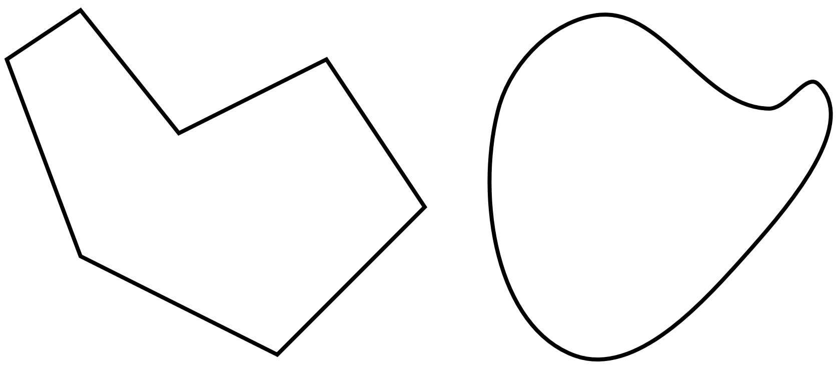
prende il nome di combinazione lineare convessa. Tale concetto può essere generalizzato considerando k elementi $\boldsymbol{t}_1, \ldots \boldsymbol{t}_k \in P$ e definendo una loro combinazione lineare convessa nel seguente modo

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{t}_i, \qquad \text{purchè} \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Se un insieme è convesso allora per ogni coppia di punti appartenenti ad esso il segmento che li congiunge appartiene interamente all'insieme. I seguenti sono esempi di insiemi convessi.



I seguenti sono invece esempi di insiemi non convessi.



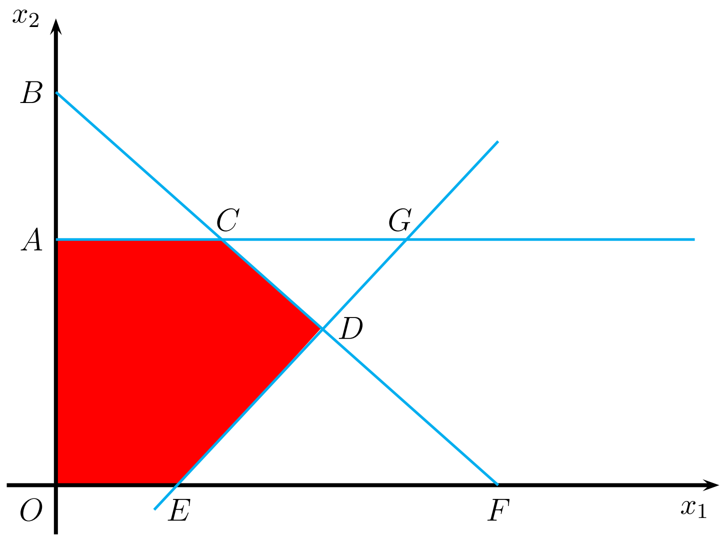


Figura 2.1:

I punti di intersezione tra n iperpiani sono detti vertici. I vertici ammissibili sono quelli che appartengono alla regione ammissibile mentre i vertici non ammissibili sono quelli che non appartengono alla regione ammissibile. Se consideriamo la Figura 2.1 allora i punti O, A, C, D ed E sono vertici ammissibili, mentre i punti B, F e G sono vertici non ammissibili.

Osservazione. È chiaro che anche gli iperpiani di equazione

$$x_i = 0$$

che corrispondono ai vincoli di nonnegatività delimitano la regione ammissibile. Per i problemi di programmazione lineare in forma standard accade che proprio per questo l'origine è sempre un vertice ammissibile (soddisfa sicuramente i vincoli funzionali che hanno termine noto nonnegativo ed appartiene, per ogni i all'iperpiano di equazione $x_i = 0$).

Teorema 2.3.1 (di Weyl-Minkowski. Enunciato) *Ogni punto interno al politopo $P \subset \mathbb{R}^n$ può essere espresso come combinazione lineare convessa di un insieme di vertici di P.*

Fondamentale nella teoria dei problemi di programmazione lineare è il seguente teorema del quale viene fornita una dimostrazione, seppur non molto rigorosa.

Teorema 2.3.2 *Se la regione ammissibile è un politopo allora il massimo della funzione obiettivo non può essere un punto interno.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{w}$ un punto interno al politopo e supponiamo che, applicando il Teorema 2.3.1, esistono due vertici $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ tali che

$$\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}, \qquad \lambda \in [0,1].$$

Calcoliamo la funzione obiettivo nei due vertici e poniamo

$$Z_1 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \qquad Z_2 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y},$$

e supponiamo che sia $Z_1 < Z_2$. Calcoliamo la funzione obiettivo in $\boldsymbol{w}$:

$$Z^* = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}^T(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} = \lambda Z_1 + (1-\lambda) Z_2.$$

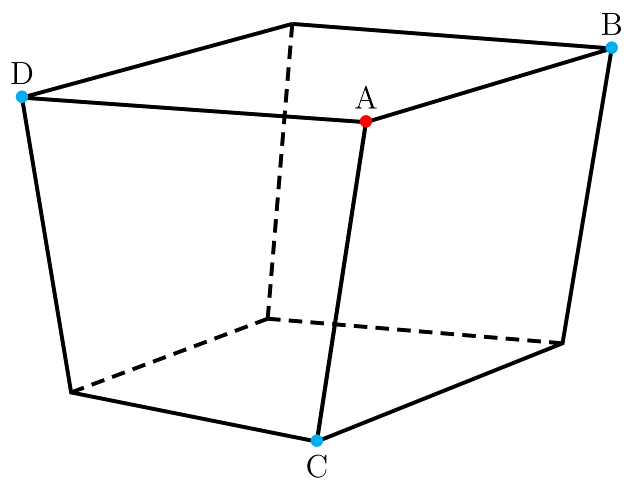
Ovviamente risulta

$$Z^* = \lambda Z_1 + (1-\lambda) Z_2 < \lambda Z_2 + (1-\lambda) Z_2 = \lambda Z_2 + Z_2 - \lambda Z_2 = Z_2.$$

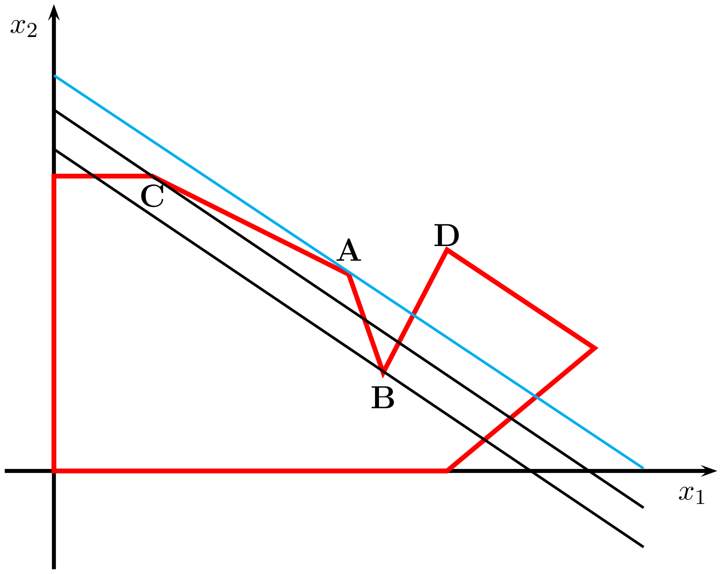
Quindi appare chiaro come il valore della funzione obiettivo in un qualunque punto interno sia sempre inferiore rispetto al valore assunto in un vertice. La dimostrazione può essere generalizzata supponendo che $\boldsymbol{w}$ sia una combinazione convessa di un insieme di vertici. □

In un problema di programmazione lineare con n variabili decisionali, due vertici si dicono adiacenti se condividono le frontiere di $n-1$ vincoli. Facendo riferimento alla Figura 2.1 sono vertici adiacenti, per esempio, A e C, ma anche C e D, mentre non sono vertici adiacenti O e C.

Invece nella seguente figura in $\mathbb{R}^3$ il vertice A ha come vertici adiacenti (esattamente tre) i punti B, C e D. Con ciascuno di questi condivide l'appartenenza a due piani che delimitano la regione ammissibile.



Due vertici adiacenti sono collegati attraverso un segmento che giace sulla frontiera comune e che viene detto spigolo della regione ammissibile. Una delle idee alla base del metodo del simplesso è la proprietà che la soluzione ottima è sempre uno dei vertici della regione ammissibile, e inoltre se si considera un qualsiasi problema di programmazione lineare che possiede almeno una soluzione ottima allora se un vertice non ha vertici adiacenti migliori (valutati attraverso la funzione obiettivo), allora deve essere necessariamente la soluzione ottima. Consideriamo infatti la seguente figura in $\mathbb{R}^2$.



Il valore della funzione obiettivo nel vertice **A** è sicuramente maggiore di quello dei due vertici adiacenti **B** e **C**. Se esistesse un vertice **D** non adiacente ad **A** migliore di quest'ultimo allora la regione ammissibile non potrebbe essere un insieme convesso. Questa proprietà è fondamentale per l'applicazione del metodo descritto nei seguenti paragrafi per risolvere problemi di programmazione lineare in forma standard, ovvero il metodo del simplesso.

2.4 Il Metodo del Simplesso

Il metodo del simplesso è una procedura iterativa di tipo algebrico che si applica a problemi di programmazione lineare in forma standard. Il metodo del simplesso si basa sulle seguenti idee chiave:

1. Il metodo del simplesso è un algoritmo di tipo iterativo che concentra l'attenzione esclusivamente sui vertici della regione ammissibile, passando, ad ogni iterazione, da un vertice ad un altro, finchè non trova la soluzione ottima oppure conclude che la funzione obiettivo è illimitata (ovvero $Z = +\infty$), identificando anche il caso in cui la soluzione ottima non è unica.

2. Il metodo sceglie come vertice iniziale l'origine (tutte le variabili decisionali sono poste uguali a zero).

3. Considerato un determinato vertice risulta più conveniente, da un punto di vista computazionale, ottenere informazioni sui vertici adiacenti. Passando da un vertice all'altro la procedura per trovare la soluzione ottima si snoda attraverso gli spigoli della regione ammissibile.

4. Dopo aver identificato il vertice ammissibile la procedura si muove lungo lo spigolo dove il tasso di incremento di Z è maggiore.

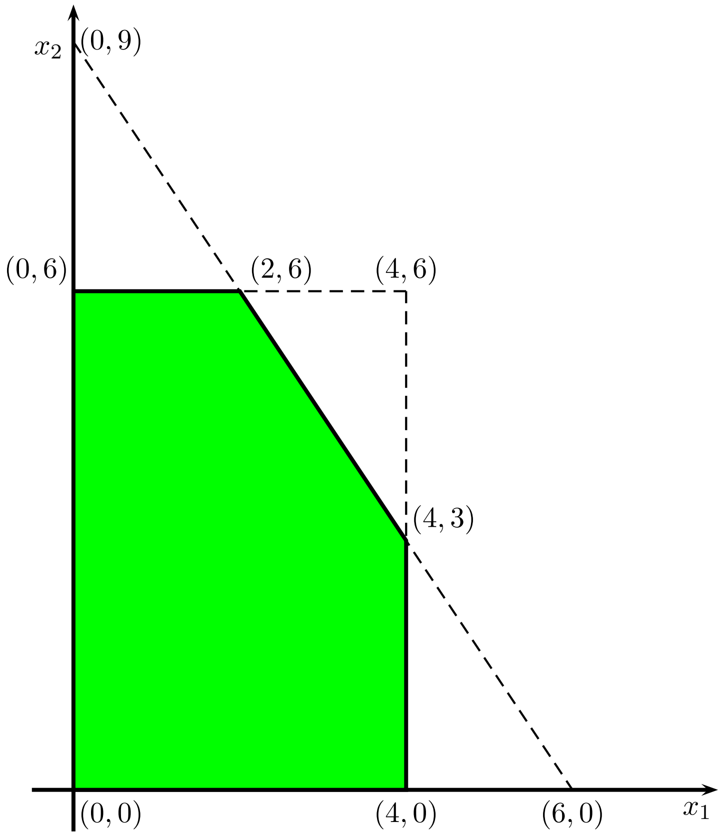
5. Un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo implica che il vertice adiacente è migliore di quello attuale, un tasso negativo indica invece che è peggiore. Se nessuno dei vertici adiacenti produce un tasso positivo significa che è stata raggiunta la soluzione ottima.

2.4.1 Forma algebrica del metodo del simplesso

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{lcl} \max\ Z = 3x_1 + 5x_2 & & \\ x_1 & \leq & 4 \\ \qquad\quad 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + \ 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

Tracciamo la regione ammissibile ed identifichiamo i suoi vertici.



Si verifica agevolmente che il vertice $(2, 6)$ è soluzione ottima in cui il valore della funzione obiettivo è $Z = 36$.
La procedura algebrica del metodo del simplesso si basa sulla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Il primo passo di inizializzazione del metodo consiste nel convertire i vincoli funzionali di disuguaglianza in equivalenti vincoli di uguaglianza. Questa trasformazione avviene introducendo le cosiddette variabili slack (scarto). Considerando il primo vincolo

$$x_1 \leq 4 \qquad \Rightarrow \qquad 4 - x_1 \geq 0$$

e ponendo

$$x_3 = 4 - x_1$$

risulta

$$x_3 \geq 0$$

cosicchè le variabili x_1 e x_3 soddisfano l'equazione

$$x_1 + x_3 = 4.$$

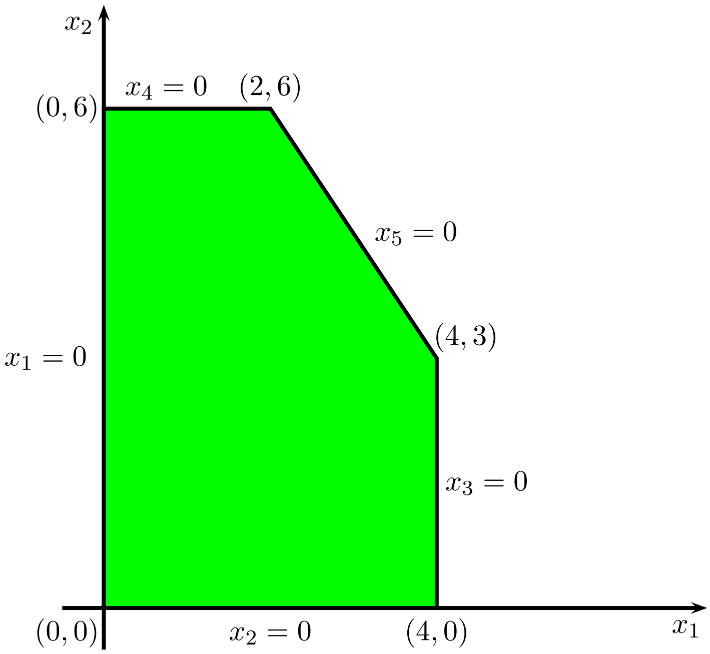
Procedendo in modo analogo per gli altri vincoli funzionali, il problema di programmazione lineare

$$
\begin{array}{llll}
\max\ Z = 3x_1 + 5x_2 & & & \\
x_1 & & \leq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 12 \\
3x_1+ & 2x_2 & \leq & 18 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

diventa il seguente

$$
\begin{array}{llllll}
\max\ Z = 3x_1 + 5x_2 & & & & & \\
x_1 & & +x_3 & & & = \ 4 \\
 & 2x_2 & & +x_4 & & = \ 12 \\
3x_1+ & 2x_2 & & & +x_5 & = \ 18 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5 & & & & &
\end{array}
\tag{2.2}
$$

che viene detto problema in forma aumentata. Le variabili slack introdotte sono appunto x_3, x_4 e x_5.
Si definisce soluzione aumentata quella soluzione per cui alle variabili decisionali sono state aggiunte le variabili slack.
Si definisce soluzione di base (basica) un vertice cui sono stati aggiunti i valori delle variabili slack.
Si definisce soluzione basica ammissibile (in breve BFS=Basic Feasible Solution) un vertice ammissibile cui sono state aggiunte le variabili slack.
Se una variabile slack è uguale a zero, allora la soluzione corrente appartiene alla frontiera del vincolo funzionale, mentre il valore della variabile slack è positivo allora la soluzione corrente si trova all'interno della regione ammissibile rispetto a tale vincolo. In realtà si può osservare che se una soluzione ha una variabile (sia decisionale che slack) uguale a zero questo vuol dire che appartiene ad uno degli spigoli che delimitano la regione ammissibile:



Il numero di BFS è finito e possiamo elencarle tutte:

$$\begin{array}{l} (0,0,4,12,18) \\ (0,6,4,0,6) \\ (2,6,2,0,0) \\ (4,3,0,4,0) \\ (4,0,0,12,6), \end{array}$$

i valori delle variabili sono desunte dalle equazioni dei vincoli scritte in forma aumentata (2.2). Per esempio posto $x_1 = x_2 = 0$, dall'equazione del primo vincolo si deduce $x_3 = 4$, dal secondo $x_4 = 12$ e dal terzo $x_5 = 18$. Ancora, posto $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ sempre dall'equazione del primo vincolo si ricava $x_3 = 4$, $x_4 = 0$ perchè appartiene al segmento in cui x_4 è nulla, mentre x_5 si ricava dall'equazione del terzo vincolo

$$x_5 = 18 - 2x_2 = 6.$$

Per le altre BFS si procede in modo analogo.
In base alle osservazioni fatte risulta ovvio che ogni BFS ha almeno due variabili uguali a zero. Il motivo di questa proprietà sta nel fatto che, nella forma aumentata, si deve risolvere un sistema di 3 equazioni lineari in 5 incognite.

Il sistema presenta, quindi, 2 gradi di libertà, cioè a due variabili possono essere assegnati valori arbitrari, per esempio zero.
Le due variabili poste uguali a zero sono dette variabili non di base (o non in base) mentre le altre tre variabili sono dette variabili di base. Il numero di variabili di base è uguale al numero di vincoli funzionali, mentre il numero di variabili non di base è la differenza tra il numero complessivo di variabili ed il numero di vincoli. Se le variabili di base soddisfano i vincoli di nonnegatività allora la soluzione è una BFS.
Due BFS si dicono adiacenti se condividono tutte le variabili non di base tranne una. Per passare da una BFS ad una adiacente è necessario quindi che una variabile non di base lo diventi e viceversa.
Per esempio se consideriamo la BFS $(0, 0, 4, 12, 18)$ allora $(0, 6, 4, 0, 6)$ è adiacente ad essa in quanto x_1 risulta non essere in base in entrambe, mentre la BFS $(2, 6, 2, 0, 0)$ non lo è in quanto non hanno in comune alcuna variabile non in base.
Cerchiamo ora di descrivere matematicamente i passi delle singole iterazioni previste dal metodo del simplesso. Il primo passo è quello di riscrivere le equazioni del modello, scrivendo anche la funzione obiettivo come se fosse un'ulteriore equazione:

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z- & 3x_1- & 5x_2 & & & & = & 0 \\
(1) & & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \\
(2) & & & 2x_2 & & +x_4 & & = & 12 \\
(3) & & 3x_1+ & 2x_2 & & & +x_5 & = & 18.
\end{array}$$

Si parte da una soluzione base e si usa l'equazione (0) per calcolare il valore della funzione obiettivo. Anche Z viene considerata come variabile sempre in base.
Scegliere l'origine come vertice ammissibile significa porre $x_1 = x_2 = 0$ cioè si considera come soluzione basica ammissibile $(0, 0, 4, 12, 18)$. Appare chiaro che inizialmente le variabili in base sono le variabili slack, i cui valori vengono calcolati sfruttando le equazioni (1), (2) e (3), in particolare

$$x_3 = 4, \qquad x_4 = 12, \qquad x_5 = 18,$$

mentre la funzione obiettivo calcolata vale 0.
Il problema, scritto attraverso le equazioni (0)-(3), ha le seguenti proprietà:
1) Nella funzione obiettivo sono presenti solo variabili non in base (ad eccezione di Z);

2) Ogni variabile in base è presente solo in un'equazione con coefficiente uguale a 1.
Il vantaggio offerto dalla prima proprietà è che, essendo nullo il valore di tutte le variabili presenti nella funzione obiettivo, il valore assunto da questa nella BFS corrente coincide con il termine noto della funzione stessa.
La seconda proprietà consente di ottenere immediatamente il valore della variabile in base presente nell'equazione che è uguale al termine noto (poichè tutte le altre variabili presenti nell'equazione hanno valore zero).
Il problema viene detto in forma canonica cosicchè sia possibile associare ad ogni equazione una ed una sola variabile di base:

$$\begin{array}{lllllllll}
(0) & Z- & 3x_1- & 5x_2 & & & & = & 0 \quad \text{Variabile di base } Z\\
(1) & & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \quad \text{Variabile di base } x_3\\
(2) & & & 2x_2 & & +x_4 & & = & 12 \quad \text{Variabile di base } x_4\\
(3) & & 3x_1+ & 2x_2 & & & +x_5 & = & 18 \quad \text{Variabile di base } x_5.
\end{array}$$

Trasformare, ad ogni passo, il problema in forma canonica consente, una volta determinata la nuova BFS, di aggiornare il valore delle variabili in base e della funzione obiettivo.
Poichè le variabili slack non compaiono nell'espressione di Z, i coefficienti delle variabili non di base x_1, x_2 indicano il tasso di incremento della funzione obiettivo prodotto da un eventuale aumento del valore di tali variabili. Poichè i tassi di miglioramento, cioè i coefficienti di x_1 e x_2, sono positivi si può concludere che $(0, 0, 4, 12, 18)$ non è soluzione ottima.
Passo 1 della singola iterazione: Stabilire la direzione dello spostamento.
Incrementare il valore di una variabile non di base rispetto al valore zero corrente (pur adattando i valori in modo tale da soddisfare i vincoli) corrisponde a muoversi lungo uno spigolo che inizia dal vertice ammissibile. La scelta della variabile non di base viene fatta osservando l'espressione della funzione obiettivo:

$$Z = 3x_1 + 5x_2.$$

Aumentare x_1 significa che il tasso di miglioramento della funzione obiettivo è 3, mentre per x_2 è 5. Appare chiaro che conviene scegliere x_2 come variabile entrante in base.
Passo 2 della singola iterazione: Criterio di arresto.
Bisogna determinare il valore da assegnare alla variabile entrante senza che la nuova soluzione basica esca dalla regione di ammissibilità. Il valore della

variabile non di base x_1 resta zero.

$$\begin{array}{lrrrrrcrll}
(1) & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & x_3 & = 4 \\
(2) & & 2x_2 & & +x_4 & & = & 12 & x_4 & = 12 - 2x_2 \\
(3) & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 18 & x_5 & = 18 - 2x_2.
\end{array}$$

La nonnegatività delle variabili impone dei vincoli sulle relazioni appena scritte:

$$\begin{array}{lll}
x_3 & = 4 \geq 0 & \text{Nessun limite su } x_2 \\
\\
x_4 & = 12 - 2x_2 \geq 0 & x_2 \leq 12/2 = 6 \\
\\
x_5 & = 18 - 2x_2 \geq 0 & x_2 \leq 18/2 = 9.
\end{array}$$

Quindi il valore di x_2 può essere incrementato fino a 6, valore che rende la variabile attualmente in base $x_4 = 0$. Oltre tale valore x_4 assume valore negativo violando l'ammissibilità della soluzione. Questi calcoli costituiscono quello che è noto come test del minimo rapporto. Obiettivo di tale test è determinare quale variabile di base assume per prima il valore zero all'aumentare del valore della variabile entrante. Si possono escludere da tale test tutte quelle variabili associate ad equazioni in cui il coefficiente della variabile entrante è zero oppure negativo. Quindi per ogni equazione in cui il coefficiente della variabile entrante è strettamente positivo, il test calcola il rapporto tra il termine noto ed il coefficiente della variabile entrante. La variabile di base nell'equazione con il minimo rapporto è quella che raggiunge per prima il valore 0 e quindi rappresenta, di fatto, la variabile uscente dalla base. Nell'esempio fatto entra x_2 ed esce x_4.

Passo 3 della singola iterazione: Ottenere la nuova BFS.

La situazione determinata dal passo 2 del metodo del simplesso è schematizzata nella seguente tabella:

	BFS iniziale	Nuova BFS
Variabili di base	$x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$	$x_2 = 6, x_3 =?, x_5 =?$
Variabili non di base	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_1 = 0, x_4 = 0$

Il sistema

$$\begin{array}{lcrrrrrl}
(0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & & = 0 \\
(1) & & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
(2) & & & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\
(3) & & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18
\end{array}$$

deve essere scritto ora in forma canonica, cioè ogni variabile in base deve comparire solo in un'equazione e con coefficiente uguale a 1 e nell'equazione (0) i coefficienti delle variabili in base devono essere uguali a zero. La trasformazione può avvenire effettuando delle opportune combinazioni lineari tra le equazioni del problema attraverso il cosiddetto metodo di Gauss-Jordan.
Innanzitutto dividiamo l'equazione (2) per 2 ottenendo la nuova seconda equazione:

$$(2') \qquad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6.$$

Per eliminare il coefficiente di x_2 dall'equazione (3) sottraiamo dall'equazione (3) l'equazione (2) (oppure l'equazione (2′) moltiplicata per 2):

$$\begin{array}{lccccccl}
(3) & 3x_1 & +2x_2 & & +x_5 & = & 18 & - \\
(2) & & 2x_2 & x_4 & & = & 12 & \\
\hline
(3') & 3x_1 & & -x_4 & +x_5 & = & 6. &
\end{array}$$

L'equazione (1) resta invariata perchè il coefficiente di x_2 è già uguale a zero. Ora dobbiamo eliminare il coefficiente della variabile entrante in base dall'equazione (0), sommando all'equazione (0) l'equazione (2′) moltiplicata per 5 :

$$\begin{array}{lccccccl}
(0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & = & 0 & + \\
& & & 5x_2 & +\frac{5}{2}x_4 & = & 30 & \\
\hline
(0') & Z & -3x_1 & & +\frac{5}{2}x_4 & = & 30. &
\end{array}$$

Il sistema è diventato quindi

$$\begin{array}{lcccccccl}
(0) & Z & -3x_1 & & +\frac{5}{2}x_4 & & = & 30 & \text{Variabile di base } Z \\
(1) & & x_1 & +x_3 & & & = & 4 & \text{Variabile di base } x_3 \\
(2) & & & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & & = & 6 & \text{Variabile di base } x_2 \\
(3) & & 3x_1 & & -x_4 & +x_5 & = & 6 & \text{Variabile di base } x_5.
\end{array}$$

Dalle equazioni (1) e (2) rispettivamente si ricava che $x_5 = 6$ e $x_3 = 4$. Quindi la nuova BFS è $(0, 6, 4, 0, 6)$. Si osservi che ogni variabili di base appare in una sola equazione con coefficiente 1.
Test di ottimalità:
Effettuando il test di ottimalità sulla nuova funzione obiettivo

$$Z = 3x_1 - \frac{5}{2}x_4 + 30$$

si deduce che è necessaria una seconda iterazione poichè il coefficiente di x_1 è positivo, infatti la variabile entrante deve essere proprio x_1. Per calcolare la variabile uscente dobbiamo effettuare il test del minimo rapporto tra le equazioni (1), (2) e (3).

$$\begin{array}{lllll}
(1) & x_3 & = 4 - x_1 \geq 0 & & x_1 \leq 4 \\
(2) & x_2 & = 6 \geq 0 & & \text{Nessun limite su } x_2 \\
(3) & x_5 & = 6 - 3x_1 \geq 0 & & x_1 \leq 6/3 = 2.
\end{array}$$

Da tale test risulta che la variabile uscente è x_5.

	BFS precedente	Nuova BFS
Variabili di base	$x_2 = 6, x_3 = 4, x_5 = 6$	$x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 =?$
Variabili non di base	$x_1 = 0, x_4 = 0$	$x_4 = 0, x_5 = 0$

Il sistema

$$\begin{array}{lllllllll}
(0) & Z & -3x_1 & & & +\frac{5}{2}x_4 & & = & 30 \\
(1) & & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \\
(2) & & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = & 6 \\
(3) & & 3x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = & 6
\end{array}$$

deve essere trasformato in modo tale che i coefficienti della colonna relativa alla variabile entrante x_1 siano uguali a quelli della colonna relativa alla variabile uscente x_5, quindi bisogna rendere 1 il coefficiente di x_1 nell'equazione

(3) ed eliminare quelli di x_1 dalle equazioni (0) e (1). L'equazione (3) viene divisa per 3 e diventa:

$$(3) \qquad x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 2.$$

Il sistema è diventato

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -3x_1 & & & +\frac{5}{2}x_4 & & = 30 \\[2ex]
(1) & & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\[2ex]
(2) & & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = 6 \\[2ex]
(3) & & x_1 & & & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & = 2.
\end{array}$$

Sottraiamo l'equazione (3) dalla (1):

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & x_1 & +x_3 & & & = & 4 & - \\[2ex]
(3) & x_1 & & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & = & 2 & \\
\hline
(1') & & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 & = & 2 &
\end{array}$$

e sommiamo all'equazione (0) la (3) moltiplicata per 3:

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -3x_1 & +\frac{5}{2}x_4 & & = & 30 & + \\[2ex]
(3) & & 3x_1 & -x_4 & +x_5 & = & 6 & \\
\hline
(0') & Z & & +\frac{3}{2}x_4 & +x_5 & = & 36. &
\end{array}$$

Il sistema è diventato

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & & & +\frac{3}{2}x_4 & +x_5 & = & 36 & \text{Variabile di base } Z \\
(1) & & & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 & = & 2 & \text{Variabile di base } x_3 \\
(2) & & x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 & & = & 6 & \text{Variabile di base } x_2 \\
(3) & x_1 & & & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_5 & = & 2 & \text{Variabile di base } x_1.
\end{array}$$

Dalla (1) segue che $x_3 = 2$ quindi la nuova BFS è $(2, 6, 2, 0, 0)$ da cui si ottiene il valore della funzione obiettivo $Z = 36$ che è ottimo perchè tutti i coefficienti dell'equazione (0)

$$Z = -\frac{3}{2}x_4 - x_5 + 36$$

sono negativi quindi non è possibile trovare nessuna direzione di ulteriore crescita.

2.4.2 Forma tabellare del metodo del simplesso

La forma tabellare del metodo del simplesso consente di organizzare i dati del problema in modo sintetico e avendo in forma compatta tutte le informazioni che consentono di effettuare le iterazioni previste dal metodo. Nella tabella, detta anche tableau, compaiono, riga per riga, i coefficienti di tutte le equazioni del problema, compresa l'equazione (0) (che sarebbe la funzione obiettivo). In ogni colonna sono riportati tutti i coefficienti relativi ad una stessa variabile ed i termini noti b_i. Nella prima colonna è specificata la variabile in base presente nell'equazione riportata nella riga, ovviamente per l'equazione (0) si suppone che la variabile in base sia Z. Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{array}{llll}
\max \ Z = x_1 + 2x_2 + x_3 & & & \\
x_1 \quad +x_2 \quad +3x_3 & \leq & 6 \\
2x_1 \quad +3x_2 \quad +x_3 & \leq & 15 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0. & &
\end{array}$$

Introduciamo le variabili slack x_4 e x_5, cosicchè, in forma aumentata, il sistema algebrico diventa:

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & = 0 \\
(1) & & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & & = 6 \\
(2) & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & = 15,
\end{array}$$

con vincolo di nonnegatività su tutte le variabili. Il tableau iniziale del metodo del simplesso è il seguente

Tableau iniziale

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	6
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	15

Identifichiamo in x_2 la variabile entrante in base, in quanto il coefficiente negativo dell'equazione (0) più grande in modulo è proprio quello di x_2. Evidenziamo la colonna relativa alla variabile entrante in base, che viene detta colonna pivot:

Tableau iniziale

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	6
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	15

A questo punto applichiamo il criterio del minimo rapporto per decidere quale variabile deve uscire dalla base attraverso i seguenti passi:
1. si individuano nella colonna pivot tutti i coefficienti strettamente positivi;
2. si divide il termine noto per tale coefficiente;
3. si identifica il più piccolo tra tali rapporti;
4. la variabile di base corrispondente a tale riga (detta riga pivot) è quella uscente.

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	$\boxed{1}$	3	1	0	$6 \rightarrow 6/1 = 6$
x_5	(2)	0	2	$\boxed{3}$	1	0	1	$15 \rightarrow 15/3 = 5$

Il criterio del minimo rapporto stabilisce che dalla base deve uscire la variabile x_5. Evidenziamo tutti i coefficienti dell'equazione relativa alla riga di x_5:

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	$\boxed{1}$	3	1	0	6
x_5	(2)	0	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{15}$

La variabile entrante x_2 prende il posto, nella prima colonna, della variabile uscente x_5.
Ora la colonna relativa alla variabile entrante in base deve essere resa uguale a quella della variabile uscente. Per rendere unitario l'elemento pivot (cioè 3) dobbiamo dividere l'equazione (2) proprio per questo numero ottenendo i nuovi coefficienti che andranno inseriti nel nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
(2)	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Nella operazioni sul tableau non vengono considerati i coefficienti della colonna relativa a Z perchè rimangono inalterati in tutte le iterazioni.
Adesso si devono azzerare, con opportune combinazioni lineari tra le equazioni, i coefficienti di x_2 nelle equazioni (0) e (1).
Per quello che riguarda il coefficiente 1 nell'equazione (1) si può sottrarre da questa l'equazione (2) che adesso presenta lo stesso coefficiente, ovvero

sommare alla stessa l'equazione (2) moltiplicata per -1:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(1)	1	1	3	1	0	6	+
$-1 \times (2)$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	-5	=
$(1')$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1	

Per quello che riguarda il coefficiente -2 nell'equazione (0) si puo sommare a questa l'equazione (2) moltiplicata per 2:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(0)	-1	-2	-1	0	0	0	+
$2 \times (2)$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10	=
$(0')$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10	

Adesso i valori possono essere riportati nel tableau relativo alla prima iterata del metodo del simplesso.

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10
x_4	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Dobbiamo effettuare un'altra iterazione perchè il test di ottimalità non è verificato in quanto nell'equazione (0) è presente un coefficiente negativo. Variabile entrante è x_3 mentre variabile uscente è x_4 (applicando il test del minimo rapporto).

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10
x_4	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{\frac{8}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Dopo la seconda iterazione abbiamo il seguente tableau, che è stato ottenuto prima moltiplicando l'equazione (1) per 3/8:

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i \\ (1) & \frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8}, \end{array}$$

poi sommando all'equazione (2) la (1) moltiplicata per $-1/3$:

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i & \\ (2) & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 5 & + \\ -1/3 \times (1) & -\frac{1}{24} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & = \\ \hline (2') & \frac{5}{8} & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{39}{8} & \end{array}$$

In seguito, per azzerare il coefficiente $-1/3$ dall'equazione (0) sommiamo a quest'ultima l'equazione (1) moltiplicata per $1/3$:

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b_i & \\ (0) & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 10 & + \\ 1/3 \times (1) & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{8} & = \\ \hline (0') & \frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{81}{8} & \end{array}$$

Il tableau del metodo è diventato pertanto

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{81}{8}$
x_3	(1)	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_2	(2)	0	$\frac{5}{8}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{39}{8}$

Siamo arrivati alla soluzione ottima $(0, 39/8, 3/8, 0, 0)$ in cui la funzione obiettivo vale $Z = 81/8$.
Terminiamo questo paragrafo analizzando alcune situazioni che si possono verificare applicando il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare.

Scelta della variabile entrante e di quella uscente

Nell'applicazione del metodo del simplesso potrebbero verificarsi due situazioni:

1. Nell'equazione (0) due, o più, variabili non di base hanno lo stesso coefficiente negativo più piccolo e pertanto possono entrambe entrare in base presentando lo stesso tasso di incremento per la funzione obiettivo;

2. Due, o più quozienti, soddisfano il test del minimo rapporto ovvero, incrementando il valore della variabile entrante in base, ci sono più variabili di base che raggiungeranno simultaneamente il valore zero.

Ci chiediamo come bisogna comportarsi in questo caso e soprattutto se esiste un modo ottimale per scegliere la variabile.
Il secondo caso presenta un aspetto molto delicato in quanto delle variabili che soddisfano il test solo una uscirà dalla base mentre l'altra, o le altre, resteranno in base pur assumendo valore zero nell'iterazione successiva.
In questo caso tali variabili, così come la relativa BFS, sono dette degeneri.
In presenza di BFS degeneri il cambiamento di base può non migliorare il valore della funzione obiettivo poichè il minimo rapporto può essere uguale a zero anche nelle iterazioni successive pertanto possono entrare in base variabili con valore uguale a zero. Una conseguenza di tale situazione è che potrebbe percorrersi ciclicamente (e cioè all'infinito) una sequenza di basi

degeneri associate allo stesso vertice. Questi casi, che in verità non derivano da problemi reali, possono essere evitati applicando alcune regole cosiddette anticiclo che cambiano il criterio per la scelta delle variabili entranti o uscenti dalla base. La più nota è senz'altro la Regola di Bland che impone di scegliere, tra le variabili candidate ad entrare o ad uscire, sempre quella che ha indice minore. È possibile dimostrare che, applicando la regola di Bland, il metodo del simplesso converge sempre in un numero finito di iterazioni.
Anche per quello che riguarda la scelta della variabile entrante in base non c'è alcun modo di sapere, a priori, la scelta migliore, pertanto di solito conviene applicare la regola di Bland anche in questo caso.

Esempio 2.4.1 *Risolvere il seguente problema in forma standard:*

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3} \\
-x_1 & +3x_2 & +4x_3 & \leq\ 18 \\
2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq\ 4 \\
3x_1 & & +2x_3 & \leq\ 8 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.}
\end{array}$$

Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata introducendo tre variabili slack:

$$\begin{array}{lllllllll}
\multicolumn{9}{l}{\max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3} \\
-x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & = & 18 \\
2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = & 4 \\
3x_1 & & +2x_3 & & & +x_6 & = & 8 \\
\multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.}
\end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{lllllllll}
(0) & Z & -5x_1 & -6x_2 & -4x_3 & & & & = & 0 \\
(1) & & -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & = & 18 \\
(2) & & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = & 4 \\
(3) & & 3x_1 & & +2x_3 & & & +x_6 & = & 8
\end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-5	-6	-4	0	0	0	0
x_4	(1)	0	-1	3	4	1	0	0	18
x_5	(2)	0	2	2	1	0	1	0	4
x_6	(3)	0	3	0	2	0	0	1	8

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	1	0	-1	0	3	0	12
x_4	(1)	0	-4	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	12
x_2	(2)	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
x_6	(3)	0	3	0	2	0	0	1	8

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	3	2	0	0	4	0	16
x_4	(1)	0	-9	-5	0	1	-4	0	2
x_3	(2)	0	2	2	1	0	1	0	4
x_6	(3)	0	-1	-4	0	0	-2	1	0

Soluzione è $(0, 0, 4, 2, 0, 0)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$. Osserviamo che la variabile in base x_6 assume valore nullo, pertanto la BFS trovata è degenere.

Nessuna variabile di base uscente-Z illimitata

Questa situazione si verifica quando nel tableau del metodo del simplesso ad un coefficiente negativo dell'equazione (0) corrispondente ad una variabile non di base è associata una colonna di coefficienti tutti nulli o negativi. Questo vuol dire che la variabile entrante può essere incrementata all'infinito senza uscire dalla regione di ammissibilità e lasciando che anche Z può essere aumentata all'infinito, cioè $Z = +\infty$. Una situazione del genere si verifica quando è stato commesso qualche errore nella definizione del modello utilizzato per descrivere il problema reale.
Risolviamo quindi il seguente problema:

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\
\begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +4x_4 & \leq \ 10 \\ 3x_1 & +x_2 & & +5x_4 & \leq \ 6 \end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{array}$$

Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\
\begin{array}{lllllll} 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +4x_4 & +x_5 & & = \ 10 \\ 3x_1 & +5x_2 & & +5x_4 & & +x_6 & = \ 6 \end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{lllllllll}
(0) & Z & -6x_1 & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & & & = \ 0 \\
(1) & & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +4x_4 & +x_5 & & = \ 10 \\
(2) & & 3x_1 & +x_2 & & +5x_4 & & +x_6 & = \ 6
\end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-6	-4	-1	-1	0	0	0
x_5	(1)	0	2	1	-3	4	1	0	10
x_6	(2)	0	3	1	0	5	0	1	6

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	-2	-1	9	0	2	12
x_5	(1)	0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	-3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	6
x_1	(2)	0	1	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	6	0	-1	19	0	4	24
x_5	(1)	0	-1	0	-3	-1	1	-1	4
x_2	(2)	0	3	1	0	5	0	1	6

La variabile x_3 può entrare in base ma non c'è alcuna variabile candidata ad uscire. Quindi la funzione obiettivo è illimitata e risulta $Z = +\infty$.

Il caso di soluzioni ottime multiple

Può verificarsi che un problema ammetta infinite soluzioni tutte ottime (è il caso in cui due vertici adiacenti sono entrambi ottimi e quindi anche il relativo spigolo che li congiunge è costituito da soluzioni ottime). Questo caso si verifica quando il coefficiente di una variabile non di base nell'equazione (0) è uguale a zero e nella colonna ci sono coefficienti positivi relativi a variabili che potrebbero uscire dalla base. Volendo si potrebbe effettuare un'ulteriore iterazione del metodo del simplesso, verificando che la funzione obiettivo non cambia valore, e trovando un altro vertice ammissibile.

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\max \; Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq & 6 \\ x_1 & & +2x_3 & & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo tre variabili slack:

$$\max \; Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & = & 6 \\ x_1 & & +2x_3 & & & & +x_7 & = & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Le equazioni da risolvere sono

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -4x_1 & -5x_2 & -3x_3 & -5x_4 & & & & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & & & = & 12 \\ (2) & & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & = & 6 \\ (3) & & x_1 & & +2x_3 & & & & +x_7 & = & 10. \end{array}$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-4	-5	-3	-5	0	0	0	0
x_5	(1)	0	1	1	1	2	1	0	0	12
x_6	(2)	0	3	2	-1	2	0	1	0	6
x_7	(3)	0	1	0	2	0	0	0	1	10

Iterazione 1										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	15
x_5	(1)	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	9
x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3
x_7	(3)	0	1	0	2	0	0	0	1	10

Iterazione 2										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_5	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	$\frac{7}{4}$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

A questo punto osserviamo che la BFS in forma non aumentata

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{11}{2}, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 0$$

in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 85/2$, soddisfa il test di ottimalità e pertanto è soluzione ottima. Bisogna osservare però che la variabile x_4, nonostante non sia in base, ha coefficiente nullo nell'equazione (0) e che è presente invece una variabile in base, ovvero x_5, che soddisfa il test del minimo rapporto e che potrebbe uscire dalla base. Eseguiamo pertanto un'ulteriore iterazione facendo entrare x_4 ed uscire x_5 :

Iterazione 2										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_5	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	$\frac{7}{4}$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

Iterazione 3										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_4	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	3	1	0	0	-1	1	1	4
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

Anche la BFS

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = \frac{3}{2}$$

in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 85/2$, soddisfa il test di ottimalità, pertanto estistendo due vertici ottimi significa che tutti i punti che appartengono allo spigolo che li congiunge sono soluzione ottima.

2.5 Problemi di programmazione lineare in forma non standard

Ricordiamo che un problema di programmazione lineare in forma standard ha le seguenti proprietà:

1. funzione obiettivo da massimizzare;

2. vincoli di tipo $\leq$ e termini noti positivi;

3. nonnegatività delle variabili decisionali.

Esamineremo nei paragrafi successivi come si risolvono i problemi in cui una (o più) delle proprietà elencate viene meno. In alcuni casi è possibile ricondurre il problema alla forma standard, utilizzando degli opportuni cambi di variabile, in altri invece ciò non è possibile.
Infatti in alcuni problemi in forma non standard l'origine non è un vertice ammissibile e quindi manca una soluzione basica ammissibile iniziale per poter innescare il metodo del simplesso. Inoltre nei problemi con vincoli di uguaglianza non è possibile introdurre le variabili slack, e quindi sceglierle come variabili di base. In questi casi l'approccio utilizzato è l'introduzione delle cosidette variabili artificiali, che definiscono un vero e proprio problema artificiale e che viene risolto per ottenere, se esiste, la soluzione basica ammissibile.
Analizziamo ora i diversi modi di affrontare il problema in base alle possibili difformità del problema rispetto alla forma standard.

Termini noti negativi

Se uno dei termini noti è negativo allora l'intero vincolo può essere moltiplicato per -1, quindi

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

diventa

$$-x_1 + x_2 \geq 1.$$

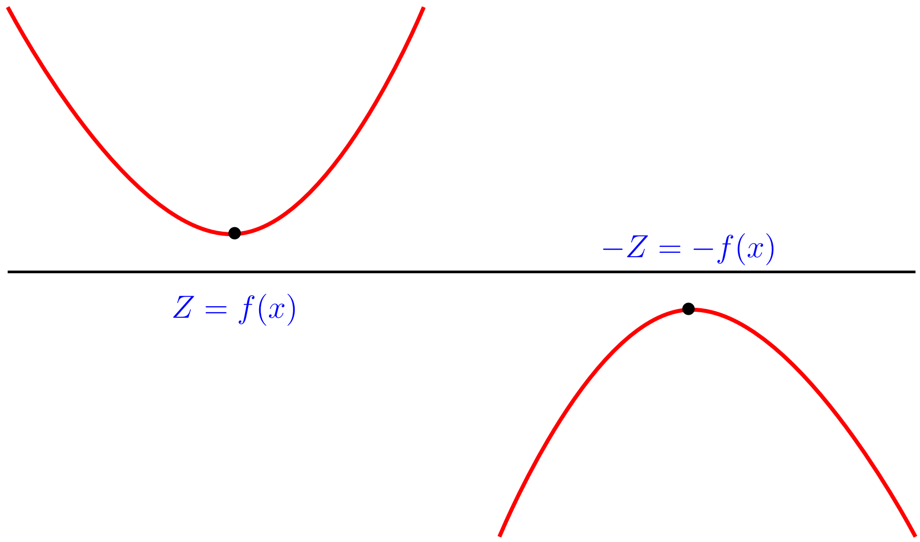
Considereremo come si tratta il vincolo funzionale nella forma $\geq$ nei successivi paragrafi, adesso analizziamo il caso di un vincolo di uguaglianza. D'ora in poi si continuerà a supporre che il termine noto di un vincolo sia sempre positivo (oppure nullo) e a considerare i vincoli in modo tale che rispettino sempre questa proprietà.

Minimizzazione della funzione obiettivo

Quando il problema da risolvere è la minimizzazione della funzione obiettivo può essere trasformato in forma standard facendolo diventare di massimo. Infatti il punto in cui viene assunto il valore minimo di una funzione coincide con quello in cui viene raggiunto il massimo dalla medesima funzione ma con il segno cambiato. Quindi

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \max\ -Z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

ed applicare il metodo del simplesso a tale funzione obiettivo. Si deve poi considerare che, una volta trovato il valore massimo di tale funzione obiettivo, per ottenere il valore del minimo voluto si dovrà cambiare il suo segno.



Variabili senza un esplicito limite inferiore

Se il vincolo di nonnegatività fosse sostituito dal seguente

$$x_j \leq 0$$

allora basterebbe porre

$$x'_j = -x_j \geq 0,$$

effettuare il cambio di variabile $x_j = -x'_j$ nella funzione obiettivo e nei vincoli, ed applicare il metodo del simplesso.
Se la variabile x_j non ha un esplicito limite inferiore, ovvero il vincolo

$$x_j \in \mathbb{R}$$

sostituisce quello di nonnegatività $x_j \geq 0$, allora è necessario sostituire ad x_j la differenza tra due nuove variabili nonnegative, ponendo

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Ogni BFS per la nuova forma del modello ha la proprietà che $x_j^+ = 0$ oppure $x_j^- = 0$ (oppure possono essere entrambe nulle). Nella soluzione ottenuta con il metodo del simplesso si ha:

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j & \text{se } x_j \geq 0; \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad x_j^- = \begin{cases} |x_j| & \text{se } x_j \leq 0; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per esempio nel problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{llll} \max \ Z = 3x_1 + x_2 - 4x_3 & & & \\ 2x_1 \ +x_2 \ -x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 \ +2x_2 \ +3x_3 & \leq & 9 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R} & & \end{array}$$

poniamo

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-, \qquad x_3^+, x_3^- \geq 0$$

e scriviamo il problema in forma aumentata introducendo due variabili slack:

$$\begin{array}{llllllll} \max \ Z = 3x_1 + x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- & & & & & & & \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3^+ & +x_3^- & +x_4 & & = & 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -3x_3^- & & +x_5 & = & 9 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0. & & & & & & & \end{array}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{lllllllll} (0) & Z & -3x_1 & -x_2 & +4x_3^+ & -4x_3^- & & & = 0 \\ (1) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_3^- & +x_4 & & = 4 \\ (2) & & 2x_1 & +2x_2 & +3x_3^+ & -3x_3^- & & +x_5 & = 9 \end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-3	-1	4	-4	0	0	0
x_4	(1)	0	2	1	-1	1	1	0	4
x_5	(2)	0	2	2	3	-3	0	1	9

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	5	3	0	0	4	0	16
x_3^-	(1)	0	2	1	-1	1	1	0	4
x_5	(2)	0	8	5	0	0	3	1	21

La soluzione è $x_1 = x_2 = x_3^+ = 0$, $x_3^- = 4$ da cui segue

$$x_3 = -4$$

e quindi la BFS è $(0, 0, -4)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$.
Questa tecnica ha lo svantaggio di incrementare il numero di variabili decisionali rispetto al problema originale. Infatti se nessuna variabile avesse limite inferiore il loro numero raddoppierebbe. Questo approccio può essere modificato in modo tale da aggiungere solo una variabile decisionale al modello. Infatti ad ogni variabile non limitata inferiormente si può sostituire

$$x_j = x'_j - x'', \qquad x'_j, x'' \geq 0,$$

in cui x'' rappresenta sempre la stessa variabile. L'interpretazione di x'' in questo caso è che $-x''$ rappresenta il valore attuale della più grande (in termini assoluti) variabile originale negativa, cosicchè x'_j rappresenta di quanto x_j eccede tale valore.

Variabili definite in un intervallo

Supponiamo che, per una variabile x_j, sia definito il seguente vincolo

$$l_j \leq x_j \leq L_j, \qquad l_j < L_j.$$

Sottraendo il valore l_j dalle disequazioni si ottiene

$$0 \leq x_j - l_j \leq L_j - l_j.$$

Introducendo una nuova variabile

$$x'_j = x_j - l_j,$$

il vincolo

$$x'_j \leq L_j - l_j$$

viene considerato come un vincolo funzionale mentre il limite inferiore

$$x'_j = x_j - l_j \geq 0,$$

diviene il conseuto vincolo di nonnegatività. Pertanto si effettua il seguente cambio di variabile

$$x_j = x'_j + l_j$$

in ogni equazione del problema. Per esempio, nel seguente problema:

$$\begin{array}{llll}
\max\ Z = 3x_1 + 5x_2 & & & \\
x_1 & & \leq & 4 \\
& 2x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \\
x_1 \geq -10, x_2 \geq 1. & & &
\end{array}$$

Definiamo le variabili

$$x'_1 = x_1 + 10, \qquad x'_2 = x_2 - 1, \qquad x'_1, x'_2 \geq 0,$$

cosicchè

$$x_1 = x'_1 - 10, \qquad x_2 = x'_2 + 1$$

ed il problema diventa

$$\begin{array}{ll}
\max\ Z = 3(x'_1 - 10) + 5(x'_2 + 1) & \\
x'_1 - 10 & \leq 4 \\
2(x'_2 + 1) & \leq 12 \\
3(x'_1 - 10) + 2(x'_2 + 1) & \leq 18 \\
x'_1, x'_2 \geq 0 &
\end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{llll}
\max\ Z = 3x'_1 + 5x'_2 - 25 & & & \\
x'_1 & & \leq & 14 \\
& 2x'_2 & \leq & 10 \\
3x'_1 + & 2x'_2 & \leq & 46 \\
x'_1, x'_2 \geq 0. & & &
\end{array}$$

2.6 Il metodo del simplesso a due fasi

In questo paragrafo saranno analizzati gli ultimi due casi di problemi in forma non standard, ovvero il caso in cui il vincolo sia di uguaglianza oppure il caso di vincolo tipo $\geq$. Per ora consideriamo il primo caso. Le difficoltà nella risoluzione del problema sono

1. l'origine non è (nella gran parte dei casi) un vertice ammissibile quindi il metodo del simplesso non è applicabile in quanto manca la BFS iniziale da cui iniziare l'esplorazione dei vertici ammissibili;

2. non è possibile introdurre le variabili slack da usare come variabili in base in quanto il vincolo si presenta già come un'equazione.

Tali problemi vengono risolti utilizzando una versione modificata del metodo del simplesso, detta metodo del simplesso a due fasi. Il nome deriva dal fatto che, in una prima fase, viene determinata la BFS iniziale, se esiste, mentre nella seconda viene risolto il problema partendo proprio da tale BFS. Sostanzialmente nelle due fasi vengono definiti (e risolti) due diversi problemi. Iniziamo considerando il caso di un vincolo di uguaglianza. Sia assegnato il seguente problema:

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ \begin{array}{cccll} x_1 & +5x_2 & -x_3 & \leq & 4 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 6 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile slack:

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ \begin{array}{ccccll} x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 4 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & 6 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array} \tag{2.3}$$

Appare ovvio che nel sistema manca una variabile in base, pertanto è necessario introdurne una modificando artificialmente il problema:

$$\begin{array}{l} \max\ Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ \begin{array}{cccccll} x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 4 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = & 6 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5 \geq 0. \end{array} \tag{2.4}$$

La variabile $\overline{x}_5$, detta appunto variabile artificiale, viene indicata in modo diverso in quanto deve assumere valore zero in qualsiasi BFS ammissibile del problema (2.3). Il problema definito nella prima fase del metodo deve essere tale che la sua soluzione abbia tutte le variabili artificiali (in questo caso $\overline{x}_5$) uguali a zero, quindi:

$$\begin{array}{llllll} \multicolumn{6}{l}{\text{I Fase}} \\ \multicolumn{6}{l}{\max\ Z = -\overline{x}_5} \\ x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = 6 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5 \geq 0.} \end{array}$$

In generale se il problema è di massimo si sceglie come funzione obiettivo

$$Z = -\sum \quad \text{variabili artificiali}$$

ovvero tale che $Z \leq 0$ ed assuma valore massimo (nullo) proprio quando le variabili artificiali introdotte sono tutte uguali a zero.
Nella seconda fase, avendo già una BFS ammissibile, calcolata nella prima fase, non è necessario l'uso di alcuna variabile artificiale, pertanto possiamo applicare il metodo del simplesso alla funzione obiettivo del problema di partenza:

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{\text{II Fase}} \\ \multicolumn{5}{l}{\max\ Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3} \\ x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = 6 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono x_4 e $\overline{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0, 0, 0, 4, 6)$. Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{lllllllll} (0) & Z & & & & & +\overline{x}_5 & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 4 \\ (2) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = & 6. \end{array}$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando il coefficiente della variabile di base $\overline{x}_5$ dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{lllllllll} (0) & Z & -x_1 & -2x_2 & -3x_3 & & & = & -6 \\ (1) & & x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & 4 \\ (2) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = & 6. \end{array}$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-3	0	0	-6
x_4	(1)	0	1	5	$\boxed{-1}$	1	0	4
$\overline{x}_5$	(2)	0	1	2	$\boxed{3}$	0	1	6

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	0	1	0
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	2

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima della I fase in cui il valore della funzione obiettivo è 0 (come era atteso), la BFS $(0, 0, 2)$ è quella iniziale per la II fase. Terminata la prima fase del metodo del simplesso, prima di procedere alla successiva, si devono effettuare alcune operazioni sul tableau che è stato ottenuto. Innanzitutto devono essere eliminate le colonne relative alle variabili artificiali, inoltre deve essere sostituita la funzione obiettivo ed infine il problema deve essere posto in forma canonica (cioè devono essere azzerati i coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili in base), quindi eliminiamo la colonna relativa alla variabile $\overline{x}_5$ e sostituiamo l'equazione (0):

$$(0) \qquad Z \quad -5x_1 \quad -x_2 \quad -6x_3 \qquad = \quad 0$$

Tableau finale I Fase con funzione obiettivo II Fase							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	-5	-1	-6	0	0
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	1	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	2

A questo punto si elimina il coefficiente della variabile di base x_3 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	-3	3	0	0	12
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$	0	1	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	2

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	0	15	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{51}{2}$
x_1	(1)	0	1	4	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}$
x_3	(2)	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(9/2, 0, 1/2)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 51/2$.

Esempio 2.6.1 *Applicare il metodo del simplesso adue fasi per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\begin{array}{llll} \max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 & & & \\ 2x_1 \ \ +x_2 & & = & 4 \\ x_1 \ \ +3x_2 & +3x_3 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & & \end{array}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile artificiale in ogni vincolo di uguaglianza:

$$\begin{array}{llllll} \max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 & & & & & \\ x_1 \ \ +x_2 & & +\overline{x}_4 & & = & 4 \\ x_1 \ \ +3x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0. & & & & & \end{array} \tag{2.5}$$

Scriviamo ora i problemi da risolvere nelle due fasi:

$$
\begin{array}{l}
\text{I Fase}\\
\max\ Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_5\\
\begin{array}{cccccl}
x_1 & +x_2 & & +\overline{x}_4 & & = 4\\
x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = 8
\end{array}\\
x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{II Fase}\\
\max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3\\
\begin{array}{cccl}
2x_1 & +x_2 & & = 4\\
x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 8
\end{array}\\
x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono $\overline{x}_4$ e $\overline{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0,0,0,4,8)$. Le equazioni della I fase sono

$$
\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & & & & +\overline{x}_4 & +\overline{x}_5 & = 0\\
(1) & & x_1 & +x_2 & & +\overline{x}_4 & & = 4\\
(2) & & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = 8.
\end{array}
$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando i coefficienti delle variabili artificiali dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0) le equazioni (1) e (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$
\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -3x_1 & -4x_2 & -3x_3 & & & = -12\\
(1) & & x_1 & +x_2 & & +\overline{x}_4 & & = 4\\
(2) & & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +\overline{x}_5 & = 8.
\end{array}
$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-3	-4	-3	0	0	-12
$\overline{x}_4$	(1)	0	2	1	0	1	0	4
$\overline{x}_5$	(2)	0	1	3	3	0	1	8

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$\overline{x}_4$	(1)	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	0	-1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	(2)	0	$\frac{1}{3}$	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima della I fase in cui il valore della funzione obiettivo è 0 (come era atteso), la BFS $(4/5, 12/5, 0)$ è quella iniziale per la II fase. Per risolvere la seconda eliminiamo dal tableau le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo la funzione obiettivo scrivendo la nuova l'equazione (0):

$$(0) \qquad Z \quad -4x_1 \quad -2x_2 \quad -x_3 \quad = \quad 0$$

Tableau I Fase con funzione obiettivo II Fase

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	-4	-2	-1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$

A questo punto si eliminano i coefficienti delle variabile di base x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	0	-1	8
x_1	(1)	0	1	0	$\boxed{-\frac{3}{5}}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\boxed{\frac{6}{5}}$	$\boxed{\frac{12}{5}}$

Iterazione 1						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	$\frac{5}{6}$	0	10
x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	(2)	0	0	$\frac{5}{6}$	1	2

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(2, 0, 2)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 10$.

Vincoli funzionali nella forma $\geq$

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\begin{array}{rrrcl}
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & \geq & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & \leq & 10
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Il primo vincolo viene modificato in uno di uguaglianza definendo la variabile x_4, detta variabile surplus, posta uguale a:

$$x_4 = x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 6, \qquad x_4 \geq 0.$$

In questo modo il vincolo diventa l'uguaglianza

$$x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 6$$

ed è necessario aggiungere un'ulteriore variabile artificiale $\overline{x}_5$ poichè x_4 non può essere usata come variabile di base perchè nell'equazione ha coefficiente

-1 mentre la forma canonica del problema prevede che le variabili in base debbano avere necessariamente coefficiente 1. Nel secondo vincolo è necessario aggiungere la usuale variabile slack. Il problema nella forma aumentata è il seguente:

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & = & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5, x_6 \geq 0.
\end{array}$$

Obiettivo della prima fase del metodo è:

$$\text{Massimizzare } Z = -\overline{x}_5$$

fino ad ottenere $\overline{x}_5 = 0$. Nella seconda fase invece si vuole

$$\text{Massimizzare } Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

con $\overline{x}_5 = 0$. La soluzione ottima della prima fase viene utilizzata come BFS iniziale per la seconda.
Riscriviamo ora i problemi che devono essere risolti nelle due fasi.

I Fase:

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = -\overline{x}_5 \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & = & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_5, x_6 \geq 0,
\end{array}$$

II Fase

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & & = & 6 \\
2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & +x_6 & = & 10
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 \geq 0.
\end{array}$$

Le equazioni della prima fase sono

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0) & Z & & & & & +\overline{x}_5 & & = & 0 \\
(1) & & x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & = & 6 \\
(2) & & 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10
\end{array}$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +x_4 & & & = & -6 \\
(1) & & x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\overline{x}_5 & & = & 6 \\
(2) & & 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10.
\end{array}$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	b_i
Z	(0)	1	-1	-3	6	1	0	0	-6
$\overline{x}_5$	(1)	0	1	3	-6	-1	1	0	6
x_6	(2)	0	2	-1	5	0	0	1	10

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{x}_5$	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	0	1	0	0
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	12

Eliminiamo ora la colonna relativa alle variabile artificiale $\overline{x}_5$ e sostituiamo la funzione obiettivo:

Tableau iniziale II Fase								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	-1	-4	-3	0	0	0
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	1	12

A questo punto, per rendere il tableau in forma canonica, eliminiamo il coefficiente di x_2 dall'equazione (0), moltiplicando l'equazione (1) per 4 e sommandola, appunto, all'equazione (0);

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	-11	$-\frac{4}{3}$	0	8
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	1	12

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	$\frac{80}{9}$	0	0	$-\frac{23}{9}$	$\frac{11}{3}$	52
x_2	(1)	0	$\frac{17}{9}$	1	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	10
x_3	(2)	0	$\frac{7}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	4

Poichè la variabile x_4 può entrare in base ma nessuna variabile soddisfa il test del minimo rapporto, la funzione è illimitata, quindi il problema non ammette soluzione e

$$Z = +\infty.$$

Il metodo del simplesso a due fasi per problemi di minimo

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema di minimo:

$$\begin{array}{llll} \min\ Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & \\ x_1 \qquad\quad +3x_3 & = & 6 \\ x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 & \geq & 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. & & \end{array}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile surplus e due variabili artificiali:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\min\ Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3} \\
x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 6 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & +\overline{x}_6 & = & 4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6 \geq 0.}
\end{array}
$$

Il problema che definisce la prima fase del metodo a due fasi deve essere tale che la sua soluzione abbia tutte le variabili artificiali (in questo caso $\overline{x}_4$ e $\overline{x}_6$) uguali a zero, quindi:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\text{I Fase}} \\
\multicolumn{8}{l}{\min\ Z = \overline{x}_4 + \overline{x}_6} \\
x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 6 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \overline{x}_6 & = & 4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6 \geq 0.}
\end{array}
$$

In generale se il problema è di minimo si sceglie come funzione obiettivo

$$
Z = \sum \quad \text{variabili artificiali}
$$

ovvero tale che $Z \geq 0$ ed assuma valore minimo (nullo) proprio quando le variabili artificiali introdotte sono tutte uguali a zero.
Nella seconda fase si può applicare il metodo del simplesso alla funzione obiettivo del problema di partenza:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\text{II Fase}} \\
\multicolumn{6}{l}{\min\ Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3} \\
\\
x_1 & & +3x_3 & & = & 6 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_5 & = & 4 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0.}
\end{array}
$$

Poichè il problema è di minimo dobbiamo trasformarlo in un problema di massimo cambiando il segno ai due membri della funzione obiettivo in entrambi i problemi:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\text{I Fase}} \\
\multicolumn{8}{l}{\max\ -Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_6} \\
x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & & = & 6 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \overline{x}_6 & = & 4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, x_5, \overline{x}_6 \geq 0.}
\end{array}
$$

II Fase

$$\max\ -Z = -x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +3x_3 & & = 6 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_5 & = 4 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0.$

Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{llllllll} (0) & -Z & & & & +\overline{x}_4 & & +\overline{x}_6 = 0 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \overline{x}_6 = 4. \end{array}$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & -Z & -x_1 & & -3x_3 & & & +\overline{x}_6 = -6 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \overline{x}_6 = 4 \end{array}$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo la nuova equazione:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & -Z & -2x_1 & -x_2 & -4x_3 & & & = -10 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \overline{x}_6 = 4. \end{array}$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	-2	-1	-4	0	1	0	-10
$\overline{x}_4$	(1)	0	1	0	3	1	0	0	6
$\overline{x}_6$	(2)	0	1	1	1	0	-1	1	4

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{4}{3}$	1	0	-2
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	$\boxed{0}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
$\overline{x}_6$	(2)	0	$\frac{2}{3}$	$\boxed{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	x_5	$\overline{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

Ora eliminiamo dal tableau finale della I fase le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo i coefficienti dell'equazione obiettivo della II fase:

Tableau II Fase							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	1	5	4	0	0
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	2

II Fase-Eliminaz. coeff. Equazione (0)							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{7}{3}$	0	4	5	-10
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	2

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{11}{3}$	0	0	5	-18
x_3	(1)	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	1	0	-1	2

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{11}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-7
x_3	(1)	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1
x_1	(2)	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\boxed{-\frac{3}{2}}$	3

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	5	1	0	-6
x_5	(1)	0	0	-1	2	1	2
x_1	(2)	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	6

La BFS ottima è $(6, 0, 0, 2)$ mentre il valore minimo della funzione obiettivo è:

$$Z = 6.$$

Soluzioni non ammissibili

Nel metodo del simplesso il problema fondamentale è l'identificazione di una BFS iniziale quando una soluzione semplice non è disponibile. L'uso di variabili artificiali consente di trasformare il problema in uno artificiale e la stessa tecnica consente di ottenere una BFS iniziale per tale problema. Il metodo del simplesso a due fasi consente di ottenere una soluzione ottima

partendo dalla BFS iniziale del problema artificiale. Tale tecnica tuttavia contiene una possibile minaccia. Infatti potrebbe essere difficile trovare una soluzione ammissibile perchè non ce ne sono, ciò nonostante, trasformando il problema e applicando il metodo del simplesso, questo trova una soluzione apparentemente ottima. Esiste un modo per verificare quando tale situazione si verifica: infatti se il problema originale non ha soluzioni ammissibili, allora la prima fase del metodo del simplesso a due fasi fornisce una soluzione finale in cui almeno una variabile artificiale è in base ed assume un valore maggiore di zero.
Consideriamo per esempio il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{llll} \max\ Z = 6x_1 + x_2 & & & \\ x_1 & +x_2 & \geq & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & = & 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

e scriviamo direttamente il problema artificiale

$$\begin{array}{lllllll} \max\ Z = 6x_1 + x_2 & & & & & & \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +\overline{x}_4 & & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & & & +\overline{x}_5 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

L'applicazione del metodo del simplesso a due fasi implica la risoluzione dei seguenti problemi:

$$\begin{array}{lllllll} \text{I Fase} & & & & & & \\ \max\ Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_5 & & & & & & \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +\overline{x}_4 & & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & & & +\overline{x}_5 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0; & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{II Fase} & & & & \\ \max\ Z = 6x_1 + x_2 & & & & \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Le equazioni della prima fase sono:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & & & & +\overline{x}_4 & +\overline{x}_4 & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +x_2 & -x_3 & +\overline{x}_4 & & = & 5 \\ (2) & & 2x_1 & +x_2 & & & +\overline{x}_5 & = & 2 \end{array}$$

Trasformiamo il problema della prima fase in forma canonica eliminando dalla funzione obiettivo i coefficienti delle variabili di base $\overline{x}_4$ e $\overline{x}_5$. Prima sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (1)

$$\begin{array}{ccccccc}
Z & & & & +\overline{x}_4 & +\overline{x}_5 & = & 0 \\
 & -x_1 & -x_2 & +x_3 & -\overline{x}_4 & & = & -5 \\
\hline
Z & -x_1 & -x_2 & +x_3 & & +\overline{x}_5 & = & -5.
\end{array}$$

Poi sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (2)

$$\begin{array}{cccccccc}
Z & -x_1 & -x_2 & +x_3 & +\overline{x}_5 & = & -5 \\
 & -2x_1 & -x_2 & & -\overline{x}_5 & = & -2 \\
\hline
Z & -3x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -7.
\end{array}$$

Applichiamo il metodo del simplesso al problema definito nella prima fase:

			Iterazione 0					
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-3	-2	1	0	0	-7
$\overline{x}_4$	(1)	0	1	1	-1	1	0	5
$\overline{x}_5$	(2)	0	2	1	0	0	1	2

			Iterazione 1					
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	-4
$\overline{x}_4$	(1)	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	4
x_1	(2)	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	1	0	1	2	2	-3
$\overline{x}_4$	(1)	0	-1	0	-1	-1	-1	3
x_2	(2)	0	2	1	0	1	1	2

Il test di ottimalità è verificato quindi il metodo ha trovato (apparentemente) la soluzione per il problema definito nella prima fase, soluzione ottima che è $(0, 2, 0, 3, 0)$. Tuttavia La variabile artificiale $\overline{x}_4$ è rimasta in base e questo vuol dire che il problema di partenza non ammette alcuna soluzione ammissibile e quindi neanche quella ottima.

Variabile artificiale in base con valore nullo

In determinati esercizi può capitare che al termine della prima fase sia presente in base una variabile artificiale che assume valore zero. Ovvero la situazione è schematizzata nel seguente tableau:

	Eq.	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$\dots$	$\overline{x}_h$	$\dots$	b_i
Z		$\overline{c}_1$	$\dots$	$\overline{c}_j$	$\dots$	$\overline{c}_n$	$\dots$	0	$\dots$	0
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\overline{x}_h$		$\overline{a}_{i1}$	$\dots$	$\overline{a}_{ij}$	$\dots$	$\overline{a}_{in}$	$\dots$	1	$\dots$	0
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$

Quindi, la riga i del tableau è relativa ad una variabile artificiale in base di valore 0. A questo punto, basta effettuare un'operazione di pivot sulla riga i in corrispondenza di una qualsiasi colonna j tale che $\overline{a}_{ij}$ sia diverso da zero. La variabile artificiale $\overline{x}_h$ lascia la base e il suo posto è preso da x_j. Si noti che si può effettuare l'operazione di pivot anche su un elemento $\overline{a}_{ij} < 0$: sostanzialmente i valori delle variabili non cambiano poichè x_j entra in base assumendo valore 0 e pertanto la soluzione rimane ammissibile. Si passa cioè da una soluzione degenere ad un'altra che rappresenta lo stesso punto nello spazio e quindi la stessa soluzione. Se non dovesse esistere nessun $\overline{a}_{ij} \neq 0$ in corrispondenza della riga i e delle colonne delle variabili decisionali allora questo vuol dire che la riga i della matrice A ed il relativo termine noto sono stati trasformati, con operazioni elementari tra righe, in una riga nulla. Ciò equivale a dire che il vincolo i-esimo del sistema è ridondante e può pertanto essere eliminato. Quindi, nel caso $\overline{a}_{ij} = 0$ per ogni j, si può eliminare la riga i avendo una variabile di base in meno e quindi togliendo $\overline{x}_h$ dalla base senza sostituirla con nessuna altra variabile.

Esempio 2.6.2 *Applicare il metodo del simplesso adue fasi per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3} \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = \ 4 \\
2x_1 & +x_2 & -x_3 & = \ 8 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.}
\end{array}
$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile artificiale in ogni vincolo di uguaglianza:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3} \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = \ 4 \\
2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\overline{x}_5 & = \ 8 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0.}
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Scriviamo ora i problemi da risolvere nelle due fasi:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{\text{I Fase}} \\
\multicolumn{6}{l}{\max\ Z = -\overline{x}_4 - \overline{x}_5} \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = \ 4 \\
2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\overline{x}_5 & = \ 8 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5 \geq 0.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\text{II Fase}} \\
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3} \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = \ 4 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & = \ 8 \\
\multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.}
\end{array}
$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono $\overline{x}_4$ e $\overline{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0, 0, 0, 4, 8)$. Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & & & & +\overline{x}_4 & +\overline{x}_5 & = 0 \\
(1) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = 4 \\
(2) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\overline{x}_5 & = 8.
\end{array}$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando i coefficienti delle variabili artificiali dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0) le equazioni (1) e (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & & & = -12 \\
(1) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\overline{x}_4 & & = 4 \\
(2) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\overline{x}_5 & = 8.
\end{array}$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	−3	−3	−2	0	0	−12
$\overline{x}_4$	(1)	0	1	2	3	1	0	4
$\overline{x}_5$	(2)	0	2	1	−1	0	1	8

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	3	7	3	0	0
x_1	(1)	0	1	2	3	1	0	4
$\overline{x}_5$	(2)	0	0	−3	−7	−2	1	0

La BFS trovata a questo punto è $(4, 0, 0, 0, 0)$ con variabili in base x_1 e $\overline{x}_5$. Osserviamo che in realtà questa BFS risulta essere ammissibile anche per il problema di partenza quindi l'unico problema è sostituire la variabile artificiale in base con un'altra qualsiasi. Si sceglie quindi di far entrare in base x_2 anche se il suo coefficiente nell'equazione (2) è negativo.

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

Abbiamo ottenuto così la BFS ammissibile $(4, 0, 0)$ che era sostanzialmente la stessa trovata a termine della prima iterazione. Per risolvere la seconda fase, al solito, eliminiamo dal tableau le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo la funzione obiettivo scrivendo la nuova l'equazione (0):

$$(0) \qquad Z \quad -4x_1 \quad -2x_2 \quad -3x_3 \quad = \quad 0$$

Tableau I Fase con funzione obiettivo II Fase						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	-4	-2	-3	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{7}{3}$	0

A questo punto si eliminano i coefficienti delle variabile di base x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	0	-5	16
x_1	(1)	0	1	0	$\boxed{-\frac{5}{3}}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\boxed{\frac{7}{3}}$	0

Iterazione 1						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	$\frac{15}{7}$	0	16
x_1	(1)	0	1	$\frac{5}{7}$	0	4
x_3	(2)	0	0	$\frac{3}{7}$	1	0

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(4, 0, 0)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$.
Riepiloghiamo a questo punto i possibili scenari che si possono presentare al termine della prima fase:

1. Tutte le variabili artificiali sono fuori dalla base, quindi si procede alla risoluzione della seconda fase;

2. Almeno una variabile artificiale è rimasta in base con valore diverso da zero, in questo caso si conclude che il problema non ammette soluzione in quanto la regione ammissibile è l'insieme vuoto:

3. Una variabile artificiale resta in base con valore nullo, in questo caso si procede ad un'ulteriore iterazione facendo entrare in base un'altra variabile purchè abbia coefficiente diverso da zero nell'equazione associata alla variabile artificiale in base. Subito dopo si passa alla risoluzione della seconda fase.

2.7 Analisi Postottimale

I problemi di programmazione lineare sono modelli matematici che descrivono casi reali e la cui soluzione deve fornire utili informazioni per poter migliorare processi di produzione oppure ottenere un aumento degli utili a parità di risorse. Il processo che è stato brevemente accennato nel primo capitolo prevede che siano effettuati una serie di passi che possono essere riassunti nel seguente elenco:
1. Definizione del problema e raccolta dati;
2. Formulazione del modello matematico;
3. Sviluppo di un metodo per determinare la soluzione del modello;
4. Test del modello ed eventuali variazioni del modello.

Le fasi 2, 3 e 4 devono essere viste come se fossero inserite in un ciclo che prevede che il modello matematico sia soggetto ad una serie di raffinamenti successivi che lo rendano il più aderente possibile alla realtà in modo tale che le sue soluzioni coincidano con quelle reali. In questi paragrafi saranno descritte alcune informazioni che si possono estrarre applicando il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare nell'ottica di effettuare variazioni al modello matematico in esame.

2.7.1 Prezzi ombra

I problemi di programmazione lineare sono la formulazione matematica di modelli di situazioni reali che richiedono un'opportuna sperimentazione per poter arrivare alla definizione finale del problema che tenga conto correttamente di tutti i parametri reali e che fornisca, una volta risolto, la soluzione ottima del caso pratico. Tale periodo sperimentale significa che spesso sarà necessario risolvere un problema, valutare i risultati, verificare l'aderenza di questi al caso reale, modificare opportunamente il modello e ripetere lo stesso procedimento finchè i risultati sono quelli attesi. Appare chiaro che tale processo richiede la risoluzione di una serie di problemi matematici che spesso hanno dimensioni molto elevate e sono molto simili tra loro. Pertando risulta molto conveniente valutare, spesso a posteriori, come varia la soluzione di un problema di programmazione lineare al variare di alcuni parametri. Le cause che richiedono tale analisi a posteriori possono essere, tra le altre, le seguenti:

1. Debugging del modello (cioè trovare eventuali debolezze o errori nel modello)

2. Validazione del modello (cioè verificare se i risultati sono aderenti alla realtà)

3. Decisioni del management sull'allocazione delle risorse (prezzi ombra)

4. Valutazione delle stime dei parametri del modello.

Un approccio molto utilizzato per affrontare questi problemi è quello della cosiddetta Riottimizzazione, che consiste nel dedurre come le variazioni nella definizione del modello influenzano il risultato ottenuto. Se si risolve il problema di programmazione lineare utilizzando il metodo del simplesso allora si può cercare di dedurre la variazione nella soluzione ottima studiando il tablaeu finale oppure utilizzando la soluzione ottima del modello precedente

come BFS iniziale per quello modificato (purchè risulti ancora ammissibile).
Un classico problema di programmazione lineare prevede la risoluzione del problema di massimo

$$\max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

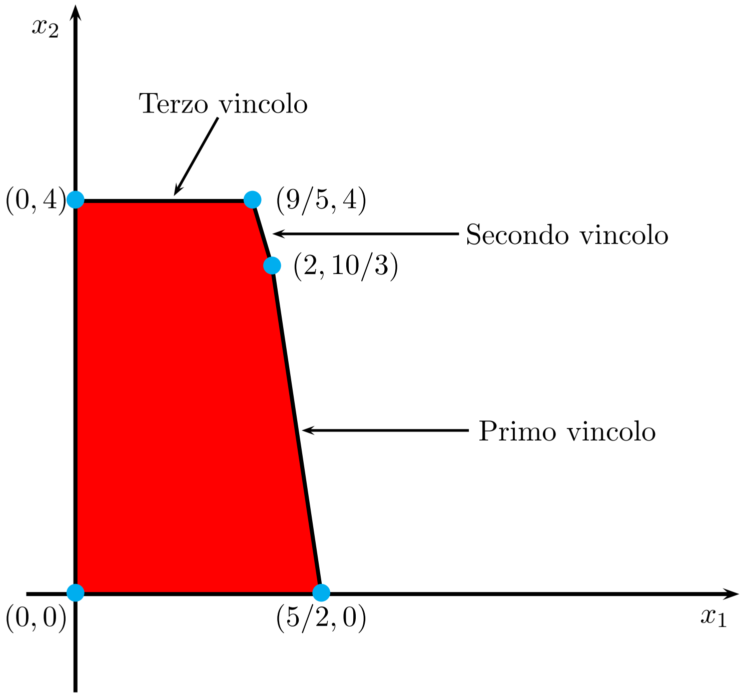
che può essere interpretato come la volontà di rendere massimo il profitto Z, in funzione delle quantità x_i (n è il numero di delle merci che vengono prodotte ed x_i è la quantità prodotta, mentre c_i è il profitto della singola unità di merce prodotta). Ovviamente le quantità prodotte devono essere vincolate alle risorse disponibili. Le risorse sono m e, per ognuna di queste, vale il seguente vincolo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

in cui b_i rappresenta la disponibilità della $i-$esima risorsa: per esempio se tale risorsa è una fabbrica oppure il reparto di un'azienda allora b_i può essere il tempo il management aziendale destina affinchè questa risorsa produca ed i valori a_{ij} sono il tempo che tale risorsa usa per produrre la $j-$esima merce. I valori dei parametri appena indicati potrebbero essere soggetti a variazioni poichè potrebbe essere scopo dell'azienda quello di valutare l'opportunità di modificare il loro valore e valutare il conseguente tasso di variazione del profitto.
A questo scopo consideriamo ora il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + x_2 \\
\begin{array}{rrcl}
20x_1 & +3x_2 & \leq & 50 \\
10x_1 & +3x_2 & \leq & 30 \\
 & x_2 & \leq & 4
\end{array} \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{array}$$

Tracciamo ora nel piano (x_1, x_2) la regione ammissibile di tale problema:



Per risolvere il problema calcoliamo il valore della funzione obiettivo nei vertici della regione ammissibile

$$\begin{array}{ll} (0,4) & Z=4 \\[2ex] \left(\dfrac{9}{5},4\right) & Z=\dfrac{29}{5} \\[2ex] \left(2,\dfrac{10}{3}\right) & Z=\dfrac{16}{3}. \end{array}$$

Il vertice $(9/5,4)$ è soluzione ottima in quanto il valore della funzione obiettivo nei suoi vertici adiacenti è inferiore al valore $Z=29/5$. Risolviamo ora lo stesso problema applicando il metodo del simplesso. Introduciamo tre variabili slack (una per ogni vincolo) e risolviamo il problema aumentato:

$$
\begin{array}{l}
\max\ Z = x_1 + x_2 \\
\begin{array}{rrrrrcr}
20x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 50 \\
10x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = & 30 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = & 4
\end{array} \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{array}
$$

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-1	0	0	0	0
x_3	(1)	0	20	3	1	0	0	50
x_4	(2)	0	10	3	0	1	0	30
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	0	0	0	1	4
x_3	(1)	0	20	0	1	0	-3	38
x_4	(2)	0	10	0	0	1	-3	18
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{29}{5}$
x_3	(1)	0	0	0	1	-2	3	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Soluzione ottima, come atteso, in forma aumentata, è:

$$\left(\frac{9}{5}, 4, 2, 0, 0\right)$$

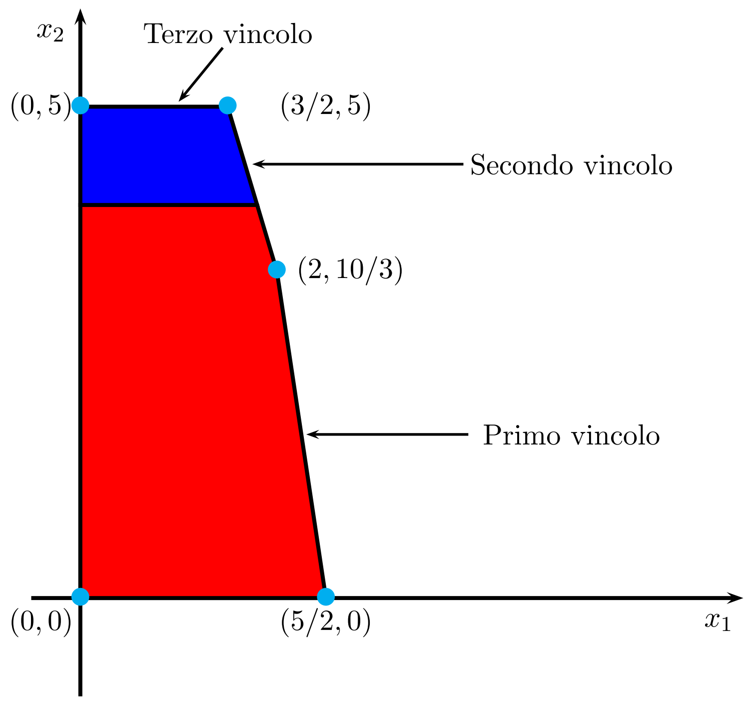
mentre il valore della funzione obiettivo è $Z = 29/5$. Poniamo attenzione ai coefficienti delle variabili slack del tableau finale (evidenziati in rosso) e poniamo

$$y_1^* = 0, \qquad y_2^* = \frac{1}{10}, \qquad y_3^* = \frac{7}{10},$$

e ricordiamo che ogni variabile slack viene associata ad un determinato vincolo.
Risolviamo ora lo stesso problema, cambiando però il termine noto dell'ultimo vincolo, che diventa 5:

$$\begin{array}{llcl}
\max\ Z = x_1 + x_2 & & & \\
\ 20x_1 & +3x_2 & \leq & 50 \\
\ 10x_1 & +3x_2 & \leq & 30 \\
 & x_2 & \leq & 5 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & & &
\end{array}$$

Tracciamo ora nel piano (x_1, x_2) la regione ammissibile di tale problema, evidenziando in blu la parte di tale regione che è stata aggiunta rispetto al problema precedente:



Il nuovo problema aumentato è il seguente:

$$\begin{array}{llllll}
\max \ Z = x_1 + x_2 & & & & & \\
20x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 50 \\
10x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = 30 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = 5 \\
x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4, 5. & & & & &
\end{array}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso, evidenziando in blu le parti di tableau che sono cambiate rispetto al problema precedente.

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-1	0	0	0	0
x_3	(1)	0	20	3	1	0	0	50
x_4	(2)	0	10	3	0	1	0	30
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	0	0	0	1	4
x_3	(1)	0	20	0	1	0	-3	35
x_4	(2)	0	10	0	0	1	-3	15
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{2}$
x_3	(1)	0	0	0	1	-2	3	5
x_1	(2)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Soluzione ottima, come atteso, in forma aumentata, è:

$$\left(\frac{3}{2}, 5, 5, 0, 0\right)$$

mentre il valore della funzione obiettivo è $Z_1 = 13/2$. Calcoliamo ora la differenza tra i valori delle funzioni obiettivo ottenute nei due problemi:

$$\Delta Z = Z_1 - Z = \frac{13}{2} - \frac{29}{5} = \frac{7}{10} = y_3^*.$$

Il valore y_i^* definito in precedenza viene detto prezzo ombra per la risorsa i e misura il valore marginale della risorsa, cioè il tasso di incremento di Z ottenuto aumentando la disponibilità della $i-$esima risorsa. Il metodo del simplesso identifica il prezzo ombra come il valore del coefficiente della $i-$esima variabile slack nell'equazione (0) del tableau finale.
L'analisi dei prezzi ombra può essere fatta anche graficamente quando il problema ha solo due variabili decisionali. Nell'esempio visto in precedenza incrementando il valore di b_3 aumenta il tasso di profitto solo se $b_3 \leq 10$. Aumentando oltre tale valore il valore massimo della funzione obiettivo non cambierà più poichè la soluzione ottima non soddisferà il vincolo sotto forma di uguaglianza (infatti la frontiera del secondo vincolo interseca l'asse x_2 nel punto $(0, 10)$). Dall'analisi del prezzo ombra $y_1^* = 0$ si deduce che un incremento della prima risorsa non cambia la soluzione ottima (infatti questa non soddisfa il primo vincolo in forma di uguaglianza).

Capitolo 3

Problemi di Trasporto e Assegnamento

3.1 Il Problema del Trasporto

Il problema del trasporto è legato, in generale, alla distribuzione di una merce da un gruppo di centri di distribuzione (per esempio alcune fabbriche, magazzini), chiamati nodi sorgente, ad un qualsiasi gruppo di centri di ricezione (per esempio alcuni magazzini, centri di vendita o di distribuzione), detti nodi destinazione, in modo tale da minimizzare il costo totale della distribuzione. Ogni nodo sorgente ha una certa offerta di unità da distribuire ai nodi destinazione e ogni nodo destinazione ha, a sua volta, una specifica domanda che deve essere soddisfatta dai nodi sorgente. Per il problema del trasporto si assume sempre che ogni nodo sorgente ha un'offerta fissa, s_i, $i = 1, \ldots, m$ (se m sono i nodi sorgente), che deve essere interamente inviata ai nodi destinazione. Ugualmente ogni nodo destinazione ha una domanda fissa d_j, $j = 1, \ldots, n$ (se n sono i nodi destinazione), che deve essere soddisfatta dai nodi sorgente. Dal punto di vista teorico l'esistenza di soluzioni ammissibili è legata alla condizione

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Si assume sempre che il costo del trasporto da un nodo sorgente ad un nodo destinazione sia direttamente proporzionale al numero di unità trasportate. Quindi il costo complessivo è pari al prodotto tra il costo unitario ed il numero

di unità trasportate. Si indica con c_{ij} il costo unitario per il trasporto dalla sorgente i alla destinazione j.
Per descrivere il modello vengono introdotte le seguenti variabili decisionali:

x_{ij} = quantità della risorsa inviata dalla sorgente i alla destinazione j.

per $i = 1, \dots, m$, e $j = 1, \dots, n$. Indicando con Z il costo totale, il problema di trasporto può essere formulato come problema di programmazione lineare nel seguente modo:

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

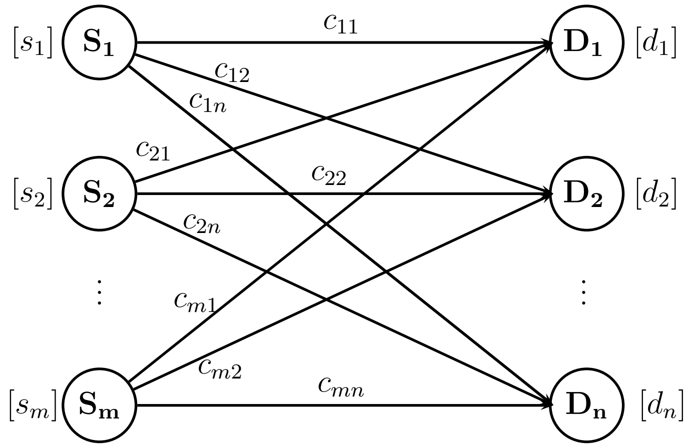
soggetto ai vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Una proprietà di cui gode il problema del trasporto è la cosiddetta interezza delle soluzioni, cioè se i dati del problema (offerte e domande) sono interi allora anche la soluzione ottima (e tutte le BFS ammissibili) lo sono. L'algoritmo che descriveremo nei successivi paragrafi consente di preservare tale proprietà trovando solo soluzioni intere. Il problema del trasporto puo essere rappresentato attraverso una rete nel seguente modo:



3.2 Risoluzione del problema del trasporto

Il problema del trasporto è un problema di programmazione lineare pertanto potrebbe essere risolto applicando il metodo del simplesso a due fasi, in quanto tutti i vincoli sono di uguaglianza. Tuttavia la particolare struttura del problema consente di utilizzare una serie di accorgimenti per risolverlo con un minore costo computazionale. In particolare la prima peculiarità è che esistono alcuni metodi per determinare una BFS iniziale, quindi questo rende effettivamente inutile sia l'introduzione esplicita delle variabili artificiali sia la definizione (e la conseguente risoluzione) del problema definito nella prima fase.
In particolare una volta determinata la BFS iniziale il problema deve essere posto in forma canonica, ovvero si devono azzerare i coefficienti delle variabili in base nella funzione obiettivo. Questo, normalmente, è possibile sommando, all'equazione (0), le equazioni dei vincoli moltiplicate per opportune costanti. Poichè i coefficienti delle variabili decisionali nei vincoli sono uguali a 1, allora si può pensare che, se x_{ij} è una variabile in base, il relativo costo c_{ij} è stato azzerato sottraendo l'$i-$esimo vincolo relativo ad una sorgente moltiplicato per u_i e il $j-$esimo vincolo relativo ad una destinazione moltiplicato per v_j (la variabile x_{ij} compare solo in questi due vincoli). Il problema è ora quello di determinare appunto le $m+n$ costanti u_i e v_j tali che

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

se x_{ij} è variabile in base. Se invece la variabile x_{ij} non è in base allora il suo coefficiente aggiornato nella funzione obiettivo è

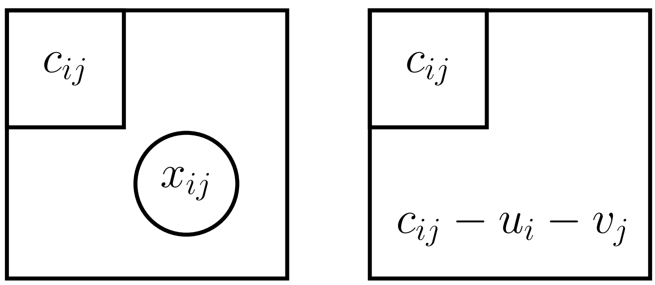
$$\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j. \tag{3.1}$$

In questo modo si può determinare la variabile entrante in base (ovvero la variabile il cui coefficiente $\overline{c}_{ij}$ definito da (3.1) risulta negativo e il più piccolo) ed il test di ottimalità (se tutti i coefficienti (3.1) sono nonnegativi). La determinazione della variabile uscente e la conseguente variazione della BFS possono essere trovate in modo semplice sfruttando il fatto che devono essere soddisfatti solo vincoli di uguaglianza. L'ultima, e più importante osservazione, sta nel fatto che il tableau del metodo del simplesso può essere quasi del tutto eliminato. I dati che servono ad ogni iterazione sono i valori c_{ij}, s_i e d_j ed i valori attuali di u_i e v_j. La tabella assume approssimativamente la seguente struttura:

		Destinazione				Offerta	u_i
		1	2	$\cdots$	n		
Sorgente	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2	
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m	
Domanda		d_1	d_2	$\cdots$	d_n	$Z =$	
v_j							

In ogni cella, prima di applicare il metodo del simplesso, viene inserita un'informazione aggiuntiva:

Se x_{ij} è variabile in base — Se x_{ij} non è variabile in base



Prima di vedere i metodi per ottenere una BFS iniziale è opportuno riflettere sul numero di variabili in base richiesto dal problema. Infatti il numero di vincoli è uguale a $m + n$, quindi dovrebbero essere necessarie $m + n$ variabili in base. Poichè il problema ammette solo vincoli di uguaglianza, una delle equazioni è automaticamente soddisfatta una volta che lo sono le altre. Quindi il numero di variabili in base è pari a $m + n - 1$. Per comprendere tale proprietà supponiamo che siano soddisfatti tutti i vincoli tranne quello sulla domanda dell'ultima destinazione:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Sommando le prime equazioni sull'indice i ed applicando la proprietà di ammissibilità si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{j=1}^{n-1} d_j + d_n.$$

Per $j = 1, \ldots, n-1$, a d_j possiamo sostituire i valori delle variabili decisionali, ottenendo l'uguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} + d_n,$$

da cui, semplificando i termini uguali, si ricava:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in} = d_n,$$

il che dimostra che l'ultimo vincolo è automaticamente soddisfatto. Di conseguenza ogni BFS ha esattamente $m + n - 1$ valori nonnegativi (che nel tableau compaiono cerchiati) e la somma dei valori per ogni riga e per ogni colonna è uguale, rispettivamente, alla relativa offerta o domanda.

3.2.1 Il problema della BFS iniziale

La procedura per determinare una BFS iniziale segue una serie di passi che si basano sull'analisi del tableau del simplesso per il problema specifico. Innanzitutto dalle righe e dalle colonne da esaminare si sceglie una variabile secondo un determinato criterio. A tale variabile si assegna un valore pari al valore più piccolo tra la domanda rimasta sulla colonna e l'offerta residua sulla riga. A questo punto si elimina la riga (o la colonna) che ha esaurito l'offerta (o la domanda) e si procede nuovamente scegliendo un'altra variabile oppure tutte le variabili rimaste qualora il loro numero coincida con quello delle variabili in base ancora da scegliere. Chiaramente è necessario aggiornare il valore dell'offerta (o della domanda) sottraendo il valore assegnato alla variabile in base. Se il valore residuo di domanda e offerta è uguale allora si può indifferentemente eliminare la riga o la colonna assegnando zero all'offerta o alla domanda residua. Per la scelta della variabile da porre in base esistono diversi algoritmi, i più usati sono i seguenti:

1. Regola del Nord-Ovest;
2. Il Metodo di Approssimazione di Vogel;
3. Il Metodo di Approssimazione di Russell.

La Regola del Nord-Ovest consiste nel selezionare inizialmente x_{11} come variabile in base (variabile di nord-ovest). In generale, a partire dalla variabile in base x_{ij} si seleziona $x_{i,j+1}$ se, per la sorgente i la quantità offerta non è tutta utilizzata, altrimenti si seleziona $x_{i+1,j}$.
Il Metodo di Approssimazione di Vogel consiste nel calcolare per ogni riga e per ogni colonna ancora da considerare la differenza aritmetica tra il secondo più piccolo ed il più piccolo costo unitario c_{ij} ancora presente in quella riga o colonna. Nella riga (o colonna) che presenta la maggiore differenza si seleziona la variabile con il più piccolo costo unitario.
Nel Metodo di Approssimazione di Russell per ogni riga sorgente i ancora da considerare si determina il valore $\overline{u}_i$ che è il grande costo unitario c_{ij} ancora presente in tale riga. Inoltre per ogni colonna j ancora da considerare si determina il valore $\overline{v}_j$ che è il grande costo unitario c_{ij} ancora presente in tale colonna. Per ogni variabile x_{ij} non selezionata, e appartenente a queste righe e colonne, si calcola il valore

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j.$$

Si seleziona la variabile che ha il valore Δ_{ij} negativo più piccolo. A parità di Δ_{ij} si può scegliere una variabile a caso, oppure quella che ha un costo c_{ij} inferiore.
I tre criteri per la scelta della BFS iniziale sono molto diversi tra loro. Sicuramente la regola del Nord-Ovest è quello più semplice, non richiede alcuna operazione particolare ma determina una BFS iniziale senza considerare i

costi relativi alle variabili inizialmente in base. Il metodo di approssimazione di Vogel sceglie come variabili in base quelle che hanno i costi più bassi nelle righe (o nelle colonne) in cui maggiore è la differenza tra tale costo e quello immediatamente superiore. Il confronto avviene relativamente ai costi delle variabili che sono nella stessa riga (o colonna), ma nulla assicura che la scelta sia la migliore in assoluto (la differenza potrebbe essere elevata ma anche il costo più piccolo lo potrebbe essere). In letteratura si ritiene che il metodo migliore sia quallo di Russell poichè sceglie la variabile in base utilizzando un metodo molto simile a quello che viene utilizzato dal metodo del simplesso per la scelta della variabile entrante in base.

Esempio 3.2.1 *Trovare la BFS iniziale del problema di trasporto con 3 sorgenti, 3 destinazioni e definito dalla seguente matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e con offerte pari rispettivamente a 10, 50 *e* 20 *e domande* 30, 40 *e* 10, *utilizzando la Regola del Nord-Ovest e i metodi di Vogel e di Russell.*

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	10	
2	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{4}$ 30	$\boxed{1}$	50	
3	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{4}$ 10	20	
d_j	30	40	10	$Z = 300$	
v_j					

Applicando il metodo di Vogel si ha la seguente situazione iniziale

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	1	6	5	10	4
	2	5	4	1	50	3
	3	3	3	4	20	0
	d_j	30	40	10		
	Diff. Col.	2	1	3		

Si sceglie come variabile in base x_{11}, si pone $x_{11} = 10$ e si cancella la prima riga.

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	5	4	1	50	3
	3	3	3	4	20	0
	d_j	20	40	10		
	Diff. Col.	2	1	3		

Si sceglie come variabile in base x_{23}, si pone $x_{23} = 10$ e si cancella la terza colonna.

		Destinazioni			
		1	2	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	5	4	40	1
	3	3	3	20	0
	d_j	20	40		
	Diff. Col.	2	1		

Si sceglie come variabile in base x_{31}, si pone $x_{31} = 20$ e si cancella la prima colonna.

		Destinazioni		
		2	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	2	4	40	–
	3	3	0	–
	d_j	40		
	Diff. Col.	–		

Le restanti variabili in base sono $x_{22} = 40$ e $x_{32} = 0$.
La BFS trovata con il metodo di Vogel è:

$$(10, 0, 0, 0, 40, 10, 20, 0, 0)$$

in cui la funzione obiettivo assume valore

$$Z = 10 + 60 + 160 + 10 = 240.$$

Per applicare il metodo di Russell scriviamo la consueta tabella:

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{1}$ $\mathbf{-10}$	$\boxed{6}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{5}$ $\mathbf{-6}$	10	6
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-9}$	50	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-7}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	20	4
d_j	30	40	10		
$\overline{v}_j$	5	6	5		

Scegliamo $x_{11} = 10$ e cancelliamo la prima riga.

	1	2	3	s_i	$\overline{u}_i$
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{1}$ $\mathbf{-8}$	50	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-6}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-4}$	20	4
d_j	20	40	10		
$\overline{v}_j$	5	4	4		

Scegliamo $x_{23} = 10$ e cancelliamo la terza colonna.

	1	2	s_i	$\overline{u}_i$
2	$\boxed{5}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{4}$ $\mathbf{-5}$	40	5
3	$\boxed{3}$ $\mathbf{-5}$	$\boxed{3}$ $\mathbf{-4}$	20	3
d_j	20	40		
$\overline{v}_j$	5	4		

Scegliamo $x_{31} = 20$, cancelliamo la prima colonna, in modo tale che le variabili rimaste sono entrambe in base: $x_{22} = 40$ e $x_{32} = 0$.
La BFS trovata con il metodo di Russell è:

$$(10, 0, 0, 0, 40, 10, 20, 0, 0).$$

Osserviamo che la BFS trovata con il metodo di Russell è la stessa fornita dal metodo di Vogel.

Esempio 3.2.2 *Determinare la BFS iniziale per il problema del trasporto con 2 sorgenti, entrambe con offerta* 50 *e* 4 *destinazioni con domanda* 25*,* 15*,* 28 *e* 32 *e matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 20 & 10 \\ 30 & 20 & 60 & 10 \end{bmatrix},$$

applicando la Regola del Nord-Ovest ed i metodi di Russell e Vogel.

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ **25**	$\boxed{40}$ **15**	$\boxed{20}$ **10**	$\boxed{10}$	50	
2	$\boxed{30}$	$\boxed{20}$	$\boxed{60}$ **18**	$\boxed{10}$ **32**	50	
d_j	25	15	28	32	$Z = 2700$	
$\overline{v}_j$						

Applichiamo ora il metodo di Russell

	1	2	3	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ $-\mathbf{50}$	$\boxed{40}$ $-\mathbf{40}$	$\boxed{20}$ $-\mathbf{80}$	$\boxed{10}$ $-\mathbf{40}$	50	40
2	$\boxed{30}$ $-\mathbf{60}$	$\boxed{20}$ $-\mathbf{80}$	$\boxed{60}$ $-\mathbf{60}$	$\boxed{10}$ $-\mathbf{60}$	50	60
d_j	25	15	28	32		
$\overline{v}_j$	30	40	60	10		

Poniamo $x_{13} = 28$ e cancelliamo la colonna 3.

	1	2	4	s_i	$\overline{u}_i$
1	$\boxed{20}$ $-\mathbf{50}$	$\boxed{40}$ $-\mathbf{40}$	$\boxed{10}$ $-\mathbf{40}$	22	40
2	$\boxed{30}$ $-\mathbf{30}$	$\boxed{20}$ $-\mathbf{50}$	$\boxed{10}$ $-\mathbf{30}$	50	30
d_j	25	15	32		
$\overline{v}_j$	30	40	10		

Poniamo $x_{11} = 22$ e cancelliamo la riga 1. Le variabili restanti sono tutte in base:

$$x_{21} = 3, \quad x_{22} = 15, \quad x_{24} = 32.$$

Riportiamo la BFS trovata con il metodo di Russell

$$(22, 0, 28, 0, 3, 15, 0, 32)$$

nella tabella

	1	2	3	4	s_i	
1	$\boxed{20}$ 22	$\boxed{40}$	$\boxed{20}$ 28	$\boxed{10}$	50	
2	$\boxed{30}$ 3	$\boxed{20}$ 15	$\boxed{60}$	$\boxed{10}$ 32	50	
d_j	25	15	28	32	$Z = 1710$	

in cui il valore della funzione obiettivo (come riportato in tabella) è pari a

$$Z = 440 + 560 + 90 + 300 + 320 = 1710.$$

Applichiamo ora il metodo di Vogel:

		Destinazioni					
		1	2	3	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	40	20	10	50	10
	2	30	20	60	10	50	10
	d_j	25	15	28	32		
	Diff. Col.	10	20	40	0		

Poniamo $x_{13} = 28$ e cancelliamo la colonna 3:

		Destinazioni				
		1	2	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	40	10	22	10
	2	30	20	10	50	10
	d_j	25	15	32		
	Diff. Col.	10	20	0		

Poniamo $x_{22} = 15$ e cancelliamo la colonna 2:

		Destinazioni			
		1	4	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	20	10	22	10
	2	30	10	35	20
	d_j	25	32		
	Diff. Col.	10	0		

Poniamo $x_{24} = 32$ e cancelliamo la colonna 4. Le restanti variabili sono tutte in base:

$$x_{11} = 22, \qquad x_{21} = 3.$$

La BFS trovata con il metodo di Vogel

$$(22, 0, 28, 0, 3, 15, 0, 32)$$

è la stessa ottenuta applicando il metodo di Russell, quindi

$$Z = 1710.$$

3.3 Il metodo del simplesso per il problema del trasporto

In base a quanto considerato in precedenza il metodo del simplesso, modificato in modo opportuno per il problema del trasporto consiste in tre passi:

1. Inizializzazione: si determina una BFS iniziale utilizzando uno dei criteri descritti;

2. Test di ottimalità: si calcolano i valori u_i e v_j risolvendo il sistema di equazioni:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

per ogni (i, j) tale che x_{ij} è variabile di base. Poichè i valori incogniti da calcolare sono $m + n$ mentre le variabili in base sono $m + n - 1$ ad una di tali incognite può essere assegnato un valore arbitrario, cioè zero. Per far ciò conviene selezionare la riga con il maggior numero di variabili in base, ponendo il corrispondente $u_i = 0$ (oppure fare lo stesso per una colonna ponendo il corrispondente $v_j = 0$). A questo punto si calcolano i costi residui

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

per ogni (i, j) tale che x_{ij} non è in base: se risulta che ogni

$$\bar{c}_{ij} \geq 0$$

allora la soluzione trovata è quella ottima e non si procede oltre, altrimenti si esegue l'iterazione successiva.

3. Iterazione: È composta da tre fasi:
   Fase 1: Si determina la variabile entrante selezionando la variabile non in base x_{ij} tale che $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ sia negativo e più piccolo.
   Fase 2: Una volta indentificata la variabile entrante in base questo significa che il suo valore aumenta (partendo ovviamente da zero). Poichè devono essere soddisfatti i vincoli di uguaglianza sia sulle righe della tabella che sulle colonne questo significa che il valore di altre variabili in base (almeno due) deve diminuire altrimenti tali vincoli sarebbero violati e che ci sono altre variabili in base il cui valore aumenta. Questo significa identificare la cosiddetta reazione a catena, ovvero l'insieme di variabili in base il cui valore deve aumentare (dette celle riceventi) e quelle il cui valore deve diminuire (dette celle donatrici) affinchè i vincoli di uguaglianza siano soddisfatti. La variabile in base uscente è quella relativa alla cella donatrice con il valore più piccolo.
   Fase 3: Si determina la nuova BFS aggiungendo il valore della variabile in base uscente al valore corrente di ogni cella ricevente mentre da ogni cella donatrice si sottrae lo stesso valore (è bene osservare che una delle celle donatrici non è più una variabile in base).

Esempio 3.3.1

Risolvere il problema del trasporto con 3 sorgenti, con offerta rispettivamente $10, 20$ *e* 30*,* 3 *destinazioni con domanda* 25*,* 20 *e* 35 *e con matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo del simplesso ed applicando la regola di Nord-Ovest per determinare la BFS iniziale.

Scriviamo la tabella dei dati ed applichiamo la Regola del Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{6}$ $+1$	$\boxed{1}$ -2	10	2
2	$\boxed{3}$ 15	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{5}$ $+4$	20	0
3	$\boxed{8}$ $+4$	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{2}$ 15	30	1
d_j	25	20	15	$Z = 200$	
v_j	3	3	1		

Variabile entrante x_{13}, celle riceventi sono appunto x_{13}, e inoltre x_{21} e x_{32}, celle donatrici x_{11}, x_{22} e x_{33}. La quantità donata è pari a 5, pertanto la variabile uscente è x_{22}. La nuova BFS viene rappresentata nella seguente tabella:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{6}$ $+3$	$\boxed{1}$ 5	10	0
2	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{3}$ $+2$	$\boxed{5}$ $+6$	20	-2
3	$\boxed{8}$ $+4$	$\boxed{4}$ 20	$\boxed{2}$ 10	30	1
d_j	25	20	15	$Z = 190$	
v_j	5	3	1		

Soluzione ottima è il vettore $(5, 0, 5, 20, 0, 0, 20, 10)$ ed il valore minimo del costo è $Z = 190$.

3.3.1 Sorgenti e destinazioni fittizie

Supponiamo ora che non sia verificata la condizione di ammissibilità

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Per vedere come risolvere il problema in questa situazione si possono presentare due possibili casi:
I Caso: Se risulta

$$\sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

allora di definisce una $(m+1)-$esima sorgente fittizia (dummy), cui viene assegnata come offerta s_{m+1} la quantità di domanda in eccesso:

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i.$$

Nella matrice dei costi va ovviamente aggiunta una riga cui, per evitare che l'intrduzione della sorgente fittizia alteri la risoluzione del problema, vengono assegnati costi tutti uguali a zero.
II Caso: Nel caso opposto, invece, ovvero se risulta

$$\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

è necessario introdurre la $(n+1)-$esima destinazione fittizia, che serva ad assorbire l'offerta eccedente, la cui domanda è pari a

$$d_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

I costi relativi a tale destinazione, aggiunti come colonna alla matrice, sono posti tutti uguali a zero.

Esempio 3.3.2 *Risolvere il problema del trasporto con 2 sorgenti, entrambe con offerta* 40, *e* 3 *destinazioni, con domanda* 35, 35 *e* 30, *e con matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

applicando il metodo del simplesso e determinando la BFS iniziale con la regola del Nord-Ovest.

Innanzitutto osserviamo che è necessario introdurre una sorgente fittizia, che indichiamo con $3D$, poichè

$$\sum_{i=1}^{2} s_i = 80 \neq \sum_{j=1}^{3} d_j = 100$$

che serva ad assorbire la domanda eccedente pari a 20. I costi relativi a tale sorgente saranno posti tutti uguali a zero, pertanto la matrice dei costi diviene:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ **35**	$\boxed{4}$ **5**	$\boxed{2}$ $\mathbf{-2}$	40	0
2	$\boxed{2}$ $\mathbf{+2}$	$\boxed{3}$ **30**	$\boxed{3}$ **10**	40	-1
$3D$	$\boxed{0}$ $\mathbf{+3}$	$\boxed{0}$ **0**	$\boxed{0}$ **20**	20	-4
d_j	35	35	30	$Z = 175$	
v_j	1	4	4		

Entra in base x_{13}, sono celle riceventi x_{13} e x_{22}, celle donatrici x_{12} e x_{23}, variabile uscente x_{12}, mentre la quantità donata è 5. La successiva iterazione è rappresentata nel seguente tableau:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ **35**	$\boxed{4}$ **+1**	$\boxed{2}$ **5**	40	2
2	$\boxed{2}$ **0**	$\boxed{3}$ **35**	$\boxed{3}$ **5**	40	3
$3D$	$\boxed{0}$ **+1**	$\boxed{0}$ **0**	$\boxed{0}$ **20**	20	0
d_j	35	35	30	$Z = 165$	
v_j	-1	0	0		

Soluzione ottima è il vettore $(35, 0, 5, 0, 35, 5, 0, 0, 20)$ ed il valore minimo del costo è $Z = 165$.

Esempio 3.3.3 *Risolvere il problema del trasporto con 3 sorgenti, con offerta* 10, 15 *e* 20*,* 2 *destinazioni, con domanda* 20 *e* 5*, e con matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

applicando il metodo del simplesso e determinando la BFS iniziale con la regola del Nord-Ovest.

Innanzitutto osserviamo che è necessario introdurre una destinazione fittizia, che indichiamo con $3D$, poichè

$$\sum_{i=1}^{3} s_i = 45 \neq \sum_{j=1}^{2} d_j = 25$$

che serva ad assorbire la domanda eccedente pari a 20. I costi relativi a tale destinazione saranno posti tutti uguali a zero, pertanto la matrice dei costi diviene:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamo la tabella dei dati e applichiamo la regola di Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	$3D$	s_i	u_i
1	$\boxed{2}$ **10**	$\boxed{3}$ **+3**	$\boxed{0}$ **+2**	10	-2
2	$\boxed{4}$ **10**	$\boxed{2}$ **5**	$\boxed{0}$ **0**	15	0
3	$\boxed{2}$ **−2**	$\boxed{2}$ **0**	$\boxed{0}$ **20**	20	0
d_j	20	5	20	$Z = 70$	
v_j	4	2	0		

Entra in base x_{31}, sono celle riceventi x_{31} e x_{23}, celle donatrici x_{21} e x_{33}, variabile uscente x_{21}, mentre la quantità donata è 10. La successiva iterazione è rappresentata nel seguente tableau:

	1	2	$3D$	s_i	u_i
1	$\boxed{2}$ **10**	$\boxed{3}$ **+1**	$\boxed{0}$ **0**	10	0
2	$\boxed{4}$ **+2**	$\boxed{2}$ **5**	$\boxed{0}$ **10**	15	0
3	$\boxed{2}$ **10**	$\boxed{2}$ **0**	$\boxed{0}$ **10**	20	0
d_j	20	5	20	$Z = 50$	
v_j	2	2	0		

Soluzione ottima è il vettore $(10, 0, 0, 0, 5, 10, 10, 0, 10)$ ed il valore minimo del costo è $Z = 50$.

3.3.2 Il caso di un costo indefinito

Il problema reale descritto dal modello matematico del problema potrebbe prevedere il caso che la sorgente $i-$esima non possa inviare fisicamente neanche un'unità di merce alla destinazione $j-$esima e, non potendo definire il costo c_{ij} questo sia indicato nella matrice con il simbolo $-$. Questo significa ovviamente che nella soluzione ottima non può essere presente x_{ij} come variabile in base. In questo caso per risolvere il problema nella matrice dei costi tale valore viene sostituito con il termine M che denota un numero intero molto molto grande. In questo modo poichè il metodo del simplesso tende a portare fuori base le variabili che presentano un costo unitario associato maggiore, in quanto l'obiettivo è la minimizzazione della funzione costo, sarà meno probabile che questa faccia parte della soluzione ottima. È ovvio che se nella soluzione ottima del problema del trasporto è presente come variabile in base proprio quella che ha un costo non definito allora vuol dire che il problema non ammette soluzione ammissibile.

Esempio 3.3.4 *Si deve risolvere il problema del trasporto con 3 nodi sorgente, con offerte pari a* 20*,* 20 *e* 25 *e* 3 *destinazioni con domanda* 25*,* 10 *e* 30 *e con matrice dei costi*

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & - & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si vuole determinare le quantità di merci da inviare dai nodi sorgente a quelli destinazione affinchè il costo sia minimo.

Osserviamo che il costo c_{22} non è definito pertanto poniamo $c_{22} = M$ e la matrice dei costi diviene:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & M & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Scriviamo la tabella dei dati ed applichiamo la Regola del Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{5}$ **20**	$\boxed{3}$ **−M**	$\boxed{3}$ **−4**	20	3
2	$\boxed{2}$ **5**	$\boxed{M}$ **10**	$\boxed{4}$ **5**	20	0
3	$\boxed{5}$ **+5**	$\boxed{3}$ **5 − M**	$\boxed{2}$ **25**	25	−2
d_j	25	10	30	$Z = 180 + 10M$	
v_j	2	M	4		

Variabile entrante x_{12}, celle riceventi x_{12} e x_{21}, celle donatrici x_{11} e x_{22}, variabile uscente x_{22}, quantità donata 10.

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{5}$ **10**	$\boxed{3}$ **10**	$\boxed{3}$ **−4**	20	7
2	$\boxed{2}$ **15**	$\boxed{M}$ **+M**	$\boxed{4}$ **5**	20	4
3	$\boxed{5}$ **+5**	$\boxed{3}$ **+5**	$\boxed{2}$ **25**	25	2
d_j	25	10	30	$Z = 180$	
v_j	−2	−4	0		

Variabile entrante x_{13}, celle riceventi x_{13} e x_{21}, celle donatrici x_{11} e x_{23}, variabile uscente x_{23}, quantità donata 5.

	1	2	3	s_i	u_i
1	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{3}$ 5	20	0
2	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{M}$ +M	$\boxed{4}$ +4	20	-3
3	$\boxed{5}$ +1	$\boxed{3}$ +1	$\boxed{2}$ 25	25	-1
d_j	25	10	30	$Z = 160$	
v_j	5	3	3		

La BFS corrente soddisfa la condizione di ottimalità pertanto soluzione ottima è il vettore $(5, 10, 5, 20, 0, 0, 0, 0, 25)$ ed il valore minimo del costo è $Z = 160$.

Esempio 3.3.5 *Si vuole risolvere il problema del trasporto con 3 sorgenti, con offerta rispettivamente* 100 *e* 60 *e* 80 *e* 3 *destinazioni con domanda* 50, 70 *e* 90. *La matrice dei costi è la seguente*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & - & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si vogliono determinare le quantità di merci da inviare dalle sorgenti alle destinazioni affinchè il costo sia minimo.

Innanzitutto osserviamo che

$$\sum_{i=1}^{3} s_i = 240, \qquad \sum_{j=1}^{3} d_j = 210,$$

pertanto dobbiamo introdurre una destinazione fittizia $4D$ e inoltre dobbiamo porre $c_{12} = M$. La matrice dei costi diviene pertanto la seguente:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & M & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scriviamo la tabella dei dati ed applichiamo la Regola del Nord-Ovest per trovare la BFS iniziale:

	1	2	3	4D	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{M}$ 50	$\boxed{2}$ $1-M$	$\boxed{0}$ $1-M$	100	0
2	$\boxed{2}$ $M-2$	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{4}$ 40	$\boxed{0}$ -2	60	$3-M$
3	$\boxed{3}$ $M+1$	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{0}$ 30	80	$1-M$
d_j	50	70	90	30	$Z=370+50M$	
v_j	1	M	$M+1$	$M-1$		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS iniziale è:

$$Z = 50 + 50M + 60 + 160 + 100 = 370 + 50M.$$

Osserviamo che, in base ai valori $c_{ij} = u_i - v_j$, possiamo scegliere x_{13} come variabile entrante in base, x_{23} è la variabile uscente mentre celle donatrici sono x_{12} e x_{23}, mentre celle riceventi sono x_{13} e x_{22}, le unità donate sono pari a 40.

	1	2	3	4D	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{M}$ 10	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{0}$ 0	100	0
2	$\boxed{2}$ $M-2$	$\boxed{3}$ 60	$\boxed{4}$ $M-1$	$\boxed{0}$ $M-3$	60	$3-M$
3	$\boxed{3}$ $+2$	$\boxed{1}$ $1-M$	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{0}$ 30	80	0
d_j	50	70	90	30	$Z=410+10M$	
v_j	1	M	2	0		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS corrente è:

$$Z = 50 + 10M + 80 + 180 + 100 = 410 + 10M.$$

Osserviamo che x_{32} è variabile entrante in base, x_{12} è la variabile uscente mentre celle donatrici sono x_{12} e x_{33}, mentre celle riceventi sono x_{13} e x_{32}, le unità donate sono pari a 10.

	1	2	3	4D	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{M}$ **M − 1**	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{0}$ **0**	100	0
2	$\boxed{2}$ **−1**	$\boxed{3}$ 60	$\boxed{4}$ **0**	$\boxed{0}$ **−2**	60	2
3	$\boxed{3}$ **+2**	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{0}$ 30	80	0
d_j	50	70	90	30	$Z = 420$	
v_j	1	1	2	0		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS corrente è:

$$Z = 50 + 100 + 180 + 10 + 80 = 420.$$

Osserviamo che x_{24} è variabile entrante in base, x_{34} è la variabile uscente mentre celle donatrici sono x_{22} e x_{34}, mentre celle riceventi sono x_{24} e x_{32}, le unità donate sono pari a 30.

	1	2	3	4D	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 50	$\boxed{M}$ **M − 1**	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{0}$ **+2**	100	0
2	$\boxed{2}$ **−1**	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{4}$ **0**	$\boxed{0}$ 30	60	2
3	$\boxed{3}$ **+2**	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{0}$ **+2**	80	0
d_j	50	70	90	30	$Z = 340$	
v_j	1	1	2	−2		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS corrente è:

$$Z = 50 + 80 + 90 + 40 + 80 = 340.$$

Osserviamo che x_{21} è variabile entrante in base, x_{22} è la variabile uscente mentre celle donatrici sono x_{22}, x_{33} e x_{11}, mentre celle riceventi sono x_{21}, x_{32} e x_{13}, le unità donate sono pari a 30.

	1	2	3	$4D$	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{M}$ $\mathbf{M-1}$	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ $+1$	100	0
2	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{3}$ $+1$	$\boxed{4}$ $+1$	$\boxed{0}$ 30	60	1
3	$\boxed{3}$ $+2$	$\boxed{1}$ 70	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{0}$ $+1$	80	0
d_j	50	70	90	30	$Z = 330$	
v_j	1	1	2	-1		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS corrente è:

$$Z = 20 + 160 + 60 + 70 + 20 = 330.$$

Poichè è soddisfatto il test di ottimalità la BFS corrente

$$(20, 0, 80, 30, 0, 0, 0, 70, 10)$$

è quella ottima.

Esempio 3.3.6 *Risolvere lo stesso problema dell'esempio procedente determinando la BFS iniziale con il metodo di approssimazione di Vogel.*

		Destinazioni					
		1	2	3	$4D$	s_i	Differ. Righe
	1	1	M	2	0	100	1
Sorgenti	2	2	3	4	0	60	2
	3	3	1	2	0	80	1
	d_j	50	70	90	30		
	Diff.col.	1	2	0	0		

Poniamo $x_{24} = 30$ e cancelliamo la quarta colonna:

		Destinazioni				
		1	2	3	s_i	Differ. Righe
	1	1	M	2	100	1
Sorgenti	2	2	3	4	30	1
	3	3	1	2	80	1
	d_j	50	70	90		
	Diff.col.	1	2	0		

Poniamo $x_{32} = 70$ e cancelliamo la seconda colonna:

		Destinazioni			
		1	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	1	2	100	1
	2	2	4	30	2
	3	3	2	10	1
	d_j	50	90		
	Diff.col.	1	0		

Poniamo $x_{21} = 30$ e cancelliamo la seconda riga:

		Destinazioni			
		1	3	s_i	Differ. Righe
Sorgenti	1	1	2	100	1
	3	3	2	10	1
	d_j	20	90		
	Diff.col.	2	0		

Poniamo $x_{11} = 20$, cancelliamo la prima colonna, quindi le altre variabili in base sono determinate:

$$x_{13} = 80, \qquad x_{33} = 10.$$

Scriviamo ora la tabella del metodo del simplesso:

	1	2	3	$4D$	s_i	u_i
1	$\boxed{1}$ 20	$\boxed{M}$ M − 1	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ +1	100	2
2	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{3}$ +1	$\boxed{4}$ +1	$\boxed{0}$ 30	60	3
3	$\boxed{3}$ +2	$\boxed{1}$ 70	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{0}$ +1	80	2
d_j	50	70	90	30	$Z = 330$	
v_j	-1	-1	0	-3		

Il valore della funzione obiettivo nella BFS corrente è:

$$Z = 20 + 160 + 60 + 70 + 20 = 330.$$

Poichè è soddisfatto il test di ottimalità la BFS corrente

$$(20, 0, 80, 30, 0, 0, 0, 70, 10)$$

è quella ottima.

3.4 Il Problema di Assegnamento

Il problema di assegnamento consiste nella necessità di dover assegnare un insieme di operazioni (dette task) che devono essere svolte ad un insieme di risorse. Come esempio possiamo pensare ad un insieme di operai (o lavoratori) cui devono essere assegnati determinati compiti oppure ad alcuni reparti che devono svolgere un certo numero di lavori. L'assegnazione di uno di tali compiti (il task appunto) ad una risorsa (un operaio per esempio) ha un determinato costo. L'obiettivo è la minimizzazione del costo complessivo di tale assegnamento. Le risorse possono essere persone, ma anche macchinari, stabilimenti, intervalli di tempo e così via ed il costo può essere anche espresso in termini di tempo.
Un problema di assegnamento deve soddisfare i seguenti requisiti:

1. Il numero delle risorse e quello dei task devono essere uguali (tale valore sarà indicato con n).

2. Ogni risorsa deve essere assegnata ad un singolo task.

3. Ogni task è svolto da un'unica risorsa.

4. Il costo c_{ij} è associato all'esecuzione del task j da parte della risorsa i.

5. L'obiettivo è determinare le assegnazioni a costo globale minimo.

I primi tre requisiti sono piuttosto restrittivi ma è comunque possibile riformulare determinati problemi in modo tale che siano soddisfatti. Supponiamo per esempio di dover collocare 5 nuove macchine nelle posizioni occupate precedentemente da cinque macchinari. In base alla distanza dei magazzini dalle posizioni abbiamo i seguenti costi orari:

		Locazioni				
		1	2	3	4	5
	1	6	4	3	3	2
	2	7	5	4	5	4
Macchine	3	3	6	3	6	3
	4	7	10	4	4	8
	5	6	5	7	4	4

3.4.1 Il modello matematico del problema di assegnamento

Per descrivere il modello vengono introdotte le seguenti variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la risorsa } i \text{ esegue il task } j; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i, j = 1, \ldots, n$. Ogni x_{ij} è una variabile binaria (può assumere solo due valori). Indicando con Z il costo totale, il problema di assegnamento può essere formulato nel seguente modo:

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto ai vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

x_{ij} variabile binaria.

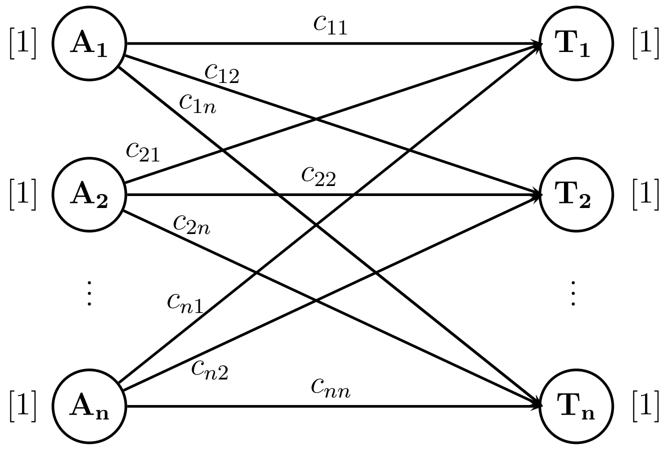
Cancellando il vincolo delle variabili binarie il problema può essere considerato come un normale problema di programmazione lineare e come tale può essere risolto. Il modello può essere assimilato anche al problema del trasporto in cui il numero di sorgenti m coincide con il numero di destinazioni n ed inoltre ogni offerta

$$s_i = 1, \qquad i = 1, \dots, n$$

e ogni domanda

$$d_j = 1, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Applicando la proprietà di interezza del problema del trasporto ogni BFS ha componenti intere e, in base ai vincoli, queste devono necessariamente assumere valori 0 oppure a 1. Il problema può essere descritto attraverso una rete:



Per effettuare un assegnamento (non necessariamente quello ottimo) si procede nel seguente modo: si considera una risorsa, per esempio la $i-$esima, che viene associata al task$j$. A questo punto si elimina la riga i e la colonna j cosicchè la matrice dei costi abbia dimensione $n-1 \times n-1$. Si considera quindi un'altra risorsa ed un altro task finchè la matrice non si riduce ad un singolo elemento che rende obbligato l'ultimo accoppiamento.
Un'importante osservazione è quella che tutte le BFS di un problema di assegnamento sono degeneri, Infatti trattandosi di un caso particolare del problema del trasporto il numero di variabili in base è

$$m + n - 1 = n + n - 1 = 2n - 1.$$

in quanto $m = n$. Tuttavia tra le n^2 variabili decisionali solo n sono uguali a 1 pertanto ci devono essere necessariamente $n-1$ variabili in base con

valore nullo e quindi tutte le BFS sono degeneri. Tale considerazione porta ad escludere la possibilità di applicare il metodo del simplesso adattato al problema del trasporto per risolvere il problema di assegnamento. Infatti il metodo potrebbe richiedere un numero di iterazioni decisamente alto e potrebbe anche accadere l'eventualità di eseguire una serie di iterazioni senza migliorare il valore della funzione obiettivo restando sempre nella medesima BFS degenere.
Per risolvere il problema di assegnamento esiste un metodo più semplice, descritto nel paragrafo seguente.

3.4.2 Il metodo ungherese

Il metodo ungherese deve il suo nome al fatto che fu descritto per la prima volta da due matematici ungheresi, König ed Egervary, intorno al 1930. Tale algoritmo consente di risolvere il problema di assegnamento evitando l'applicazione del metodo del simplesso.
L'algoritmo viene applicato direttamente alla matrice dei costi, generando una serie di tabelle equivalenti fino ad ottenerne con assegnamento ottimo a costo nullo. Nella tabella finale i costi sono tutti positivi o nulli e l'assegnazione ottima può essere effettuata in corrispondenza dei valori nulli. L'idea chiave del metodo è quella di effettuare una serie di sottrazioni di opportuni valori dagli elementi delle righe (e delle colonne) senza alterare il problema.
L'algoritmo è composto dai seguenti passi.

1. Sottrarre il più piccolo valore in ogni riga da ogni elemento della stessa riga (riduzione per righe) e scrivere i risultati in una nuova tabella.

2. Sottrarre il più piccolo valore in ogni colonna da ogni elemento della stessa colonna (riduzione per colonne) e scrivere i risultati in una nuova tabella.

3. Controllare se può essere effettuato un assegnamento ottimo: per questo bisogna determinare il minimo numero di linee necessarie a coprire tutti gli elementi della tabella uguali a zero. Se tale numero è uguale al numero di righe (o di colonne) allora è possibile determinare un insieme ottimo di assegnazioni e si esegue il passo 6 dell'algoritmo altrimenti si esegue il passo 4.

4. Se il numero minimo di linee è inferiore al numero di righe allora si deve modificare la tabella nel seguente modo:

a) si sottrae il più piccolo valore non coperto da linee da ogni elemento non coperto della tabella;

b) si aggiunge tale valore agli elementi che si trovano all'intersezione tra due linee;

c) si lasciano invariati tutti gli altri elementi.

5. Ripetere i passi 3 e 4 finchè non si ottiene un insieme ottimo di assegnazioni.

6. Effettuare le assegnazioni una alla volta in corrispondenza degli elementi nulli. Iniziare dalle righe o dalle colonne che presentano un solo zero. Alla variabile corrispondente viene assegnato il valore 1. Poichè ogni riga ed ogni colonna deve ricevere esattamente un'assegnazione, si cancellano la riga e la colonna coinvolte da tale assegnazione. Se non ci sono righe (o colonne) che hanno un unico elemento uguale a zero allora si considerano quelle che ne hanno due. In questo caso la scelta della variabile da porre uguale a 1 è arbitraria (questo vuol dire che l'assegnamento ottimo non è unico). Quindi bisogna considerare le righe e le colonne non ancora cancellate e procedere con la successiva assegnazione e questo finchè la matrice non è ridotta ad un singolo elemento che deve essere necessariamente uguale a zero e che rende obbligato l'ultimo assegnamento. Nel caso in cui tale ultimo elemento non sia uguale a zero significa che non era soddisfatta la condizione di ottimalità prevista al passo 4 del metodo ungherese.

Applichiamo il metodo ungherese all'esempio introdotto in precedenza e definito dalla seguente matrice dei costi:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

6	4	3	3	2
7	5	4	5	4
3	6	3	6	3
7	10	4	4	8
6	5	7	4	4

Tabella iniziale

4	2	1	1	0
3	1	0	1	0
0	3	0	3	0
3	6	0	0	4
2	1	3	0	0

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le righe

4	1	1	1	0
3	0	0	1	0
0	2	0	3	0
3	5	0	0	4
2	0	3	0	0

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le colonne

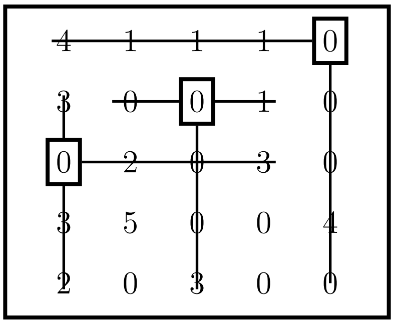
Adesso è possibile effettuare l'assegnamento ottimo.

~~4~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	$\boxed{0}$
3	0	0	1	~~0~~
0	2	0	3	~~0~~
3	5	0	0	~~4~~
2	0	3	0	~~0~~

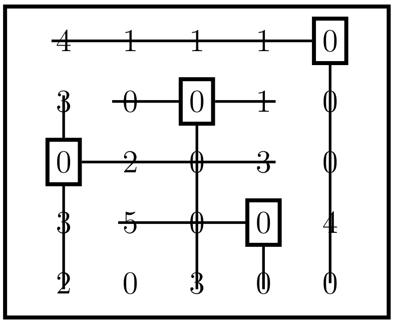
$x_{15} = 1$

~~4~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	$\boxed{0}$
~~3~~	0	0	1	~~0~~
$\boxed{0}$	~~2~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~
~~3~~	5	0	0	~~4~~
~~2~~	0	3	0	~~0~~

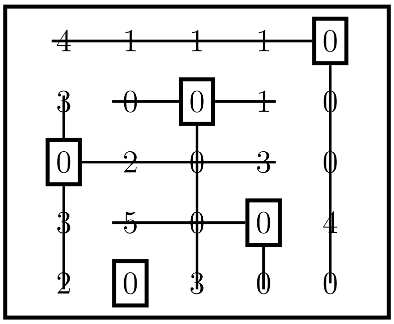
$x_{31} = 1$



$x_{23} = 1$



$x_{44} = 1$



$x_{52} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 2 + 4 + 3 + 4 + 5 = 18.$$

Osserviamo che l'assegnamento ottimo non è unico in quanto il problema ammette anche la seguente soluzione:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esempio 3.4.1 *Supponiamo per esempio di dover collocare 3 nuove macchine nelle posizioni occupate precedentemente da quattro macchinari. In base alla distanza dei magazzini dalle posizioni abbiamo i seguenti costi orari:*

		Locazioni			
		1	2	3	4
	1	10	18	14	–
Macchine	2	16	–	15	14
	3	12	13	10	15

Per ricondurre questo esempio ad un problema di assegnamento è necessario innanzitutto introdurre una macchina fittizia (dummy), cui vengono assegnati costi tutti uguali a 0. Inoltre osserviamo che ci sono due posizioni che non possono essere assegnate rispettivamente alle macchine 1 e 2 perciò per evitare che tale assegnamento avvenga deve essere attribuito un costo unitario molto alto, pari al valore M. La tabella dei costi diventa così:

		Locazioni			
		1	2	3	4
	1	10	18	14	M
Macchine	2	16	M	15	14
	3	12	13	10	15
	4(D)	0	0	0	0

La matrice dei costi risulta essere pertanto

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 14 & M \\ 16 & M & 15 & 14 \\ 12 & 13 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10	18	14	M
16	M	15	14
12	13	10	15
0	0	0	0

Tabella iniziale

0	8	4	M
16	M	15	14
12	13	10	15
0	0	0	0

Passo I
Si sottrae il minimo 10 dalla 1^a riga

0	8	4	M
2	M	1	0
12	13	10	15
0	0	0	0

Passo II
Si sottrae il minimo 14 dalla 2^a riga

0	8	4	M
2	M	1	0
2	3	0	5
0	0	0	0

Passo III
Si sottrae il minimo 10 dalla 3^a riga

A questo punto si dovrebbe sottrarre il minimo da ciascuna colonna, ma poichè il valore minimo è zero ed in ogni riga (e/o colonna) c'è un elemento uguale a zero (cioè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero coincide con la dimensione della matrice) allora è possibile procedere all'assegnazione ottima delle risorse ai task.

$\boxed{0}$	8	4	M
2	M	1	0
2	3	0	5
0	0	0	0

$x_{11} = 1$

0	8	4	M
2	M	1	$\boxed{0}$
2	3	0	5
0	0	0	0

$x_{24} = 1$

0	8	4	M
2	M	1	0
2	3	$\boxed{0}$	5
0	0	0	0

$x_{33} = 1$

0	8	4	M
2	M	1	0
2	3	0	5
0	$\boxed{0}$	0	0

$x_{42} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 10 + 14 + 10 + 0 = 34.$$

Esempio 3.4.2 *Risolvere il problema di assegnamento con* 5 *task e* 5 *risorse definito dalla seguente matrice dei costi:*

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

5	4	6	5	4
3	7	4	6	3
5	2	3	2	3
6	4	4	3	2
7	3	2	3	3

Tabella iniziale

1	0	2	1	0
0	4	1	3	0
3	0	1	0	1
4	2	2	1	0
5	1	0	1	1

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le righe

Non si procede a togliere il minimo da ogni colonna in quanto tale valore è zero. Inoltre poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a cinque allora si può procedere all'assegnamento ottimo.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_{21} = 1$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_{53} = 1$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_{45} = 1$

$$\begin{matrix} 1 & \boxed{0} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_{12} = 1$

$$\begin{matrix} 1 & \boxed{0} & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_{34} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 13.$$

Esempio 3.4.3 *Risolvere il problema di assegnamento definito dalla seguente matrice dei costi:*

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & - & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & 8 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Innanzitutto dobbiamo aggiungere una colonna alla matrice dei costi ed inserire il valore M per i costi non definiti:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & M & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & 8 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo il metodo ungherese a tale problema:

6	3	M	4	5	6
4	3	1	6	5	6
7	4	3	3	2	4
2	1	10	8	4	5
7	5	6	4	3	2
0	0	0	0	0	0

Tabella iniziale

3	0	M	1	2	3
3	2	0	5	4	5
5	2	1	1	0	1
1	0	9	7	3	4
5	3	4	2	1	0
0	0	0	0	0	0

Matrice ottenuta sottraendo il minimo da tutte le righe

Non si procede a togliere il minimo da ogni colonna in quanto tale valore è zero. Inoltre poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a cinque, come risulta dalla seguente figura

$$\begin{array}{cccccc}
3 & 0 & M & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 0 & 5 & 4 & 5 \\
5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 9 & 7 & 3 & 4 \\
5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

allora è necessario procedere ad un'altra iterazione.

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Poichè il numero minimo di linee che coprono gli elementi uguali a zero è uguale a sei allora è possibile effettuare l'assegnamento ottimo.

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{56} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & 0 & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{35} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{23} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
0 & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{12} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
\boxed{0} & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{41} = 1$

$$\begin{array}{cccccc}
2 & \boxed{0} & M & 0 & 2 & 3 \\
2 & 2 & \boxed{0} & 4 & 4 & 5 \\
4 & 2 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\
\boxed{0} & 0 & 9 & 6 & 3 & 4 \\
4 & 3 & 4 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
0 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1
\end{array}$$

$x_{64} = 1$

La soluzione ottima è la seguente

$$X = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

mentre il costo minimo è

$$Z = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$$

Capitolo 4

Problemi di Ottimizzazione su Reti

4.1 Definizioni e proprietà

La rappresentazione attraverso reti è uno strumento ampiamente utilizzato per descrivere problemi derivanti da differenti aree come la distribuzione di servizi, la pianificazione e la gestione delle risorse, l'allocazione di strutture per le telecomunicazioni (si pensi per esempio alla rappresentazione della rete autostradale o ferroviaria, in cui sono rappresentati alcuni punti che sono collegati tra loro in modo diretto da strade o ferrovie). Essa consente di visualizzare graficamente le componenti del sistema, le relative connessioni ed eventualmente alcune informazioni aggiuntive (per esempio la lunghezza di un collegamento, il costo per percorrere un determinato tratto o altro) relative ad esse. Una rete consiste in un insieme di punti detti nodi (o vertici) ed in un insieme di linee chiamate lati (o anche archi) che li collegano. In modo formale una rete (anche detta grafo) è definita nei seguenti modi.

Definizione 4.1.1 *Una rete non orientata è una coppia $G = (V, A)$ tale che*

1. *V è un insieme finito di punti (detti appunto vertici o nodi);*
2. *A è un insieme finito di coppie non ordinate di vertici, dette lati.*

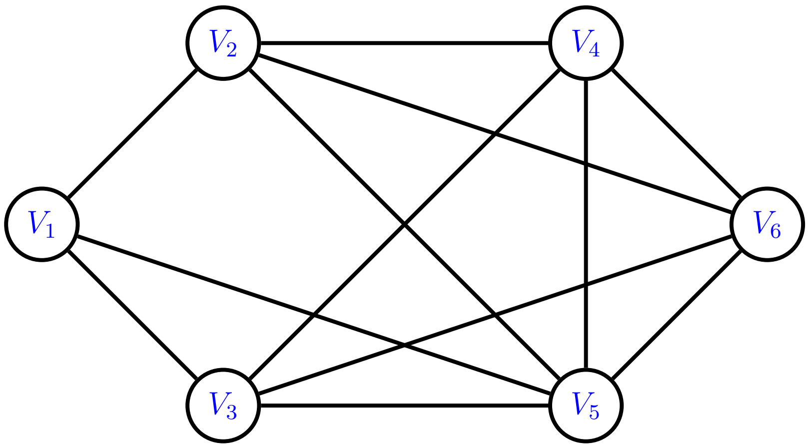
Un collegamento viene indicato scrivendo una coppia di nodi (u, v), $u, v \in V$. Considerando il grafo non orientato $G = (V, E)$, tale che:

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$$

e

$$\begin{aligned} A = \ & \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_1, V_5), (V_2, V_4), (V_2, V_5), (V_2, V_6), \\ & (V_3, V_4), (V_3, V_5), (V_3, V_6), (V_4, V_5), (V_4, V_6), (V_5, V_6)\} \end{aligned}$$

graficamente può essere rappresentato in questo modo



I lati non hanno una direzione fissata, in realtà si suppone convenzionalmente che sia possibile un flusso in entrambe le direzioni (in questo caso si parla anche di arco non orientato). Osserviamo che non essendo le coppie ordinate i lati (V_i, V_j) e (V_j, V_i) rappresentano la medesima connessione. Quando due nodi non sono connessi direttamente allora ha senso chiedersi se esista una sequenza di lati che li connette.

Definizione 4.1.2 *Si definisce percorso una sequenza di vertici*

$$V_1 V_2 V_3 \dots V_n$$

tali che:
1. $V_i \in V$ *per ogni* i*;*
2. $(V_i, V_{i+1}) \in A$ *per* $i = 1, \dots, n-1$.

Se in un percorso tutti i vertici sono distinti allora la sequenza è detta cammino. Nella rete del precedente esempio un percorso è

$$V_1 V_2 V_4 V_5 V_3 V_1 V_5 V_6$$

mentre un cammino è, per esempio,

$$V_1 V_5 V_3 V_4 V_2.$$

Definizione 4.1.3 *Un cammino che inizia e finisce sullo stesso nodo è detto ciclo (in questo caso ovviamente non ci sono nodi ripetuti tranne il primo e l'ultimo).*

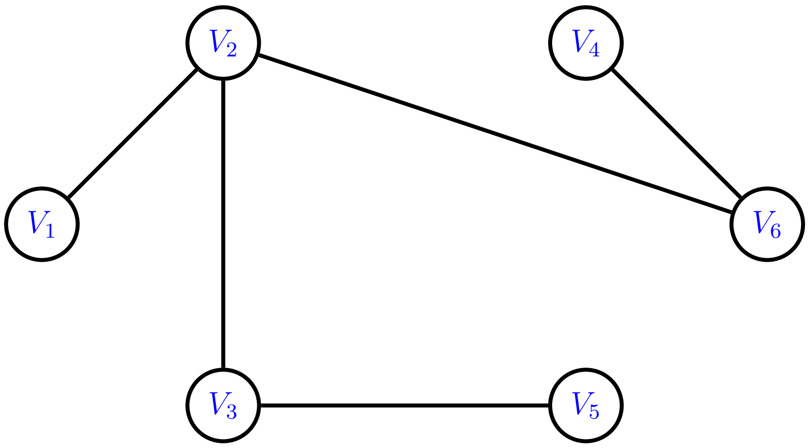
Si dice che due nodi sono connessi se esiste almeno un cammino non orientato che li congiunge. Una rete è connessa se ogni coppia di nodi è connessa.

Definizione 4.1.4 *Se in una rete non ci sono cicli allora è detta aciclica.*

Definizione 4.1.5 *Una rete connessa e aciclica è detta albero.*

Definizione 4.1.6 *Un albero è detto albero ricoprente (spanning tree) se connette tutti i nodi del grafo G.*

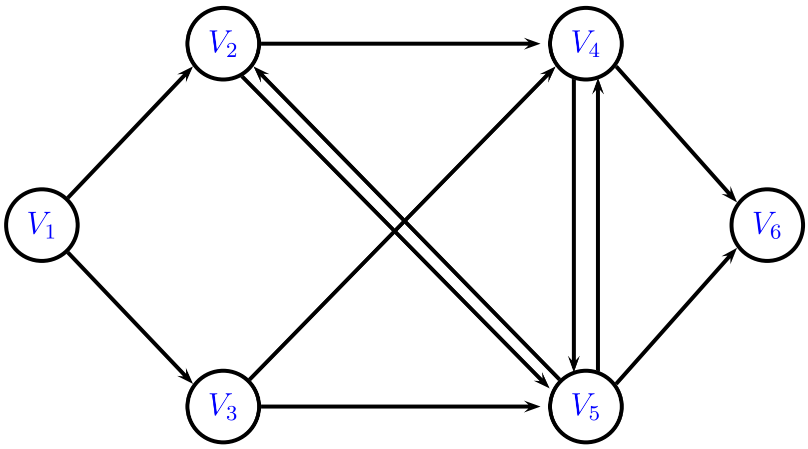
Se n è il numero dei nodi, ovvero la cardinalità dell'insieme V allora ogni albero ricoprente ha esattamente $n-1$ archi poichè questo è il numero minimo di archi necessari per avere una rete connessa ed il numero massimo possibile senza creare cicli. La seguente figura illustra un esempio di albero.



Definizione 4.1.7 *Una rete orientata è una coppia $G = (V, A)$ tale che*

1. *V è un insieme finito di vertici;*
2. *A è un insieme finito di coppie ordinate di vertici, dette archi.*

Se consideriamo il seguente esempio:



l'insieme degli archi è il seguente

$$\begin{aligned} A = \; & \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_4), (V_2, V_5), (V_3, V_4), (V_3, V_5), \\ & (V_4, V_5), (V_4, V_6), (V_5, V_4), (V_5, V_2), (V_5, V_6)\} \,. \end{aligned}$$

Quindi se $G = (V, A)$ è un grafo diretto allora A è un insieme di coppie ordinate, cosicchè $A \subseteq V \times V$. In questo caso l'arco viene etichettato citando prima l'origine (nodo di partenza) e poi la destinazione (nodo di arrivo). In questo caso l'arco (V_i, V_j) è diverso dall'arco (V_j, V_i). In modo analogo a quanto detto per le reti non orientate si possono definire percorsi orientati, per esempio

$$V_1 V_2 V_4 V_5 V_2 V_4 V_6$$

cammini orientati:

$$V_1 V_2 V_5 V_4 V_6$$

e cicli orientati:

$$V_2 V_4 V_5 V_2.$$

Nei paragrafi seguenti saranno descritti e risolti due classici esempi di problemi di ottimizzazione definiti su reti connesse, il problema di minimo albero ricoprente (o problema dell'albero di minima estensione) e il problema del minimo cammino.

4.2 Il Problema di Minimo Albero Ricoprente

Il Problema di Minimo Albero Ricoprente (Minimum Spanning Tree, o albero di minima estensione) si definisce se la rete è connessa e non orientata, e, ad ogni lato, è associata una misura nonnegativa, la lunghezza, (che, per esempio, può rappresentare una distanza, un tempo oppure un costo). Per il problema in questione si vuole trovare un albero ricoprente, cioè una rete senza cicli che colleghi tutti i nodi e tale che la sua lunghezza complessiva sia minima. Il problema di minimo albero ricoprente può essere sintetizzato nei seguenti punti:

1. È assegnato un insieme di nodi ed una lista di possibili collegamenti tra i nodi insieme alle relative lunghezze;
2. si vuole costruire la rete con un numero di lati sufficiente a collegare tutti i nodi, in modo tale che esista un cammino tra ogni coppia di nodi;
3. obiettivo da raggiungere è determinare l'albero che ha la minima lunghezza.

Se la rete ha n nodi, per quanto detto in precedenza, richiede $n - 1$ collegamenti per assicurare l'esistenza di un cammino per ogni coppia di nodi. Possibili applicazioni di questo problema riguardano, per esempio, la progettazione di reti di telecomunicazioni (per esempio reti in fibra ottica, reti di computer, linee dati telefoniche), oppure di reti di trasporto, di reti di trasmissione elettrica o di collegamenti elettrici (per esempio minimizzare la lunghezza dei cavi elettrici all'interno di un computer), e tutte quelle applicazioni in cui si vogliono minimizzare le connessioni tra punti diversi che devono comunicare (o essere collegati) tra loro.

4.2.1 L'algoritmo di Prim

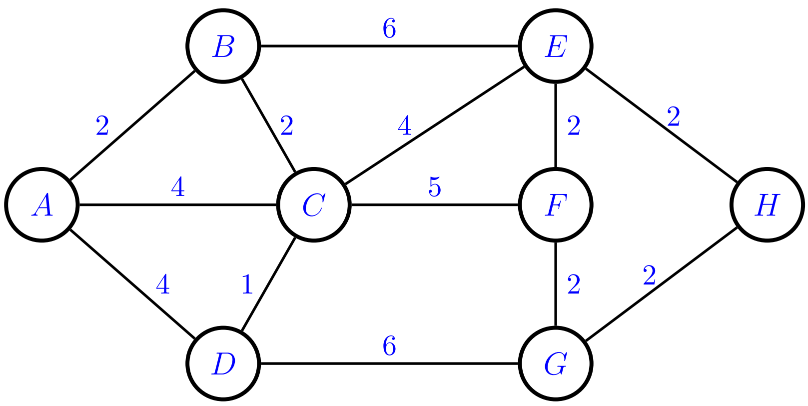
Un algoritmo per il problema di minimo albero ricoprente è composto dai seguenti passi:

1. Si seleziona un nodo in modo arbitrario che viene connesso al nodo più vicino (ovvero il lato con lunghezza inferiore che ha come estremo il nodo scelto) oppure si seleziona il lato che ha la lunghezza minima;

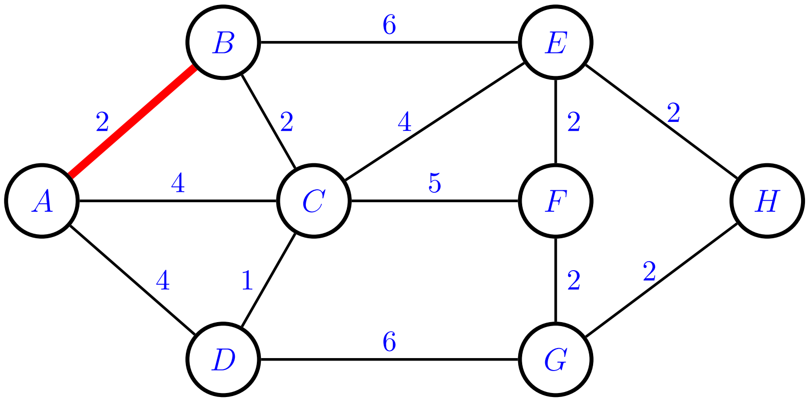
2. Si identifica il nodo non connesso più vicino ad un nodo già connesso, e quindi si collegano i due nodi. Si ripete l'operazione finchè tutti i nodi saranno connessi;

3. Nel caso in cui il numero di possibili nodi da scegliere al passo 1 o al passo 2 sia maggiore di 1, la scelta è del tutto arbitraria e porta comunque ad una soluzione ottima.

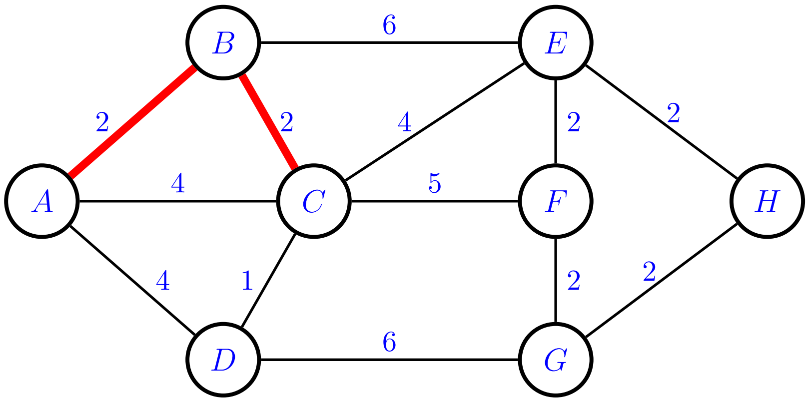
Per esempio si supponga di dover cablare in fibra ottica una zona dove sono già presenti alcune stazioni per lo smistamento del segnale. Tali punti devono essere collegati minimizzando la lunghezza complessiva dei cavi utilizzati. La situazione è schematizzata dalla seguente rete:



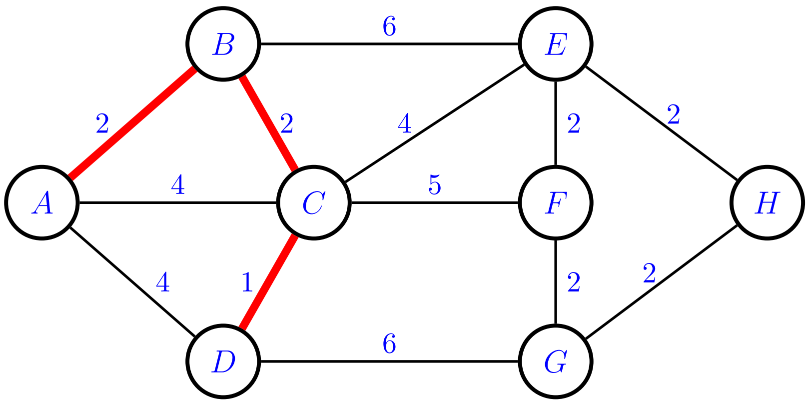
Nelle pagine seguenti vengono riportati i passi dell'algoritmo applicato a tale rete, scegliendo A come nodo iniziale. I lati di colore rosso identificano quelli appartenenti all'albero che si sta determinando.



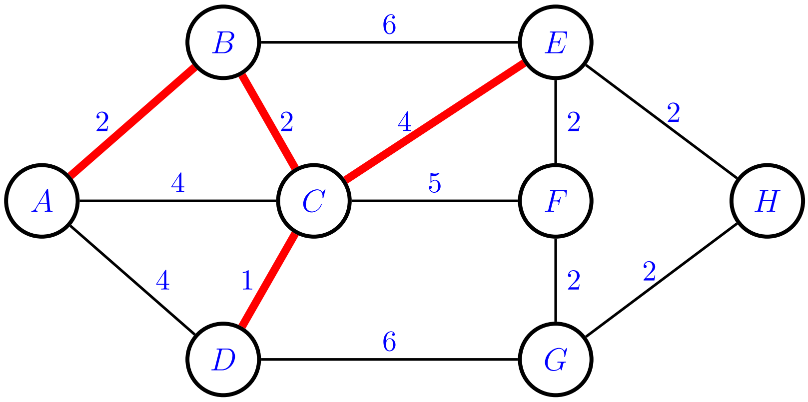
B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6

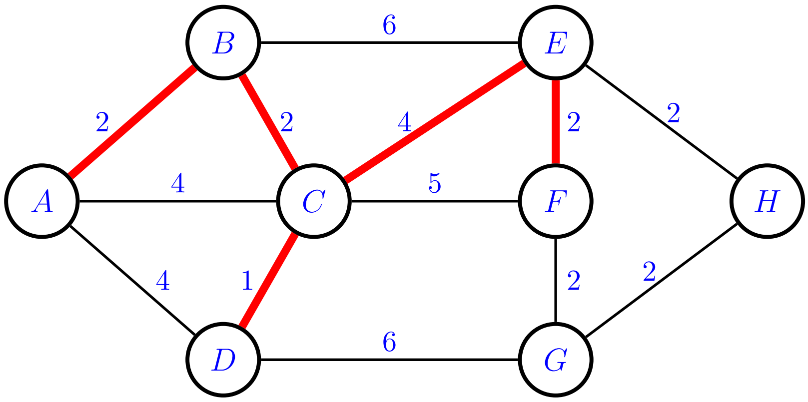


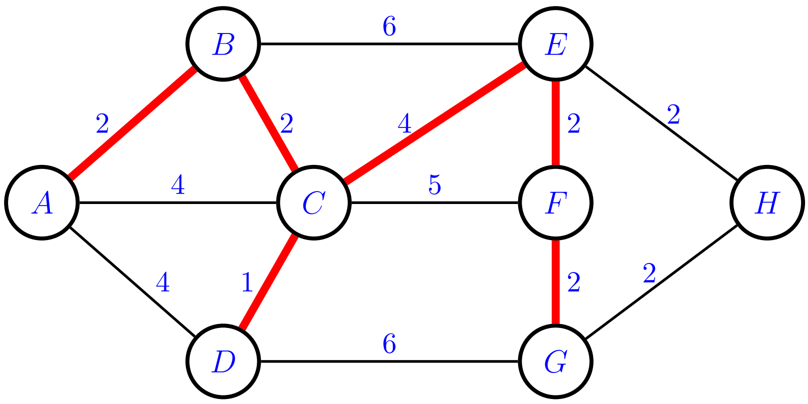
B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6

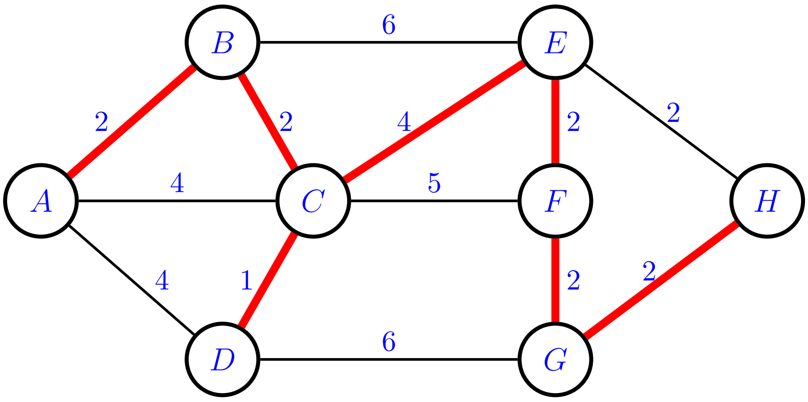


B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6

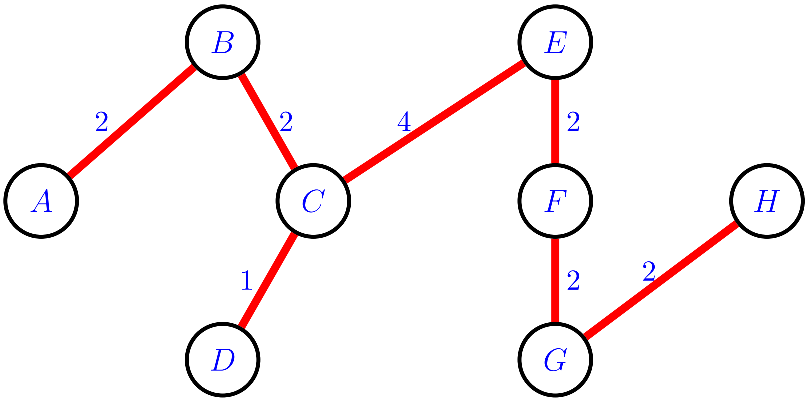

B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6


B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6


B
E
A
C
F
H
D
G
6
2
2
4
2
2
4
5
4
1
2
2
6



Il minimo albero ricoprente è il seguente:



La lunghezza complessiva dei collegamenti è uguale a 15. È evidente che il minimo albero ricoprente trovato non è l'unico in quanto in diversi passi dell'algoritmo è stato necessario effettuare una scelta tra diversi lati.

4.2.2 L'algoritmo di Kruskal

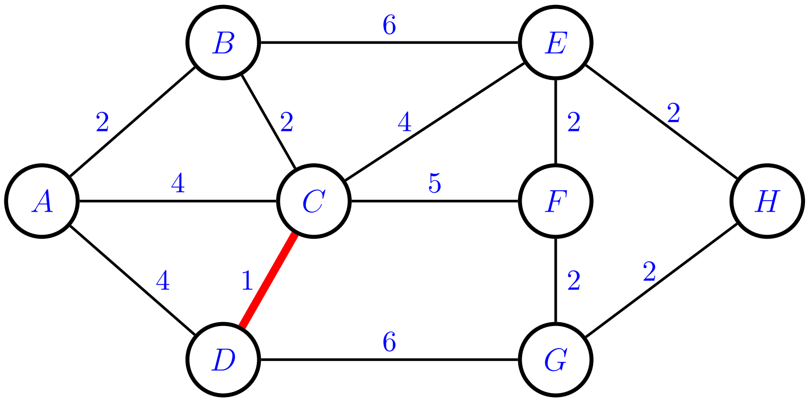
L'algoritmo di Kruskal per trovare il minimo albero ricoprente è composto dai seguenti passi:

1. si seleziona il lato di lunghezza minima (se sono più di uno allora se ne sceglie uno in modo arbitrario);

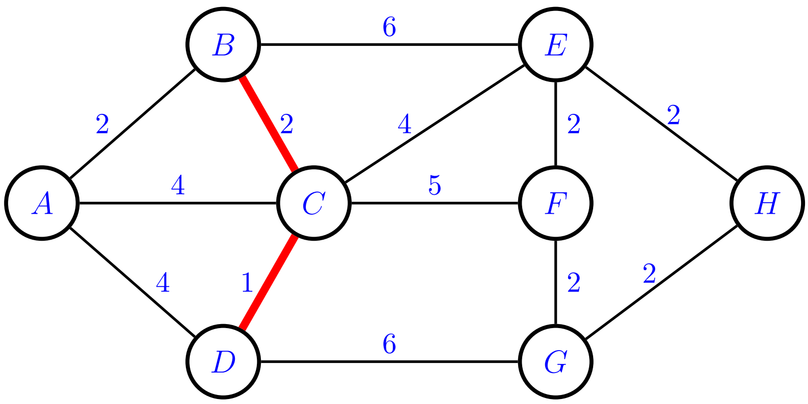
2. ad ogni iterazione si selezionano i lati che hanno la stessa lunghezza e si sceglie quello che, aggiunto all'insieme di lati già scelti, non forma alcun ciclo;

3. all'aumentare delle iterazioni sono scelti i lati di lunghezza via via crescente.

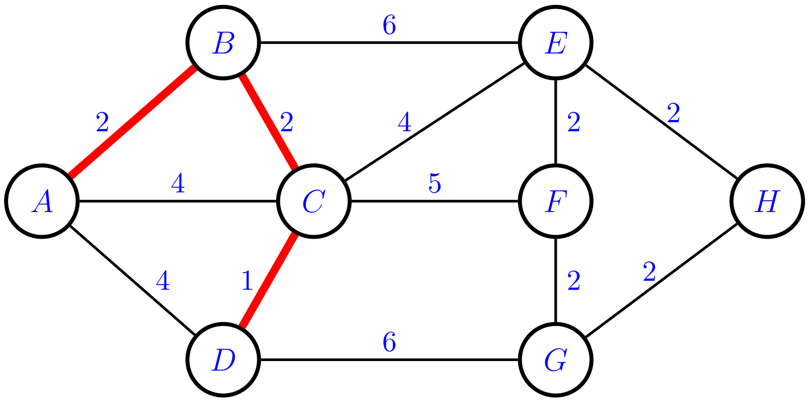
Nelle pagine seguenti vengono riportati i passi dell'algoritmo di Kruskal applicato alla stessa rete considerata nel paragrafo precedente, scegliendo CD, di lunghezza 1, come lato iniziale. I lati di colore rosso identificano quelli appartenenti all'albero che si sta determinando.



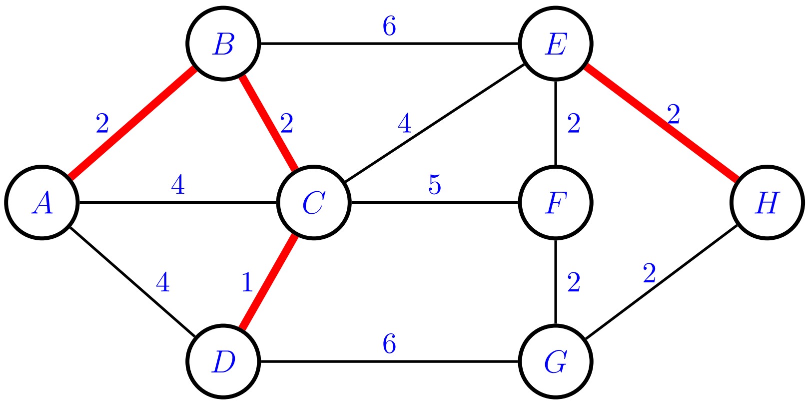
A questo punto ci sono sei lati di lunghezza 2, quindi scegliamo arbitrariamente il lati BC,



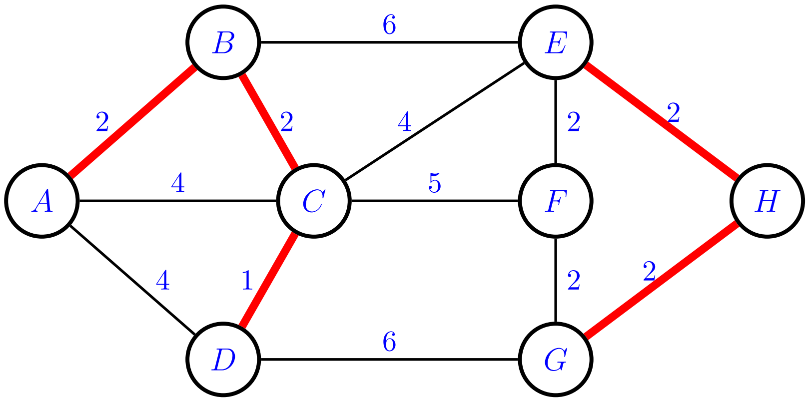
e quindi il lato AB



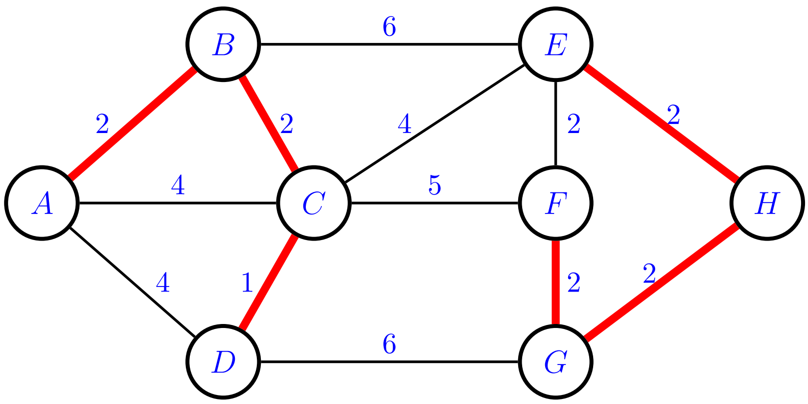
A questo punto possiamo scegliere EH (sempre arbitrariamente)



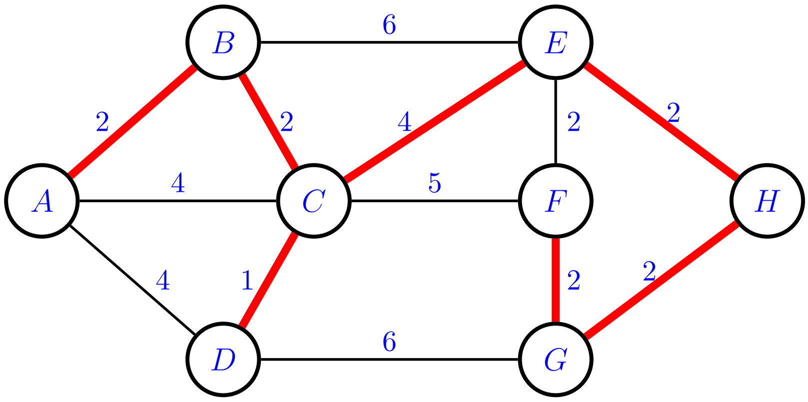
quindi GH:



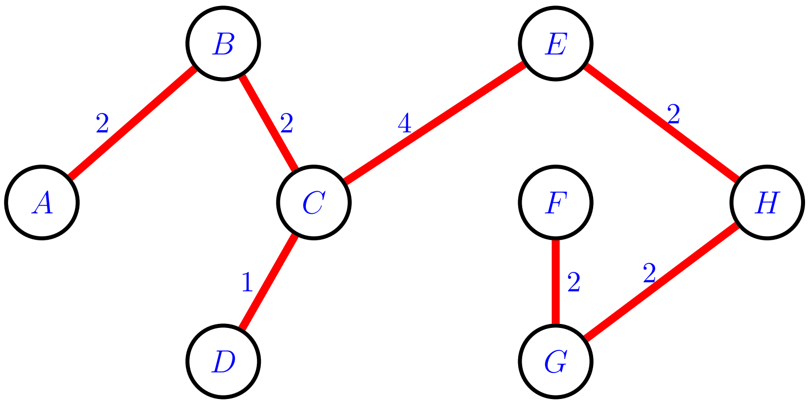
ed ora FG



A questo punto non si può scegliere il lato EF perchè si formerebbe un ciclo, quindi si devono considerare i lati di lunghezza maggiore: non essendoci lati di lunghezza 3 consideriamo quelli di lunghezza 4, ovvero AD, AC e CE. I primi due non possono essere scelti poichè in entrambi i casi si formerebbe un ciclo, mentre CE può essere scelto:



Avendo connesso tutti i nodi l'algoritmo di Kruskal termina, quindi il minimo albero ricoprente è il seguente:

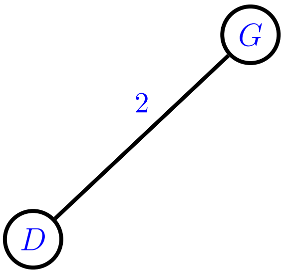


Esempio 4.2.1 *Sia assegnata una rete non orientata composta da 7 nodi individuati con lettere da A a G, tale che le distanze tra i questi sono riportate nella seguente tabella:*

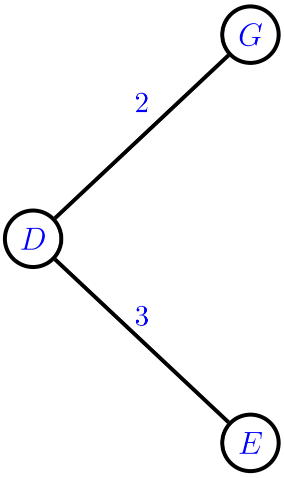
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
A		*10*	*8*	*6*	*4*	*4*	*5*
B			*10*	*11*	*10*	*4*	*5*
C				*7*	*4*	*10*	*6*
D					*3*	*7*	*2*
E						*8*	*5*
F							*6*

Determinare il minimo albero ricoprente.

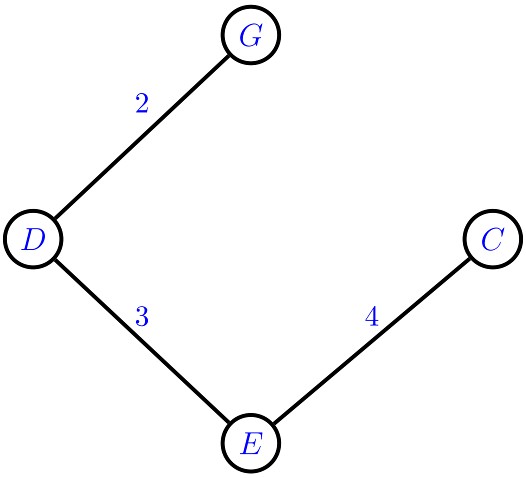
Applichiamo l'algoritmo di Prim identificando innanzitutto il collegamento più breve, ovvero DG, quindi questo è il primo lato dell'albero che stiamo cercando



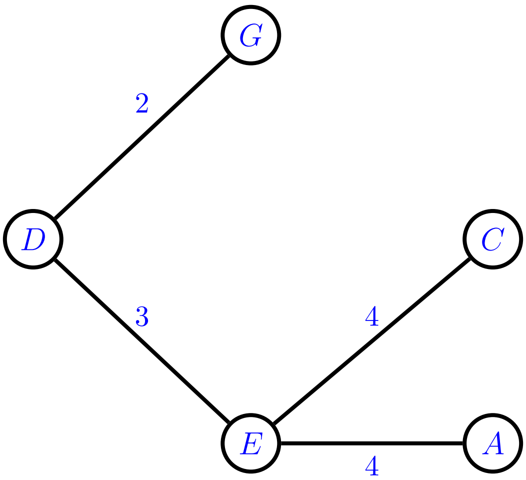
Il nodo più vicino a D o a G è in nodo E, quindi il lato DE viene aggiunto all'albero.



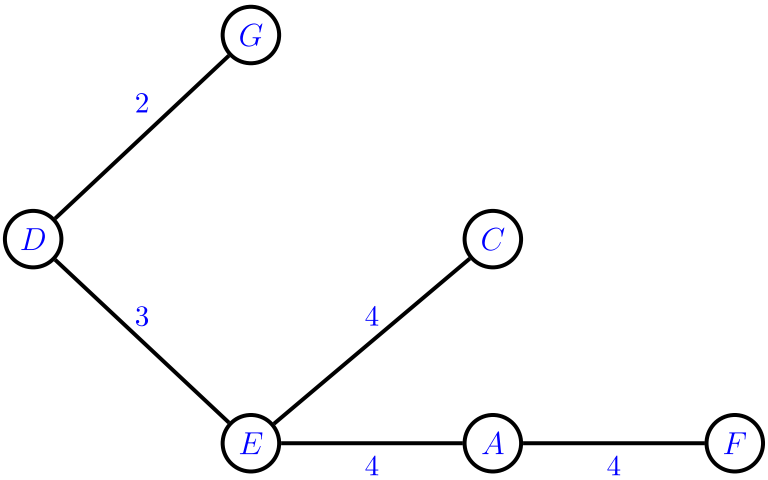
I nodi più vicini sono C e A, entrambi connessi a E, scegliamo il latco EC.



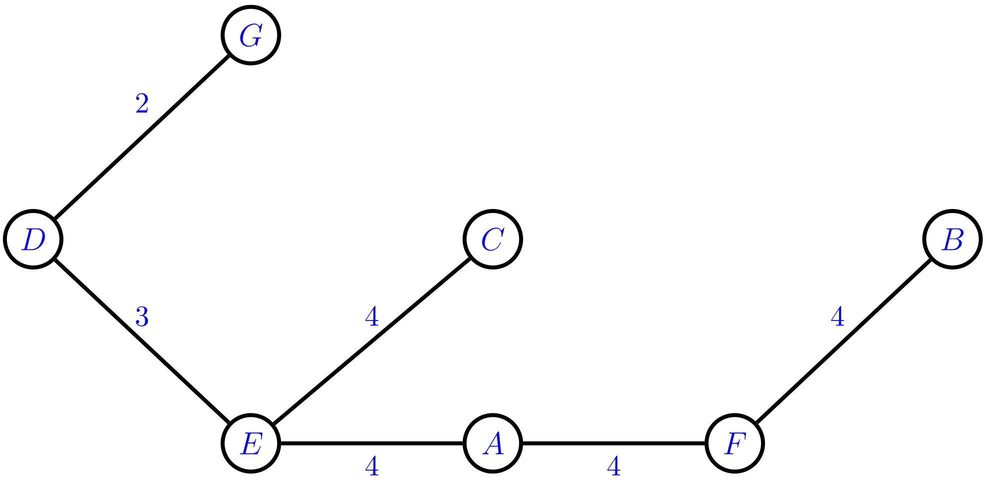
E adesso scegliamo il lato EA:



Adesso si sceglie il nodo F, connesso al nodo A da un lato di lunghezza 4.



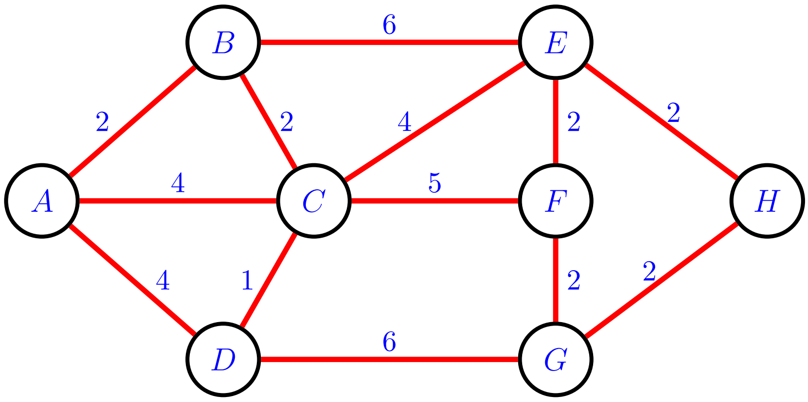
Resta il nodo B il cui collegamento più vicino è con il nodo F.



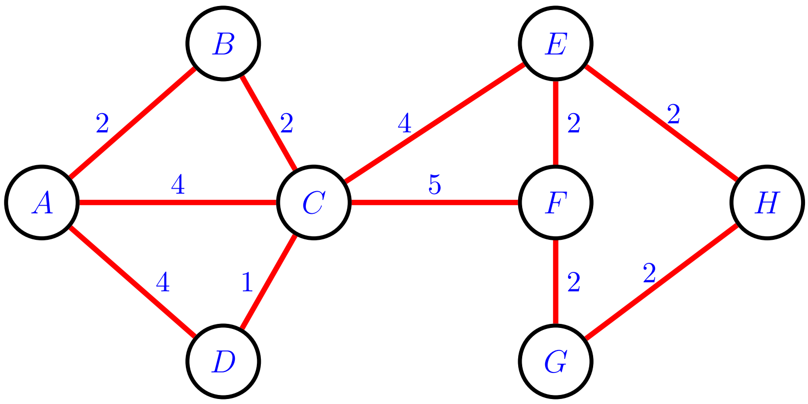
L'applicazione del metodo di Kruskal avrebbe portato alla scelta della stessa sequenza di lati e quindi al medesimo risultato.

4.2.3 Il Metodo Reverse-Delete

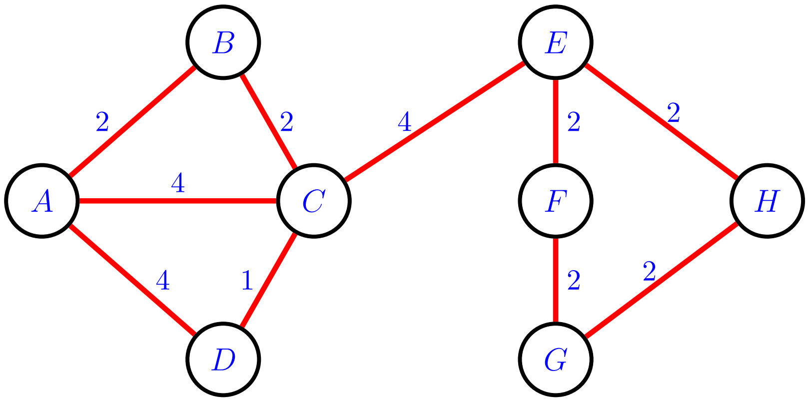
Il metodo Reverse-Delete è una variante dell'algoritmo di Kruskal in cui, però, si parte dall'analisi dei lati che hanno un costo maggiore, che vengono progressivamente cancellati, a meno che l'eliminazione di un arco non implichi la perdita della connettività della rete.
Consideriamo la stessa rete di un esempio visto in precedenza.



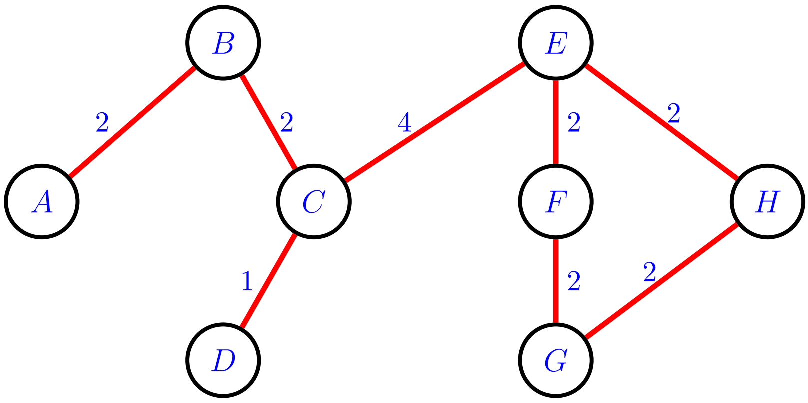
Cancelliamo per primi i lati BE e DG di lunghezza 6



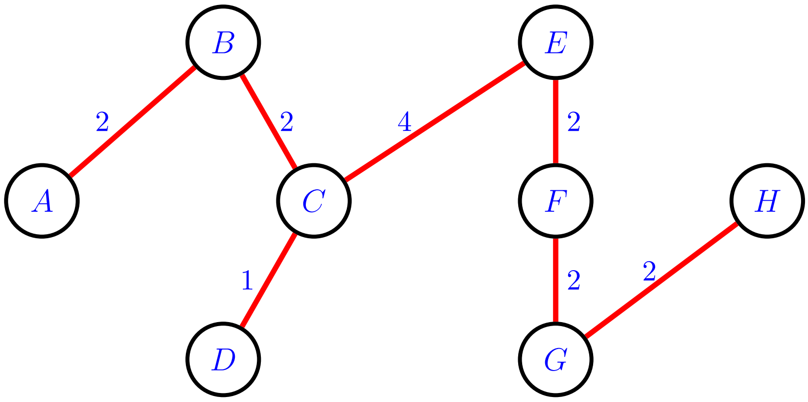
Cancelliamo ora l'unico lato di lunghezza 5, ovvero CF.



Passando ai lati di lunghezza 4 possiamo cancellare AC e AD ma non CE poichè si renderebbe la rete non connessa.



Per ottenere il minimo albero ricoprente è sufficiente cancellare uno dei seguenti lati di lunghezza 2: EF, FG, GH ed EH, per esempio quest'ultimo.



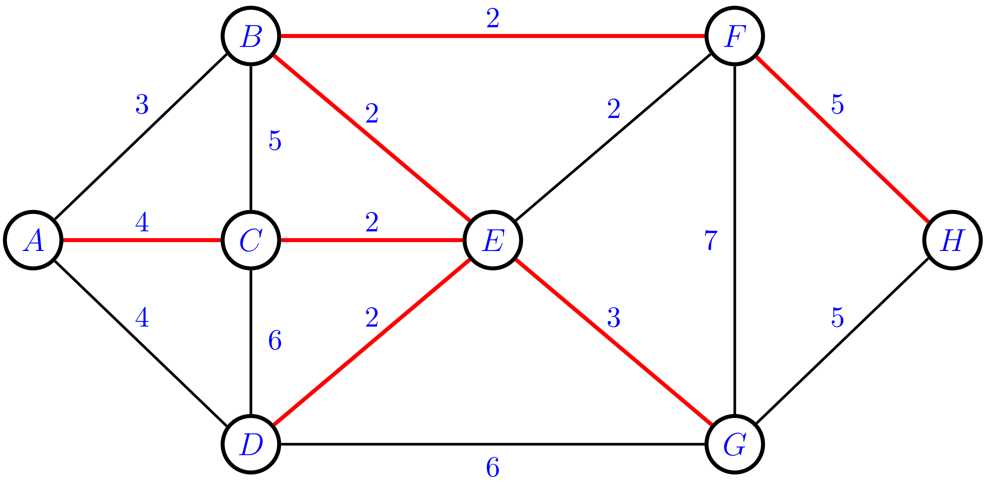
Se la rete e interamente connessa, come nell'esempio 4.2.1, risulta essere complicata applicare il metodo Reverse-Delete in quanto non avendo a disposizione la rappresentazione grafica della rete pertanto risulta molto complesso (anche se non impossibile) riuscire a riconoscere quali lati non devono essere cancellati per evitare di rendere la rete non connessa.

4.2.4 Condizione di ottimalità del minimo albero ricoprente

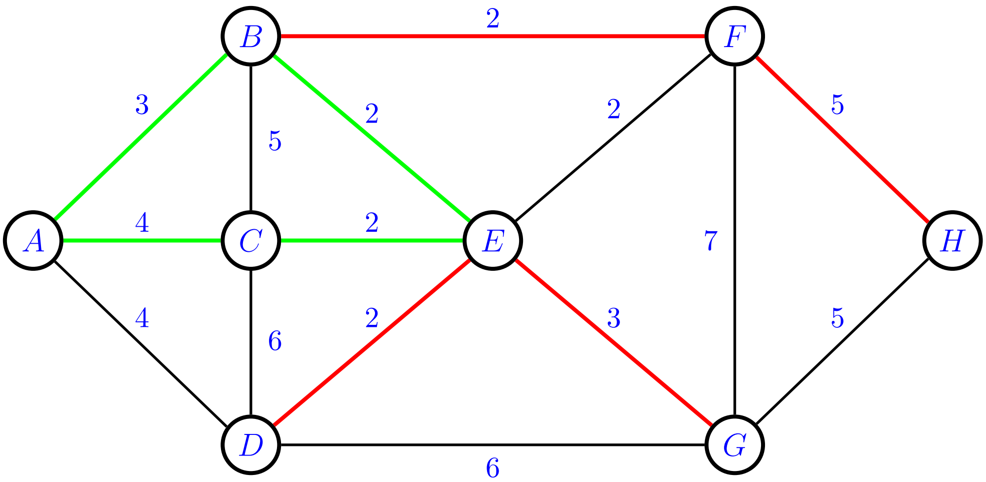
Assegnato un grafo non orientato $G = (V, A)$ e supponendo di aver determinato un albero $G' = (V, T)$ potrebbe essere utile stabilire un criterio per stabilire se G' sia un minimo albero ricoprente. Per tale ragione è fondamentale la seguente definizione.

Definizione 4.2.1 *Sia $G' = (V, T)$ un albero definito sul grafo non orientato $G = (V, A)$, un lato $\mathfrak{t} \notin T$ è un lato di diminuzione di G' se nel ciclo che si forma aggiungendo $\mathfrak{t}$ a T esiste un lato $\mathfrak{m} \in T$ avente lunghezza superiore a quella di $\mathfrak{t}$.*

Consideriamo il seguente grafo sul quale è stato evidenziato, in rosso, un albero comprendente tutti i nodi



Il lato AB è un lato di diminuzione per tale albero perchè se fosse aggiunto ad esso si creerebbe il ciclo composto dai lati AB, BE, CE e AC in cui è presente il lato AC la cui lunghezza è superiore a quella di AB :



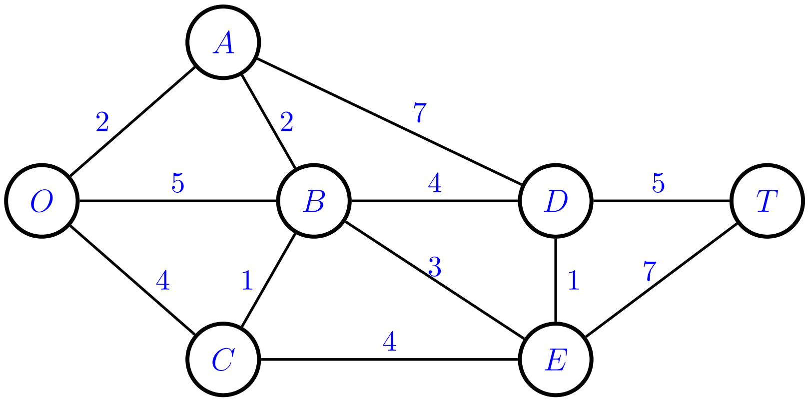
Questo significa che l'albero evidenziato in rosso non era sicuramente il minimo albero ricoprente poichè aggiungendo il lato AB e cancellando il lato AC si ottiene un albero ricoprente di lunghezza complessiva inferiore.

4.3 Il Problema di Cammino Minimo

Il problema di cammino minimo viene definito su reti connesse, sia orientate che non orientate, in cui sono presenti due nodi speciali chiamati origine e destinazione, ed indicati di solito con O e T rispettivamente. Ad ogni arco è inoltre associato un numero positivo (detto lunghezza dell'arco). L'obiettivo è determinare il cammino che unisce i nodi O e T con la lunghezza complessiva minima. La lunghezza del cammino è la somma delle lunghezze degli archi che lo compongono.

4.3.1 L'algoritmo di Dijkstra

L'algoritmo di Dijikstra è un metodo di tipo iterativo (cioè consiste in una serie di operazioni che vengono ripetute un certo numero di volte finchè non si arriva alla soluzione del problema), e consiste nello scegliere, ad ogni iterazione, il nodo più vicino all'origine tra quelli non ancora scelti. Nelle iterazioni successive si scelgono i nodi che sono progressivamente più lontani dall'origine (alla prima iterazione si sceglie semplicemente il nodo più vicino all'origine). Nel dettaglio l'algoritmo procede nel seguente modo:
nella $k-$esima iterazione si considerano i nodi più vicini al nodo origine (già scelti ai passi precedenti), e che per questo sono detti appunto nodi scelti. Tra questi si considerano quelli che sono direttamente connessi a nodi non ancora scelti e che sono detti nodi non scelti. Tra i nodi non scelti si considerano quelli più vicini ai nodi già scelti. Tali nodi sono detti nodi candidati. Tra questi viene scelto il più vicino all'origine. L'algoritmo termina quando viene scelto il nodo destinazione.
Consideriamo ora la seguente rete non orientata nella quale vogliamo calcolare il cammino minimo dall'origine alla destinazione.



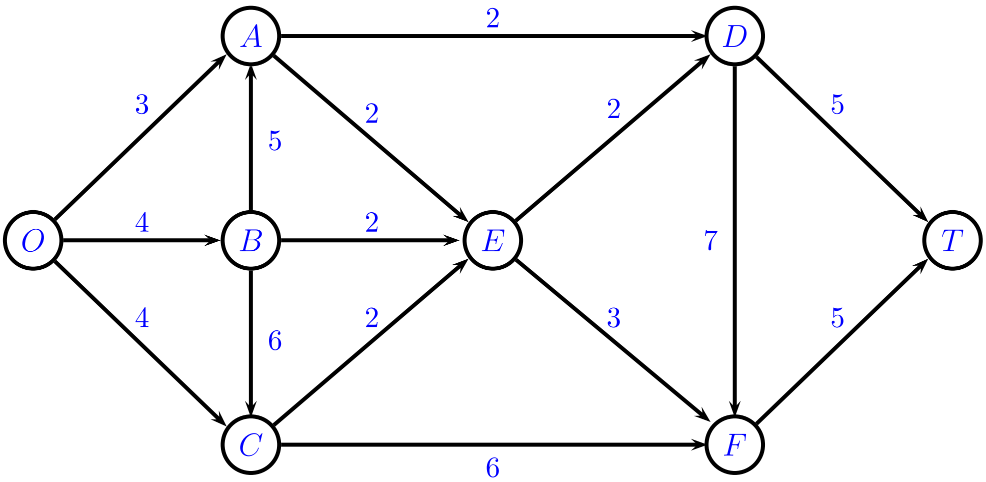
L'applicazione dell'algoritmo di Dijkstra viene descritta utilizzando una tabella composta da sette colonne e da un numero di righe uguale al numero di iterazioni richieste. Nella prima colonna della tabella è riportato l'indice dell'iterazione corrente, nella seconda colonna sono riportati i nodi appartenenti all'insieme di quelli già scelti nelle precedenti iterazioni (all'inizio solo il nodo O) e che sono direttamente collegati a nodi non ancora scelti. Per ciascuno di tali nodi viene individuato uno (o più) nodi candidati, ovvero quei nodi, non ancora scelti, ad esso più vicini, e che sono riportati nella terza colonna. Per ciascuno dei nodi candidati viene riportata nella quarta colonna la sua distanza dall'origine (cioè la somma tra la distanza del nodo scelto dall'origine e la distanza del nodo scelto da quello candidato). A questo punto, confrontando tutti i valori riportati nella quarta colonna, viene scelto il nodo candidato (o i nodi candidati) più vicino all'origine, e che viene riportato nella quinta colonna. La distanza viene riportata nella sesta colonna, mentre gli ultimi archi selezionati sono scritti nella settima colonna.

k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	A	2	A	2	OA
2	O A	C B	4 $2+2=4$	C B	4 4	OC AB
3	A B C	D E E	$2+7=9$ $4+3=7$ $4+4=8$	E	7	BE
4	A B E	D D D	$2+7=9$ $4+4=8$ $7+1=8$	D	8	BD ED
5	D E	T T	$8+5=13$ $7+7=14$	T	13	DT

Osservando la penultima colonna dell'ultima riga della tabella si determina la lunghezza del cammino minimo che parte da O e arriva a T. Per determinare gli archi che compongono il cammino minimo si deve partire dal nodo destinazione T nell'ultima colonna della tabella e, procedere a ritroso, individuando i nodi che sono stati raggiunti alle diverse iterazioni, In questo caso per arrivare a T siamo passati dal nodo D (infatti l'arco finale è proprio DT). Per arrivare a D siamo passati dai nodi B ed E (evidentemente ci sono più cammini minimi con la medesima lunghezza). In definitiva, in questo modo, si trovano due cammini minimi entrambi di lunghezza 13:

$$O \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow T$$
$$O \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow T.$$

Esempio 4.3.1 *Determinare il cammino minimo della seguente rete che unisce i nodi O e T:*

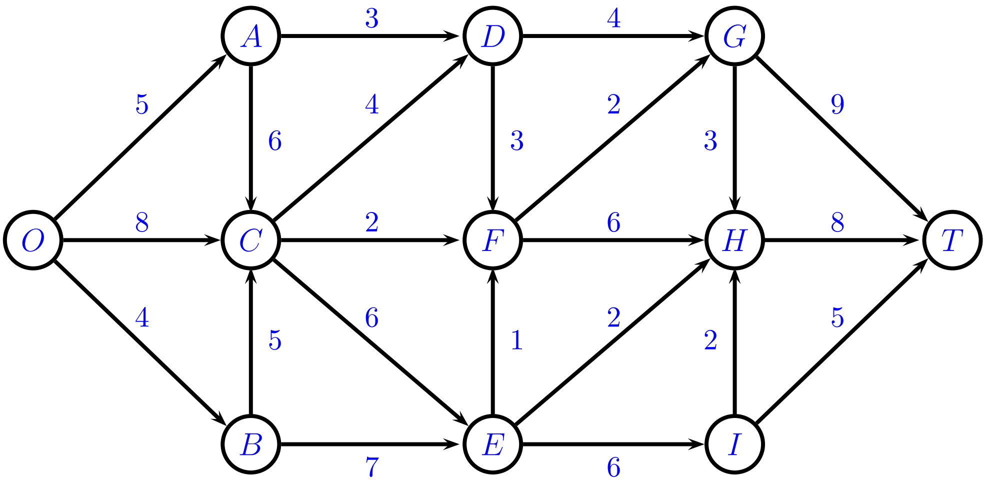


k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale da O	$k-$esimo nodo scelto	Distanza minima da O	Ultimo arco
1	O	A	3	A	3	OA
2	O	B	4	B	4	OB
		C	4	C	4	OC
	A	D	$3+2=5$			
		E	$3+2=5$			
3	A	D	$3+2=5$	D	5	AD
		E	$3+2=5$	E	5	AE
	B	E	$4+2=6$			
	C	E	$4+2=6$			
4	C	F	$4+6=10$	F	8	EF
	E	F	$5+3=8$			
	D	T	$5+5=10$			
5	D	T	$5+5=10$	T	10	DT
	F	T	$8+5=13$			

Abbiamo trovato un unico cammino minimo di lunghezza 10:

$$O \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow T.$$

Esempio 4.3.2 *Determinare il cammino minimo della seguente rete che unisce i nodi O e T:*

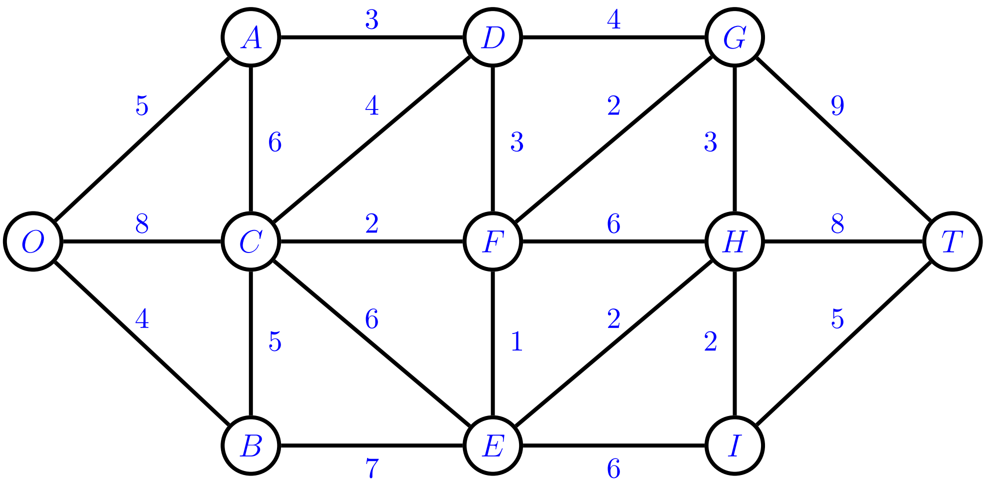

A
D
G
O
C
F
H
T
B
E
I
3
4
5
4
6
3
2
3
9
8
2
6
8
4
5
6
1
2
2
5
7
6

k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale	$k-$esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
1	O	B	4	B	4	OB
2	O B	A C	5 $4+5=9$	A	5	OA
3	O A B	C D C	8 $3+5=8$ $4+5=9$	C D	8	OC AD
4	B C D	E F F	$4+7=11$ $8+2=10$ $8+3=11$	F	10	CF
5	B C D F	E E G G	$4+7=11$ $8+6=14$ $8+4=12$ $10+2=12$	E	11	BE
6	D F E	G G H	$8+4=12$ $10+2=12$ $11+2=13$	G	12	DG FG
7	F E G	H H H	$10+6=16$ $11+2=13$ $12+3=15$	H	13	EH
8	E G H	I T T	$11+6=17$ $12+9=21$ $13+8=21$	I	17	EI
9	G H I	T T T	$12+9=21$ $13+8=21$ $17+5=22$	T	21	GT HT

Abbiamo trovato tre possibili cammini minimi di lunghezza 21:

$$\begin{array}{l} O \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow G \longrightarrow T \\ O \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow T \\ O \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow T. \end{array}$$

Esempio 4.3.3 *Determinare il cammino minimo della stessa rete dell'esercizio precedente supponendo che gli archi non siano orientati:*



k	Nodi scelti alle iterazioni precedenti	Nodi candidati	Distanza totale	$k-$esimo nodo vicino	Distanza minima	Ultimo arco
1	O	B	4	B	4	OB
2	O B	A C	5 $4+5=9$	A	5	OA
3	O A B	C D C	8 $3+5=8$ $4+5=9$	C D	8	OC AD
4	B C D	E F F	$4+7=11$ $8+2=10$ $8+3=11$	F	10	CF
5	B C D F	E E G E	$4+7=11$ $8+6=14$ $8+4=12$ $10+1=11$	E	11	BE FE
6	D F E	G G H	$8+4=12$ $10+2=12$ $11+2=13$	G	12	DG FG
7	F E G	H H H	$10+6=16$ $11+2=13$ $12+3=15$	H	13	EH
8	E G H	I T I	$11+6=17$ $12+9=21$ $13+2=15$	I	15	HI
9	G H I	T T T	$12+9=21$ $13+8=21$ $15+5=20$	T	20	IT

Abbiamo trovato due possibili cammini minimi di lunghezza 20:

$$O \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow I \longrightarrow T$$
$$O \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow I \longrightarrow T$$

Rispetto all'esercizio precedente osserviamo che il cammino minimo ha lunghezza inferiore ma attraversa un numero di archi superiore.

4.4 Ottimizzazione nella gestione dei progetti

Una delle principali applicazioni delle reti è nel campo della gestione dei progetti. Un progetto (per esempio la costruzione di una casa, l'organizzazione di una campagna pubblicitaria, oppure la realizzazione di un film o di uno spettacolo televisivo) può essere vista come un insieme di attività che devono essere eseguite rispettando una serie di vincoli di precedenza. Ogni attività ha una certa durata e richiede una determinata quantità di risorse, che possono essere persone, macchinari, denaro, o più semplicemente, tempo. Un evento invece fa riferimento ad un determinato insieme di attività che devono essere portate a termine in un determinato periodo di tempo per permettere l'inizio di un'altra serie di attività. Una metodologia utilizzata per gestire un progetto complesso è appunto l'uso delle cosiddette Tecniche Reticolari, i cui scopi sono principalmente:

1. Stabilire l'istante iniziale di ogni attività;
2. Permettere l'analisi dei ritardi ovvero determinare la durata complessiva del progetto e delle attività, nonchè valutare se il ritardo nell'esecuzione di una determinata attività possa causare un ritardo nell'esecuzione dell'intero progetto.

Gli scopi sono determinati conoscendo solo tre fattori:

1. l'insieme delle attività che formano il progetto;
2. la durata di ciascuna attività;
3. le precedenze temporali, ovvero le relazioni tra le diverse attività.

Le tecniche più utilizzate sono descritte nel seguente paragrafo.

4.4.1 PERT/CPM

Le reti costituiscono uno strumento grafico molto potente e semplice per rappresentare (e pianificare) alcune attività da svolgere nell'ambito della realizzazione di un determinato progetto. Infatti la complessità nella realizzazione di un progetto può essere studiata in modo migliore scomponendolo in attività elementari e valutando le relazioni tra queste ed i requisiti di cui necessitano per essere portate a termine. Il PERT (Program Evaluation and

Review Technique) ed il CPM (Critical Path Method) sono appunto due tecniche che consentono di fare ciò. La differenza tra le due tecniche è che il PERT considera lo svolgimento delle attività da un punto di vista statistico considerando la variabilità dovuta ad elementi casuali e considerando esclusivamente la minimizzazione del tempo di esecuzione del progetto. La tecnica fu utilizzata negli Stati Uniti per la prima volta intorno al 1957 durante la realizzazione del progetto Polaris (un missile balistico a testata nucleare destinato ad equipaggiare i sommergibili atomici). In tale circostanza lo scopo fu quello di portare a compimento il progetto nel più breve tempo possibile trascurando completamente i costi (elevati) che esso richiedeva. Il CPM valuta anche i costi ed utilizza stime di tipo deterministico per la durata dell'attività. Ci sono tuttavia alcuni passi che sono comuni alle due tecniche. Il primo è quello di scomporre il progetto in attività più piccole, cercando di mantenere un grado di dettaglio possibilmente omogeneo. Ad ogni attività del progetto deve essere possibile attribuire parametri certi come il tempo di realizzazione e/o il costo. Il secondo passo è quello di determinare i vincoli tra le attività elementari, cioè l'ordine con il quale le attività devono essere eseguite. Per esempio si deve stabilire che le attività A, B e C devono precedere l'attività D, che questa a sua volta deve precedere E e F e così via. Il progetto può essere descritto da due tipologie di rete:

1. Rete AOA (Activity-On-Arc): un'attività è rappresentata da un arco. Ogni nodo è usato per separare un'attività (arco uscente) da ciascuna delle attività predecessori (archi entranti). La sequenza degli archi mostra le relazioni di precedenza tra le attività;

2. Rete AON (Activity-On-Node): un'attività è rappresentata da un nodo. Gli archi sono usati per rappresentare le relazioni di precedenza esistenti tra le attività.

Supponiamo che un determinato progetto sia stato scomposto in 10 attività elementari e che le relazioni di precedenza e la durata di queste sono riportate nella tabella 4.1. Utilizzando il PERT ad ogni attività sarebbero associati tre parametri aggiuntivi di tipo statistico:

1. stima ottimistica (t_o): ovvero il tempo richiesto per eseguire un'attività nel migliore dei casi (cioè se tutto ha funzionato bene);

2. stima pessimistica (t_p): ovvero il tempo richiesto nel caso peggiore;

3. stima più probabile (t_m): ovvero il tempo richiesto nella maggior parte dei casi.

Il calcolo di queste stime viene effettuato da esperti delle specifiche attività basandosi sullesperianza e sulle conoscenze possedute. In base ad analisi di tipo statistico il tempo atteso per l'esecuzione di un'attivita, tenendo conto di tutti e tre i parametri stimati, è fornito dalla seguente formula

$$t_e = \frac{1}{6}\left(t_o + 4t_m + t_p\right).$$

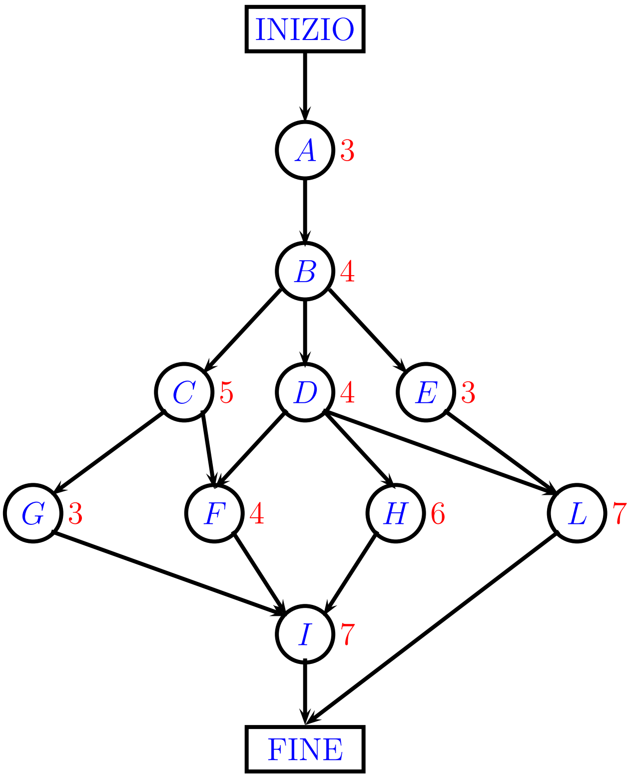
Se il progetto fosse quello di costruire una casa esso potrebbe articolarsi, per esempio, nelle seguenti attività elementari:

1. Gettata scavo e fondamenta
2. Realizzazione muri esterni
3. Costruzione del tetto
4. Realizzazione muri interni
5. Realizzazione impianto idrico
6. Realizzazione rivestimenti esterni
7. Pitturazione esterni
8. Realizzazione impianto elettrico
9. Pavimentazione
10. Pitturazione interni

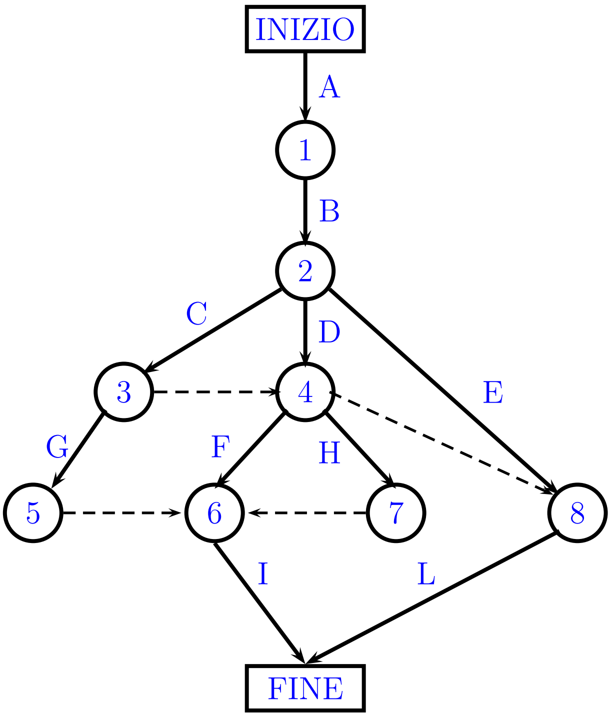
Visualizziamo ora il progetto in questione utilizzando la rappresentazione AON:

Attività	Predecessori diretti	Durata prevista
A	$--$	3 settimane
B	A	4 settimane
C	B	5 settimane
D	B	4 settimane
E	B	3 settimane
F	C, D	4 settimane
G	C	3 settimane
H	D	6 settimane
I	F, G, H	7 settimane
L	D, E	7 settimane

Tabella 4.1:



Rappresentiamo ora lo stesso progetto utilizzando una rete AOA:



Nella precedente figura appare chiaro come la rappresentazione AOA sia ben più complessa rispetto alla AON. Infatti è stato necessario introdurre una serie di attività fittizie (ovvero dummy, indicate dai collegamenti tratteggiati) per rappresentare correttamente i legami temporali tra queste. Si ritiene che le reti AON siano più facili da costruire, più semplici da rivedere e molto più comprensibili rispetto alle reti AOA.
Ha senso chiedersi a questo punto qual è il tempo richiesto dal progetto per essere realizzato. Poichè ci sono alcune attività che possono essere svolte in parallelo è chiaro che tale tempo non coincide con la somma delle durate delle attività ma è legato alla lunghezza dei cammini lungo la rete. In una rete di progetto si devono considerare i cammini che partono dal nodo iniziale e arrivano a quello finale. La lunghezza è la somma delle durate (teoriche) delle attività che fanno parte del cammino. Nella tabella 4.2 sono riportati i vari cammini dell'esempio introdotto in precedenza con le relative lunghezze. La durata del progetto non può essere inferiore alla lunghezza di un cammino ma potrebbe essere superiore. Consideriamo infatti l'attività L che è preceduta da D e da E e che fa parte di due cammini. È chiaro che L potrà essere eseguita non dopo 10 settimane (cioè dopo le attività A-B-E) ma dopo 11

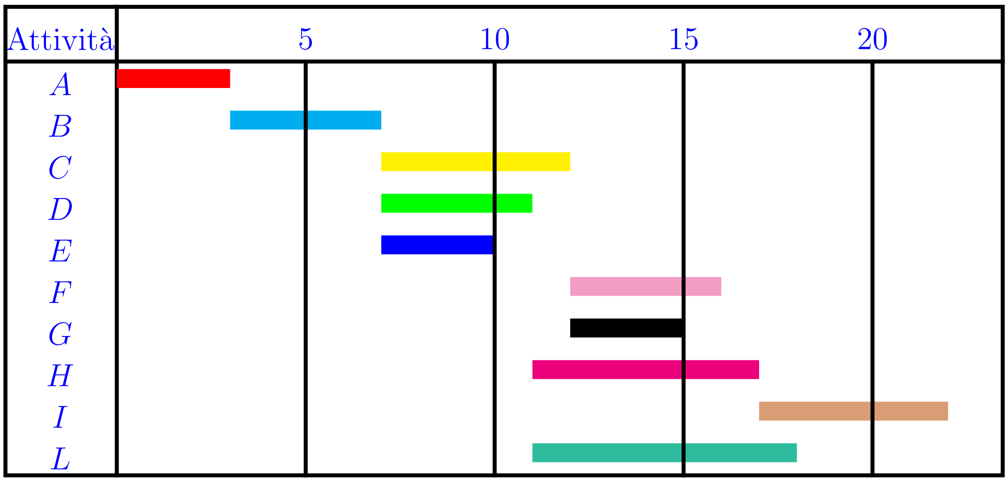
Cammino	Lunghezza
INIZIO-A-B-C-G-I-FINE	22 settimane
INIZIO-A-B-C-F-I-FINE	23 settimane
INIZIO-A-B-D-F-I-FINE	22 settimane
INIZIO-A-B-D-H-I-FINE	24 settimane
INIZIO-A-B-D-L-FINE	18 settimane
INIZIO-A-B-E-L-FINE	17 settimane

Tabella 4.2:

settimane (cioè dopo lo svolgimento delle attività A-B-D che richiedono più tempo). La durata del progetto è uguale alla lunghezza del cammino più lungo, che prende il nome di cammino critico. Nell'esempio visto esiste un cammino critico che ha lunghezza pari a 24 settimane. Le attività presenti in questo cammino devono essere eseguite senza ritardi pena l'allungamento dei tempi di realizzazione del progetto. Nell'ipotesi che si voglia accorciare tale tempo la tecnica CPM consente di farlo utlizzando la cosiddetta analisi del trade-off tempi-costi.

I Diagrammi di Gantt

Un modo grafico alternativo per rappresentare le attività nella tecnica PERT sono, appunto, i diagrammi di Gantt, che mettono in evidenza le connessioni e la collocazione temporali tra le attività in relazione al periodo in cui il progetto viene realizzato. Nel diagramma viene riportato l'elenco delle attività, ad ognuna delle quali viene associato graficamente il periodo in cui dovrebbe essere realizzata. In relazione all'esempio visto prima il Diagramma di Gantt è il seguente.



Il diagramma di Gantt consente inoltre di analizzare visivamente il cammino critico ma anche di verificare le conseguenze di possibili ritardi nella realizzazione di parti del progetto. Nell'esempio in questione si può osservare che un ritardo nella realizzazione dell'attività L inferiore alle 5 settimane non avrebbe alcuna conseguenza sulla realizzazione globale del progetto.

4.4.2 Trade-off tempi-costi per le attività

Concetto chiave di questo approccio è il cosiddetto crashing. Il crashing di un'attività indica la possibilità di ridurre il suo tempo di realizzazione seppur utilizzando procedure particolarmente costose. Il crashing di un progetto significa applicare tale criterio ad una o più attività al fine di ridurre il tempo di realizzazione del progetto. Il metodo CPM del trade-off tempi-costi consente di determinare di quanto ridurre la durata di ogni attività per ridurre la durata del progetto. La tabella delle attività del CPM è molto più complessa di quella del PERT perchè per ogni attività si deve indicare il periodo di crash, cioè di quanto può essere ridotta la durata, il costo normale, il costo di crash (che è superiore al costo normale), la riduzione massima dei tempi ed il costo aggiuntivo per ogni periodo di tempo (giorno o settimana) risparmiato. In un grafico tempi-costi il punto normale mostra la durata ed il costo quando l'attività viene portata a termine normalmente. Il punto crash indica la durata ed il costo quando l'attività viene accelerata senza badare a spese pur di ridurre la sua durata. La tecnica CPM assume che i tempi e i costi di crash possano essere noti con una buona approssimazione. Per determinare l'attività (o le attività) da sottoporre a crash si deve costruire una tabella in

Attività	Tempi		Costi		Riduzione	Costo per
	Normali	Crash	Normali	Crash	massima	sett. risp.
A	3	2	100	160	1	60
B	4	3	120	180	1	60
C	5	4	150	200	1	50
D	4	3	200	280	1	80
E	3	2	120	160	1	40
F	4	3	50	80	1	30
G	3	2	60	80	1	20
H	6	4	200	300	2	50
I	7	5	200	300	2	50
L	7	4	100	310	3	70

Tabella 4.3:

cui ad ognuna di queste vengano associati il tempo normale e di crash, i costi normale e di crash, la riduzione massima dei tempi ed il costo risparmiato per unità di tempo. Spesso un crashing di tutte le attività è un'operazione che, pur riducendo notevolmente i tempi di esecuzione del progetto, avrebbe, in generale, costi proibitivi, quindi è necessario determinare le attività in base al tempo del quale si vuole ridurre la durata del progetto e del costo aggiuntivo che non deve incidere in modo significativo sul costo complessivo. Per questa tecnica la tabella introdotta in precedenza per descrivere le attività deve essere modificata aggiungendo le informazioni legate ai costi e ai tempi di crash (vedere tabella 4.3). Supponendo di dover eseguire il progetto utilizzando un budget non superiore a 1500 ed in un periodo di tempo non superiore a 21 settimane osserviamo che, senza effettuare il crash di alcuna attività, il costo del progetto è pari a 1300 mentre abbiamo visto che il cammino critico ha lunghezza pari a 24 settimane, quindi è necessario effettuare il crash di alcune attività. La tecnica dell'analisi marginale dei costi prevede di effettuare il crash solo sulle attività appartenenti al cammino critico e partendo da quelle che presentano un costo inferiore per settimana risparmiata. Nell'esempio introdotto in precedenza le attività da considerare prima sono I e H. Sottoponendo a crash l'attività I per due settimane il costo complessivo sale a 1400 mentre il numero di settimane scende a 22. Poichè non sono stati raggiunti gli obiettivi prefissati si continua sottoponendo a crash anche l'attività H per una settimana in modo tale che il costo arriva a 1450 ed il

numero di settimane necessarie scende a 21. Avendo raggiunto il limite temporale previsto per la realizzazione del progetto non è necessario sottoporre a crash nessun'altra attività.
Tale analisi presenta lo svantaggio di essere molto dispendiosa se la rete è molto complessa. In alternativa all'analisi marginale dei costi si può utilizzare la programmazione lineare per risolvere il problema. Definiamo quindi le seguenti variabili decisionali:

$$x_j = \text{riduzione della durata della } j\text{−esima attività}, \qquad j = A, B, C, \ldots, I$$

e risolviamo il problema di minimizzare il costo aggiuntivo dovuto al crash delle attività:

$$\min Z = 60x_A + 60x_B + 50x_C + \ldots$$

I vincoli per le variabili decisionali sono quelli di nonnegatività:

$$x_A, x_B, x_C, \ldots, x_I \geq 0$$

a cui dobbiamo aggiungere quelli relativi al massimo crash consentito ed evidenziato nella tabella 4.3:

$$x_A \leq 1,\ x_B \leq 1, \ldots, x_I \leq 3.$$

Indichiamo ora con y_{FINE} il tempo di durata del progetto. Vogliamo che sia

$$y_{\text{FINE}} \leq 21.$$

e definiamo le ulteriori variabili

$$y_j = \text{tempo di inizio della } j\text{−esima attività}, \qquad j = B, C, \ldots, I$$

con $y_A = 0$. Ovviamente dobbiamo porre dei vincoli sui tempi di inizio delle attività. Un attività generica deve iniziare nel momento che si ottiene sommando al tempo di inizio del suo predecessore, la durata del predecessore e sottraendo il tempo di riduzione dovuto al crash, per esempio:

$$y_B \geq y_A + \text{tempo di } A - x_A$$

$$\begin{aligned}
y_B &\geq y_A + 4 - x_A \\
y_C &\geq y_B + 4 - x_B \\
y_D &\geq y_B + 4 - x_B \\
y_E &\geq y_B + 4 - x_B \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e così via. Se un'attività ha più predecessori si procede in modo analogo, aumentando però il numero di vincoli:

$$\begin{array}{ll} y_F & \geq y_C + 5 - x_C \\ y_F & \geq y_D + 4 - x_D \\ \vdots & \\ y_{\text{FINE}} & \geq y_I + 7 - x_I \\ y_{\text{FINE}} & \geq y_L + 7 - x_L. \end{array}$$

Capitolo 5

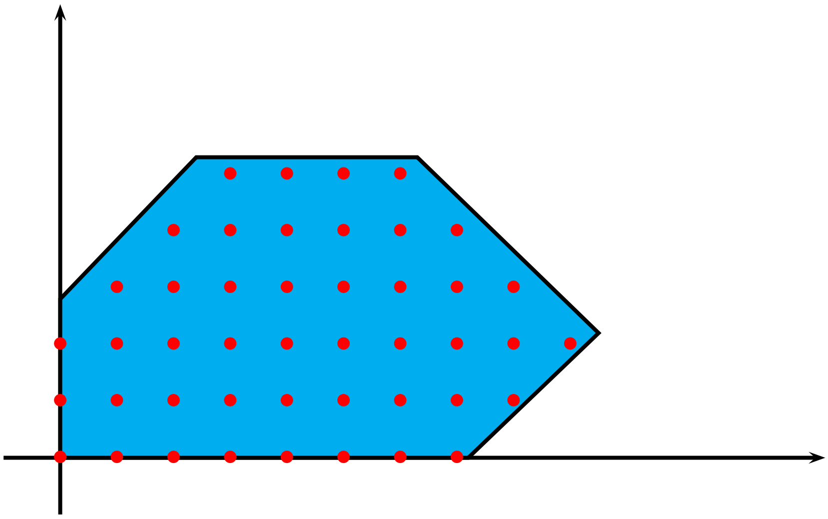
Programmazione Lineare Intera

5.1 Introduzione

Un problema di programmazione lineare intera (in breve PLI) si presenta nella forma

$$
\begin{aligned}
&\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\
&x_j \text{ variabile intera, per } j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

In questo capitolo affronteremo il problema della risoluzione di problemi di programmazione lineare soprattutto in forma standard considerando che i metodi che saranno descritti possono essere agevolmente adattati anche a problemi in forma non standard. Nella programmazione intera il maggiore problema che si presenta è che la regione ammissibile è composta da un numero discreto (ovvero finito o infinitamente numerabile) di punti e non forma un insieme compatto. Nella seguente figura viene riportato un esempio di regione ammissibile definita dai vincoli del generico problema (5.1) considerando le variabili decisionali come se fossero reali e all'interno della quale sono evidenziati i punti che rappresentano invece la regione ammissibile (discreta) del problema di programmazione intera.



È evidente dalla figura che il problema non può essere risolto con i classici metodi per la programmazione lineare a variabili reali (ad esempio, il metodo del simplesso) in quanto in generale non tutti i vertici hanno coordinate intere e quindi anche il vertice ottimale non è detto che abbia coordinate intere (dipende dalla regione ammissibile e dalla funzione obiettivo) e non sempre l'approssimazione intera ottenuta per arrotondamento è ottima e/o ammissibile. Uno dei metodi risolutivi per problemi di PLI è il metodo del Branch-and-Bound, che descriveremo nel prossimo paragrafo. Il metodo consente di risolvere il problema suddividendo la regione ammissibile (e quindi l'insieme delle soluzioni) in sottoinsiemi più piccoli e risolvendo il problema in ciascuno di questi. Questa suddivisione viene fatta ricorsivamente, dividendo a loro volta i sottoinsiemi in altri, più piccoli, e riapplicando sempre la stessa procedura. In questo modo viene generato un albero di soluzioni ammissibili. La procedura termina quando non ci sono più sottoproblemi da risolvere e prendendo a questo punto la migliore soluzione ottenuta come soluzione ottima del problema di partenza. Altri problemi che rientrano nella programmazione intera sono quelli in cui le variabili decisionali possono assumere solo i valori 0 e 1. In questo caso si parla di programmazione binaria. La procedura per risolvere questi problemi sarà descritta nel successivo paragrafo.

5.2 L'algoritmo di Branch-and-Bound per Problemi di Programmazione Binaria

I problemi di programmazione binaria sono quelli in cui ogni variabile x_i è associata ad una determinata decisione e pertanto può assumre solo due valori

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se la decisione è si;} \\ \\ 0 & \text{se la decisione è no.} \end{cases}$$

Tali variabili sono dette binarie. Ogni problema di programmazione binaria con n variabili decisionali ha un numero finito di soluzioni, pari a 2^n. Queste potrebbero essere enumerate per trovare quella ottima ma il loro numero molto elevato rende tale approccio improponibile. Il metodo di Branch-and-Bound costituisce una validissima alternativa a tale procedura. Descriviamo ora le diverse fasi dell'algoritmo:

1. **Branching**, ovvero il modo di scegliere il sottoinsieme di soluzioni da esplorare;
2. **Bounding**, ovvero il calcolo di un opportuno limite per la soluzione ottima;
3. **Fathoming**, ovvero la cancellazione di alcuni sottoinsiemi di soluzioni all'interno cui si è certi non possa appartenere la soluzione ottima.

Branching

Quando si opera con variabili binarie il modo più semplice di procedere è quello di suddividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi, fissando ad ogni passo, per esempio, il valore di una delle variabili x_j, detta variabile di branching (i cui valori possibili sono chiaramente solo 0 e 1). Esistono tecniche piuttosto sofisticate per la scelta della variabile di branching, in alternativa si può seguire l'ordine naturale (cioè al primo passo si pone $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$, per poi passare a x_2, a x_3 e così via). I due valori della variabile di branching definiscono due sottoproblemi che vengono risolti in modo approssimato, come sarà descritto nel paragrafo successivo. In questo modo si definisce un vero e proprio albero, detto albero delle soluzioni, che si ramifica iterazione dopo iterazione, quando vengono definiti (e risolti) i sottoproblemi definiti attribuendo i valori alle diverse variabili di branching. Nel corso dell'algoritmo alcuni di questi problemi potranno essere tagliati (fathomed) mentre altri saranno ulteriormente suddivisi in sottoproblemi.

Bounding

Per ogni sottoproblema si deve ottenere un limite (bound) sulla soluzione ammissibile. Un modo classico per ottenere questa informazione è quello di risolvere il problema rilassato (anche detto rilassamento lineare), che viene ottenuto cancellando (o sostituendo) i vincoli che lo rendono difficile da risolvere.
Per un problema di programmazione binaria si taglia proprio il vincolo $x_j \in \{0, 1\}$ che viene sostituito dai vincoli

$$x_j \leq 1, \qquad x_j \geq 0$$

per ogni j. Per risolvere il problema rilassato si può applicare, per esempio, il metodo del simplesso (oppure anche il metodo grafico qualora il numero di variabili decisionali sia uguale a due).

Fathoming

Una volta risolto un problema rilassato un'eventualità è che esso non possa più dar luogo alla soluzione ottima, in questo caso può essere tagliato, cioè non si considerano più i sottoproblemi che esso potrebbe generare in quanto si è certi che essi non porteranno ad una soluzione migliore. Esistono tre criteri per tagliare un sottoproblema. Un primo criterio è quello di avere ottenuto una soluzione binaria del rilassamento lineare. Infatti se la soluzione ottima del rilassamento lineare è una soluzione binaria, questa deve essere soluzione ottima anche del problema di programmazione binaria. Questa soluzione deve essere memorizzata come la cosiddetta soluzione incombente (cioè la migliore soluzione ammissibile trovata finora). Si pone

$$Z^* = \text{valore di } Z \text{ per la soluzione incombente.}$$

Quindi il sottoproblema in questione non viene più preso in considerazione. Poichè Z^* è la migliore soluzione trovata finora questo suggerisce un altro criterio per tagliare un sottoproblema. Infatti se il valore ottimo della funzione obiettivo del rilassamento lineare è inferiore a Z^* allora non c'è bisogno di considerare ulteriormente tale sottoproblema.
Il terzo modo per tagliare un sottoproblema è legato al fatto che se il problema rilassato non ha soluzioni ammissibili allora a maggior ragione il problema non rilassato non può averne.
Riepilogando, i **Criteri di Fathoming** sono i seguenti:

Criterio n. 1: il limite è inferiore a Z^*;
Criterio n. 2: il rilassamento lineare del sottoproblema non ha soluzioni ammissibili;
Criterio n. 3: la soluzione ottima del rilassamento lineare ha componenti binarie.

5.2.1 Sommario dell'algoritmo di Branch-and-Bound

Riepiloghiamo i passi del metodo di Branch-and-Bound per un problema di programmazione binaria in cui si deve trovare il massimo della funzione obiettivo.

Inizializzazione:

Porre $Z^* = -\infty$. Applicare il passo di bounding, il passo di fathoming all'intero problema. Se non tagliato via allora classificarlo come problema completo ed eseguire la prima iterazione.

Singola Iterazione:

Fase 1. Branching: Tra i sottoproblemi rimanenti selezionare quello generato più di recente (oppure quello che ha il bound più grande). Generare da questo due nuovi sottoproblemi fissando la variabile di branching a 0 e 1.
Fase 2. Bounding: Per ogni sottoproblema ottenere un limite (bound) risolvendo il suo rilassamento lineare e approssimando per difetto il valore di Z della soluzione ottima risultante al più grande numero intero inferiore ad esso.
Fase 3. Fathoming: Per ogni nuovo sottoproblema applicare i 3 criteri di fathoming e scartare quelli che ne soddisfano uno.
Se uno dei sottoproblemi viene scartato in base al terzo criterio di fathoming allora si deve eventualmente aggiornare il valore della soluzione incombente Z^*.

Test di ottimalità:

Arrestare l'algoritmo quando non rimangono più sottoproblemi, la soluzione incombente è ottima, altrimenti eseguire un'altra iterazione.
Il motivo della scelta del sottoproblema creato più di recente è che durante la fase di bounding vengono risolti problemi di programmazione lineare solitamente usando il metodo del simplesso. Piuttosto che eseguire ogni volta il metodo dall'inizio conviene applicare una riottimizzazione che consiste nel modificare il tableau finale del precedente problema tenendo conto delle piccole differenze nel modello ed applicando poche iterazioni del metodo del simplesso.

Esempio 5.2.1 *Applichiamo il metodo Branch-and-Bound al seguente problema di Programmazione Lineare Binaria:*

$$\begin{array}{llll} \max\ Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 & & & \\ 6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & \leq\ 10 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq\ 0 \\ \multicolumn{4}{l}{x_j \textit{ variabile binaria per } j = 1, 2, 3.} \end{array}$$

Il primo passo dell'algoritmo è quello di risolvere il rilassamento lineare del problema completo:

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{\max\ Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3} \\ (1) & 6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & \leq\ 10 \\ (2) & -x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq\ 0 \\ (3) & x_1 & & & \leq\ 1 \\ (4) & & x_2 & & \leq\ 1 \\ (5) & & & x_3 & \leq\ 1 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

Applichiamo il metodo del simplesso introducendo 5 variabili slack.

Iterazione 0												
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	−9	−5	−6	0	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	6	3	5	1	0	0	0	0	10
x_5	(2)	0	−1	−1	1	0	1	0	0	0	0
x_6	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	-5	-6	0	0	9	0	0	9
x_4	(1)	0	0	3	5	1	0	-6	0	0	4
x_5	(2)	0	0	-1	1	0	1	1	0	0	1
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	0	0	$\frac{69}{5}$
x_3	(1)	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$
x_5	(2)	0	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$

Iterazione 3											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{76}{5}$
x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_5	(2)	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$

Soluzione del problema rilassato è $(1, 1, 1/5)$ mentre il valore della funzione obiettivo è $76/5 = 15 + 1/5$ che viene approssimato al valore intero

$$Z = 15.$$

Nessuno dei criteri di fathoming consente di tagliare il problema completo quindi scegliamo x_1 come variabile di branching e definiamo due sottoproblemi, uno in cui fissiamo $x_1 = 0$ e l'altro con $x_1 = 1$:

Sottoproblema 1
Fissato $x_1 = 0$

max $Z = 5x_2 + 6x_3$
(1) $3x_2 + 5x_3 \leq 10$
(2) $-x_2 + x_3 \leq 0$
(3) x_j variabile binaria per $j = 2, 3$;

Sottoproblema 2
Fissato $x_1 = 1$

max $Z = 9 + 5x_2 + 6x_3$
(1) $3x_2 + 5x_3 + 6 \leq 10$
(2) $-x_2 + x_3 - 1 \leq 0$
(3) x_j variabile binaria per $j = 2, 3$

ovvero

SOTTOPROBLEMA 2

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 \\ (1) & 3x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ (2) & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ (3) & x_j \text{ variabile binaria per } j = 2, 3. \end{array}$$

Risolviamo ora il sottoproblema 1 rilassato:

$$\begin{array}{lllll} \max & Z = 5x_2 + 6x_3 & & & \\ 3x_2 & +5x_3 & \leq & 10 \\ -x_2 & +x_3 & \leq & 0 \\ x_2 & & \leq & 1 \\ & x_3 & \leq & 1 \\ x_2, x_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

Applichiamo il metodo del simplesso introducendo 4 variabili slack.

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	−5	−6	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	3	5	1	0	0	0	10
x_5	(4)	0	−1	1	0	1	0	0	0
x_6	(2)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(3)	0	0	1	0	0	0	1	1

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-11	0	0	6	0	0	0
x_4	(1)	0	8	0	1	-5	0	0	10
x_3	(4)	0	-1	1	0	1	0	0	0
x_6	(2)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(3)	0	1	1	0	-1	0	1	1

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	6	11	0	11
x_4	(1)	0	0	0	1	-5	-8	0	2
x_3	(4)	0	0	1	0	1	1	0	1
x_2	(2)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(3)	0	0	0	0	-1	-1	1	0

Soluzione del sottoproblema 1 rilassato è $(0, 1, 1)$ mentre il valore della funzione obiettivo è

$$Z = 11.$$

Poichè la soluzione è binaria allora il sottoproblema viene tagliato in base al terzo criterio di fathoming. Inoltre poniamo $Z^* = 11$ in quanto questa è divenuta la soluzione incombente (cioè la migliore soluzione ammissibile trovata finora).
Risolviamo ora il sottoproblema 2 rilassato:

$$\begin{array}{llll}
\max & Z = 5x_2 + 6x_3 + 9 & & \\
3x_2 & +5x_3 & \leq & 4 \\
-x_2 & +x_3 & \leq & 1 \\
x_2 & & \leq & 1 \\
 & x_3 & \leq & 1 \\
x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Anche in questo caso applicando il metodo del simplesso si devono introdurre 4 variabili slack.

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-5	-6	0	0	0	0	9
x_4	(1)	0	3	5	1	0	0	0	4
x_5	(2)	0	-1	1	0	1	0	0	1
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	1	1

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	$\frac{69}{5}$
x_3	(1)	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$
x_5	(2)	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$

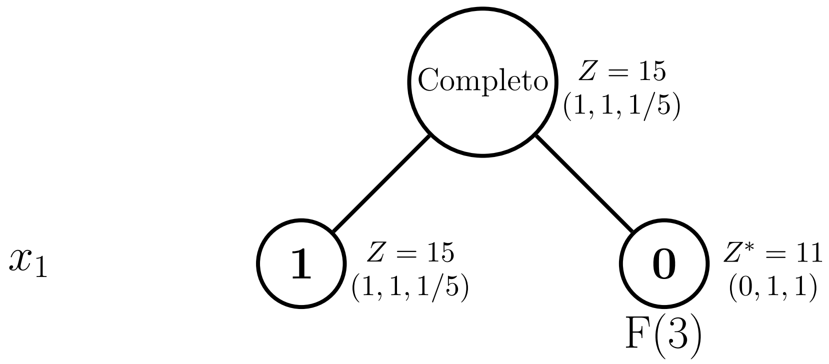
Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{76}{5}$
x_3	(1)	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_5	(2)	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$

Soluzione del sottoproblema 1 rilassato è $(1, 1, 1/5)$ mentre il valore della funzione obiettivo è $76/5$ che viene approssimato al valore intero

$$Z = 15.$$

Visualizzare l'albero delle soluzioni ottenuto finora:



Passiamo ora alla seconda iterazione e scriviamo i sottoproblemi ponendo $x_2 = 1$ e $x_2 = 0$:

Sottoproblema 3
Fissato $x_2 = 0$

max $Z = 9 + 6x_3$
(1) $5x_3 \leq 4$
(2) $x_3 \leq 1$
(3) x_3 variabile binaria,

Sottoproblema 4
Fissato $x_2 = 1$

max $Z = 14 + 6x_3$
(1) $3 + 5x_3 \leq 4$
(2) $-1 + x_3 \leq 1$
(3) x_3 variabile binaria,

ovvero

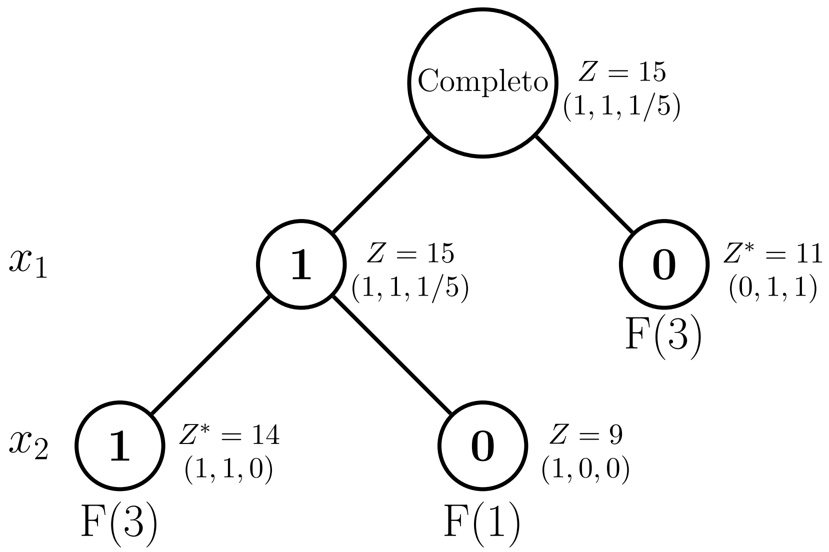
Sottoproblema 4

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 14 + 6x_3 \\ (1) & 5x_3 \leq 1 \\ (2) & x_3 \leq 2 \\ (3) & x_3 \text{ variabile binaria.} \end{array}$$

In questo caso è superfluo risolvere il rilassamento lineare dei problemi binari perchè le soluzioni sono molto semplici. Infatti $x_3 = 0$ è soluzione del sottoproblema 3, e $Z = 9$ è il relativo valore della funzione obiettivo. Poichè tale valore è inferiore rispetto alla soluzione incombente il sottoproblema viene tagliato applicando il primo criterio di fathoming. La soluzione del sottoproblema 4 è $x_3 = 0$, in cui la funzione obiettivo ammette valore $Z = 14$, che diviene la nuova soluzione incombente

$$Z^* = 14,$$

ed il sottoproblema viene tagliato applicando il terzo criterio di fathoming. Poichè non ci sono ulteriori sottoproblemi da risolvere la soluzione incombente è quella ottima e l'albero delle soluzioni finale è il seguente.



5.3 L'algoritmo di Branch-and-Bound per la Programmazione Intera

Supponendo di dover risolvere il problema:

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$x_j \text{ variabile intera, per } j = 1, \ldots, n.$$

L'algoritmo è molto simile al branch-and-bound per variabili binarie nel senso che si utilizza la tecnica del rilassamento lineare per i passi di bounding e fathoming. I cambiamenti sono i seguenti.
Innanzitutto la scelta della variabile di branching non avviene secondo l'ordine naturale poichè ora si considerano solo le variabili che devono assumere valori interi e che invece hanno un valore non intero nella soluzione ottima nel rilassamento dell'attuale sottoproblema. Di solito tra queste variabili viene scelta la prima nell'ordinamento naturale ma potrebbero essere utilizzate anche tecniche più sofisticate.
Il secondo cambiamento riguarda i valori assegnati alla variabile di branching. Poichè tale variabile può assumere valori interi non è possibile definire i due sottoproblemi uguagliandola a 0 o 1, nè si può generare un sottoproblema per ogni possibile valore, allora si definiscono due sottoproblemi specificando due possibili intervalli di valori. In dettaglio, se x_i è la variabile di branching ed x_i^* è il suo valore nella soluzione ottima del rilassamento lineare si definiscono due sottoproblemi aggiungendo il vincolo

$$x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$$

nel primo e

$$x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$$

in cui $\lfloor x_i^* \rfloor$ indica la parte intera del numero reale x_i^* :

$$\lfloor x_i^* \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x_i^*\}.$$

In questo caso può succedere che la variabile di branching sia la stessa anche in qualche passo successivo.

Il terzo cambiamento riguarda il passo di bounding. Nel caso di un problema di programmazione lineare intera pura il valore ottimo della funzione obiettivo del rilassamento lineare Z viene approssimato per difetto al fine di ottenere un valore intero. Se alcune variabili possono assumere valori reali tale arrotondamento non è necessario.
La quarta modifica riguarda il terzo criterio di fathoming. Nel caso della programmazione intera mista il criterio deve richiedere che solo le variabili vincolate ad essere intere lo siano effettivamente nella soluzione ottima del rilassamento lineare.
Vediamo quindi di riassumere l'algoritmo di Branch-and-Bound per problemi di programmazione lineare intera mista.
Inizializzazione:
Porre $Z^* = -\infty$. Applicare le operazioni di bounding, fathoming ed il test di ottimalità descritto in seguito al problema di partenza. Se il problema non viene tagliato allora eseguire la prima iterazione.
Singola iterazione:

1. Branching: tra i sottoproblemi non tagliati sceglierne uno (per esempio quello generato più recentemente). Scegliere la variabile di branching, cioè la prima variabile intera che nella soluzione ottima del rilassamento lineare non ha valore intero. Sia x_j tale variabile ed x_j^* il suo valore non intero. Generare due nuovi sottoproblemi aggiungendo rispettivamente i vincoli $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ e $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$.

2. Bounding: per ogni nuovo sottoproblema ottenere il relativo bound applicando il metodo del simplesso al suo rilassamento lineare ed usando il valore di Z per la soluzione ottima risultante.

3. Fathoming: per ogni nuovo sottoproblema applicare i seguenti 3 criteri di fathoming e scartare quei sottoproblemi tagliati da uno di questi:
Criterio 1: il bound risulta minore o uguale rispetto al valore della soluzione incombente Z^*;
Criterio 2: il rilassamento lineare non ha soluzioni ammissibili;
Criterio 3: la soluzione ottima per il rilassamento lineare ha valori interi per tutte le variabili vincolate ad assumere valori interi (se questa soluzione è migliore di quella incombente diventa la nuova soluzione incombente e si riapplica il criterio 1 a tutti i sottoproblemi non ancora tagliati).

Test di ottimalità:
Arrestare la procedura quando non ci sono altri sottoproblemi, la soluzione incombente è quella ottima, se non c'è alcuna soluzione incombente allora il problema non ha soluzioni ammissibili, in caso contrario eseguire un'altra iterazione.

Esempio 5.3.1 *Supponiamo di dover risolvere il seguente problema di programmazione lineare intera:*

$$\begin{array}{llll} \max & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & \\ x_1 & & +2x_3 & \leq 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & \leq 5 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \\ \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \textit{ variabili intere.}} \end{array}$$

Innanzitutto risolviamo, usando il metodo del simplesso, il rilassamento lineare del problema di partenza che viene ottenuto eliminando il vincolo di interezza delle tre variabili. Introduciamo due variabili slack, x_4 e x_5, che sono inizialmente le variabili in base.

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-2	-3	-2	0	0	0
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	3
x_5	(2)	0	2	1	0	0	1	5

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	4	0	-2	0	3	15
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	3
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	5

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	5	0	0	1	3	18
x_3	(1)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	5

La soluzione ottenuta $(0, 5, 3/2)$ non è intera, quindi non può essere applicato il terzo criterio di fathoming ed il problema non viene tagliato, inoltre

$$Z = 18$$

diviene il bound per i successivi sottoproblemi pur non essendo soluzione incombente in quanto la soluzione non è intera. Consideriamo ora come variabile di branching x_3 poichè è la prima variabile che nella soluzione del problema rilassato non ha un valore intero e definiamo due sottoproblemi in cui aggiungiamo rispettivamente i seguenti vincoli:

$$x_3 \leq 1$$

e

$$x_3 \geq 2.$$

Scriviamo ora esplicitamente i due sottoproblemi:

Sottoproblema 1

$$\begin{array}{llllll}
\max & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
x_1 & & +2x_3 & \leq & 3 \\
2x_1 & +x_2 & & \leq & 5 \\
 & & x_3 & \leq & 1 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

e

Sottoproblema 2

$$\begin{array}{llllll}
\max & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
x_1 & & +2x_3 & \leq & 3 \\
2x_1 & +x_2 & & \leq & 5 \\
x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2.
\end{array}$$

Risolviamo il sottoproblema 1 con il metodo del simplesso introducendo 3 variabili slack.

Iterazione 0

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-2	-3	-2	0	0	0	0
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	0	3
x_5	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_6	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

Iterazione 1

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	4	0	-2	0	3	0	15
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	0	3
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_6	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

Iterazione 2

Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	4	0	0	0	3	2	17
x_4	(1)	0	1	0	0	1	0	-2	1
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

La soluzione ottenuta $(0, 5, 1)$ è intera, quindi applicando il terzo criterio di fathoming il problema viene tagliato. Il valore della funzione obiettivo, cioè $Z = 17$, diviene la nuova soluzione incombente.

$$Z^* = 17.$$

Per risolvere il sottoproblema 2 si deve effettuare il seguente cambio di variabile

$$x_3' = x_3 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = x_3' + 2,\ x_3' \geq 0,$$

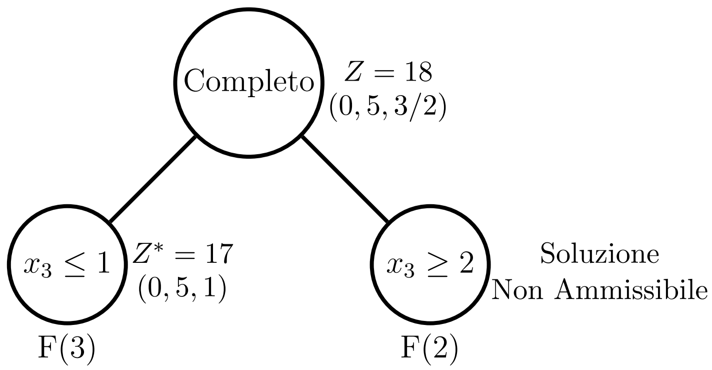
cosicchè il sottoproblema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{array}{lllll} \max\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 2(x_3'+2) & & & & \\ x_1 & & +2(x_3'+2) & \leq & 3 \\ 2x_1 & +x_2 & & \leq & 5 \\ x_1, x_2, x_3' \geq 0, & & & & \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{lllll} \max\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3' + 4 & & & & \\ x_1 & & +2x_3' & \leq & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & & \leq & 5 \\ x_1, x_2, x_3' \geq 0. & & & & \end{array}$$

Appare evidente, osservando il primo vincolo, che il problema non ammette soluzioni ammissibili, quindi il sottoproblema può essere tagliato. Possiamo quindi scrivere l'albero dei sottoproblemi:



Un'ultima osservazione riguarda il fatto che, per come sono utilizzate le variabili di branching, potrebbe capitare che una stessa variabile decisionale sia di branching più di una volta, in passi differenti dell'algoritmo.

Osservazione In modo simile si risolvono i problemi di programmazione lineare intera mista in cui solo $k < n$ variabili decisionali (convenzionalmente le prime) sono intere:

$$
\begin{aligned}
&\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\
&x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\
&x_j \text{ variabile intera, per } j = 1, \ldots, k,\ \ k < n.
\end{aligned}
$$