# Capitolo 1

# Elementi di Statistica Descrittiva

## 1.5 Esercizi proposti

**Esercizio 1.5.1** *In questo caso $n = 24$ e, dopo aver ordinato i dati (usando il metodo stem-and-leaf per esempio),*

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & 10 & 11 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 15 & 22 & 33 \end{array}$$

*si ottengono i seguenti valori*

$$Q_1 = 5.25, \quad Q_2 = 9.5, \quad Q_3 = 12, \quad IQR = 6.75.$$

*Il solo dato anomalo è 33.*

**Esercizio 1.5.2** *Anche in questo caso $n = 24$ e, dopo aver ordinato i dati, come nell'esercizio precedente,*

$$\begin{array}{cccccccccccc} 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 & 13 & 14 & 24 & 15 & 15 & 16 \\ 16 & 17 & 18 & 20 & 21 & 21 & 23 & 30 & 35 & 35 & 44 & 60 \end{array}$$

*si ottengono i seguenti valori*

$$Q_1 = 12.25, \quad Q_2 = 16, \quad Q_3 = 22.5, \quad IQR = 10.25.$$

*Il dato 44 è sospetto mentre il dato 60 è anomalo.*

**Esercizio 1.5.3** *I tre insiemi di dati devono prima essere ordinati (separatamente) e poi si può procedere al calcolo della mediana. Vediamo solo il caso della prima colonna. I dati ordinati sono*

$$8 \quad 8 \quad 10 \quad 14 \quad 18 \quad 20 \quad 23$$

*La moda è pari a 8, la media* $\overline{X} = 14.42$ *mentre il valore mediano è* 14.
*Per gli altri due insiemi di dati si procede in modo analogo.*

**Esercizio 1.5.4** *In questo caso* $n = 7$ *quindi essendo* $n + 1 = 8$ *i quartili coincidono con valori assunti dai dati. Per il primo insieme risulta*

$$Q_1 = 8, \qquad Q_3 = 20.$$

*I quartili degli ultimi due insiemi di dati fanno riferimento agli stessi anni accademici (evidentamente il dato globale è fortemente influenzato dal secondo insieme di dati).*

**Esercizio 1.5.5** *Media e mediana in generale coincidono solo in casi particolari. In caso in cui sono uguali ed entrambi nulli è quello in cui i dati hanno una ben precisa proprietà di simmetria, per esempio:*

$$-8 \quad -5 \quad -3 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8$$

# Capitolo 2

# Introduzione al Calcolo delle Probabilità

## 2.5 Esercizi proposti

**Esercizio 2.5.1**

$$\binom{8}{4} = 70$$

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36$$

**Esercizio 2.5.2** *Si definiscono gli eventi:*

$$A = \{La\ pianta\ muore\}$$

$$B = \{La\ pianta\ viene\ innaffiata\}$$

*Applicando il teorema della probabilità totale si trova*

$$P(A) = 0.31$$

*mentre applicando il teorema di Bayes si trova la probabilità condizionata*

$$P(\overline{B}/A) = \frac{A/\overline{B})P(\overline{B})}{P(A)} = 0.61.$$

**Esercizio 2.5.3** *Si definiscono gli eventi:*

$$A_1 = \{\textit{Il passeggero salito su B è senza biglietto}\}$$

$$A_2 = \overline{A}_1$$

$$C = \{\textit{Il passeggero controllato è senza biglietto}\}$$

*Applicando il teorema della probabilità totale si trova*

$$P(C) = \frac{104}{400}$$

*mentre, definito l'evento*

$$D = \{\textit{Il passeggero controllato è lo stesso salito su B}\}$$

*e applicando il teorema di Bayes si trova la probabilità condizionata*

$$P(D/C) = \frac{1}{26}$$

*avendo osservato che* $P(C/D) = P(A_1)$.

**Esercizio 2.5.4** *Gli eventi* $A$ *e* $B$ *sono indipendenti solo se* $B$ *coincide con lo spazio campione* $S$.

**Esercizio 2.5.5** *Gli eventi non sono indipendenti.*

**Esercizio 2.5.6** *Gli eventi non sono indipendenti.*

**Esercizio 2.5.7** *Gli eventi non sono indipendenti.*

**Esercizio 2.5.8** *Risulta*

$$P(T) = \frac{2}{3}, \qquad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{20}{27}$$

$$P(B) = \frac{7}{27}.$$

**Esercizio 2.5.9** *Si definiscono gli eventi:*

$$N = \{\textit{La seconda pallina estratta è nera}\}$$

$$A = \{\textit{La pallina inserita nel secondo contenitore è azzurra}\}$$

*a) Applicando il teorema della probabilità totale si trova*

$$P(N) = \frac{31}{48}$$

*b) Applicando il teorema di Bayes si trova la probabilità condizionata*

$$P(A/N) = \frac{20}{31}$$

**Esercizio 2.5.10** *Si definiscono gli eventi:*

$$A = \{\textit{La seconda pallina estratta è rossa}\}$$

$$N = \{\textit{La prima pallina estratta è nera}\}$$

$$B = \{\textit{La prima pallina estratta è bianca}\}$$

$$R = \{\textit{La prima pallina estratta è rossa}\}$$

*Applicando il teorema della probabilità totale si trova*

$$P(A) = \frac{1}{5}.$$

**Esercizio 2.5.11** *Si definiscono gli eventi:*

$$N = \{\textit{La pallina estratta è nera}\}$$

$$A_1 = \{\textit{La pallina era nel primo contenitore}\}$$

$$A_2 = \{\textit{La pallina era nel secondo contenitore}\}$$

$$A_3 = \{\textit{La pallina era nel terzo contenitore}\}$$

*a) Applicando il teorema della probabilità totale si calcola*

$$P(N) = \frac{23}{40}.$$

*b) Applicando il teorema di Bayes si calcola*

$$P(A_1/N) = \frac{10}{23}.$$

**Esercizio 2.5.12** *Si definiscono gli eventi:*

$$R_2 = \{La\ seconda\ pallina\ estratta\ \grave{e}\ rossa\}$$

$$R_1 = \{La\ prima\ pallina\ estrtta\ \grave{e}\ rossa\}$$

*a) Applicando il teorema della probabilità totale si calcola*

$$P(R_2) = \frac{5}{7}.$$

*b) Applicando il teorema di Bayes si calcola*

$$P(R_1/R_2) = \frac{2}{3}.$$

# Capitolo 3

# Variabili Aleatorie

## 3.9 Esercizi proposti

**Esercizio 3.9.1**

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{36}, \qquad P(X=2) = \frac{3}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{5}{36}, \qquad P(X=4) = \frac{7}{36}$$

$$P(X=5) = \frac{9}{36}, \qquad P(X=6) = \frac{11}{36}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} \\ &= \frac{161}{36} \simeq 4.47 \end{aligned}$$

**Esercizio 3.9.2**

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $1/3$ | $0$ |
| $1$ | $1/3$ | $1/3$ |

$$P(X=-1)=\frac{1}{3}, \qquad P(X=1)=\frac{2}{3}$$

$$P(Y=-1)=\frac{2}{3}, \qquad P(Y=1)=\frac{1}{3}$$

$$E(X)=\frac{1}{3}, \qquad E(Y)=-\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=1, \qquad E(Y^2)=1$$

$$V(X)=\frac{8}{9}, \qquad E(Y)=-\frac{8}{9}.$$

**Esercizio 3.9.3** *Risulta*

$$c=\frac{6}{11}.$$

$$P(X=1)=\frac{6}{11}, \qquad P(X=2)=\frac{3}{11}, \qquad P(X=3)=\frac{2}{11}$$

$$\mu=E(X)=\frac{18}{11}\simeq 1.636$$

$$E(X^2)=\frac{36}{11},$$

$$V(X)=\frac{72}{121} \quad\Rightarrow\quad \sigma\simeq 0.77,$$

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=P(0.866<X<2.406)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{9}{11}.$$

**Esercizio 3.9.4**

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 2/5 |
| 1 | 2/5 | 1/5 |

$$P(X=0)=\frac{2}{5}, \qquad P(X=1)=\frac{3}{5}$$

$$P(Y=0)=\frac{2}{5}, \qquad P(Y=1)=\frac{3}{5}$$

$$E(X)=\frac{3}{5}, \qquad E(Y)=-\frac{3}{5}$$

$$Z = XY = \{0, 1\}$$
$$P(Z = 0) = \frac{4}{5}, \qquad P(Z = 1) = \frac{1}{5}$$
$$E(Z) = E(XY) = \frac{1}{5}.$$

**Esercizio 3.9.5**

*b)*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 6x(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx \\ &= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} \\ E(X^2) &= \int_0^1 6x^2(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x^3 - x^4)dx \\ &= 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

**Esercizio 3.9.6**

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $1/24$ | $3/4$ |
| $0$ | $1/12$ | $1/24$ |
| $1$ | $1/24$ | $1/24$ |

*a)*

$$P(X = -1) = \frac{19}{24}, \qquad P(X = 0) = \frac{3}{24}$$
$$P(X = 1) = \frac{2}{24},$$
$$P(Y = -1) = \frac{1}{6}, \qquad P(Y = 1) = \frac{5}{6}$$
$$E(X) = -\frac{17}{24}, \qquad E(Y) = \frac{2}{3}$$

*b)* $Z = XY = \{-1, 0, 1\}$

$$P(Z=-1) = \frac{19}{24}, \qquad P(Z=0) = \frac{3}{24}$$

$$P(Z=1) = \frac{2}{24},$$

$$E(XY) = -\frac{17}{24}.$$

*c)*

$$P(X \geq Y | X+Y > 0) = 1$$

**Esercizio 3.9.7**

*b) La funzione $f(x)$ è pari ma moltiplicata per $x$ diventa dispari e quindi l'integrale tra -1 e 1, ovvero $E(X)$, è nullo.*

*d) Conviene calcolare geometricamente la probabilità richiesta senza ricorrere all'applicazione degli integrali*

$$P(|X| < \sqrt{2}/2) = P(-\sqrt{2}/2 < X < \sqrt{2}/2) = 0.5.$$

**Esercizio 3.9.8**

*b)* $E(X) = 0$ *perchè la funzione $f(x)$ è pari.*

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)dx = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= 2\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

*Quindi*

$$V(X) = \frac{1}{6}.$$

*c) Anche in questo caso non conviene ricorrere all'uso di integrali, ma è meglio procedere per via geometrica. La probabilità richiesta vale* $3/4$.

**Esercizio 3.9.9**

*b)*

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x(1-x^2)dx = 0$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2-x^4)dx \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

*c)*

$$P(-2 < X < 0) = P(-1 < X < 0) = 0.5.$$

**Esercizio 3.9.10**

| $X \backslash Y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $3/7$ | $3/14$ |
| $1$ | $3/14$ | $1/7$ |

*b)* $Z = \{-1, 1\}$

$$P(Z=-1) = \frac{3}{7}, \qquad P(Z=1) = \frac{4}{7}$$

$$E(Z) = E(XY) = \frac{1}{7}.$$

**Esercizio 3.9.11**
*a)* $Z = X^2Y = \{0, 1\}$

$$P(Z=0) = \frac{2}{3}, \qquad P(Z=1) = \frac{1}{3}$$

$$E(Z) = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio 3.9.12**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{1/2} x|2x|dx = 2\int_{-\sqrt{3}/2}^{0}(-x^2)dx + 2\int_0^{1/2} x^2dx \\ &= 2\left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}/2}^{0} + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_{-\sqrt{3}/2}^{1/2} x|2x|dx = 2\int_{-\sqrt{3}/2}^{0}(-x^3)dx + 2\int_{0}^{1/2} x^3 dx = \frac{5}{16}.$$

*Dopo aver fatto i calcoli risulya*

$$V(X) \simeq 0.045$$

*b)*

$$P(-1/3 < X < 1/3|X > 0) = \frac{P(0 < X < 1/3)}{X > 0} = \frac{4}{9}.$$

**Esercizio 3.9.13**

*Risulta*

$$C = \frac{1}{2}.$$

*b)*

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(1+x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}. \\ E(X^2) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)dx \\ &= \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{2}{9}.$$

*c)*

$$P(X \geq 0|X \leq 3/4) = \frac{P(0 \leq X \leq 3/4)}{P(-1 \leq X \leq 3/4)} = \frac{33}{49}.$$

# Capitolo 4

# Modelli di Variabili Aleatorie

## 4.11 Esercizi proposti

**Esercizio 4.11.1** *La variiabile*

$$X = \textit{numero delle persone allergiche}$$

*è di tipo binomiale ma, essendo la probabilità* $p$ *molto bassa si può approssimare* $X$ *con una variabile aleatoria di Poisson con parametro*

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0.001 = 2.$$

*Quindi:*
*a)* $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-2} + 2e^{-2} = 0.4060.$
*b)* $P(X = 3) = 0.1804$
*c)* $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233.$

**Esercizio 4.11.2** *Come nell'esercizio precedente, in questo caso il parametro della distribuzione di Poisson è*

$$\lambda = np = 6.$$

*Quindi:*
*a)* $P(X = 7) = 01377$
*b)* $P(X < 4) = 0.1512$
*c)* $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 0.7149$
*d)* $P(X = 0) = e^{-6} = 0.0025.$

**Esercizio 4.11.3** *La variabile definita è di tipo Poisson con parametro* $\lambda = 3.5$.
*a)*

$$P(X = 3) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!} = 0.2158$$

*analogamente*

$$P(X = 4) = 0.1888, \qquad P(X = 5) = 0.1322.$$

*b)*

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.5368$$

*c)* $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0.4633.$

**Esercizio 4.11.4** *La variabile definita è di tipo Poisson con parametro* $\lambda = 0.1$.

$$P(X = 3) = \frac{e^{-0.1}(0.1)^3}{3!} = 0.00015.$$

**Esercizio 4.11.5**

$$P(X > 3) = 0.00015.$$

**Esercizio 4.11.6** *a)* $P(X < 245) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 0.0475$
*b)* $P(X > 250) = 0.5$
*c)* $P(247 < X < 253) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826.$

**Esercizio 4.11.7** *a)*

$$P(4 < X < 5) = P\left(-0.59 < \frac{X - 4.35}{0.59} < 1.1\right) = \Phi(1.1) - \Phi(-0.59) = 0.5867.$$

*b)*

$$P(5.5 < X) = P\left(1.95 < \frac{X - 4.35}{0.59} < 1.1\right) = 0.0256.$$

**Esercizio 4.11.8** *a)*

$$P(X < 118) = P\left(\frac{X - 100}{15} < 1.2\right) = \Phi(1.2) = 0.8849.$$

*b)*

$$P(X > 112) = P\left(\frac{X-100}{15} > 0.8\right) = 1 - \Phi(0.8) = 0.2119.$$

*c)*

$$P(100 < X < 112) = P\left(0 < \frac{X-100}{15} < 0.8\right) = 0.2881.$$

**Esercizio 4.11.9** *Dobbiamo calcolare* $P(9.95 < X < 10.05)$ *sapendo che*

$$\mu = 10, \qquad \sigma \simeq 0.0707$$

*allora*

$$P(9.95 < X < 10.05) = P\left(-0.71 < \frac{X-10}{0.0707} < 0.71\right) = 0.5222.$$

**Esercizio 4.11.10**
a) $z_\alpha = 2.6$;
b) $z_\alpha = 0.6$;
c) $z_\alpha = 1.6$;
d) $z_\alpha = 0.8$;
e) $z_\alpha = -1$.

**Esercizio 4.11.11**
a) $z_\alpha = 2.326$;
b) $z_\alpha = 1.645$;
c) $z_\alpha = 0.842$.

**Esercizio 4.11.12**

$$P(X \leq 2) = 0.6 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-\mu}{2} \leq \frac{2-\mu}{2}\right) = 0.6$$

*Si risolve l'equazione*

$$\Phi\left(\frac{2-\mu}{2}\right) = 0.6$$

*trovando, dalle tabelle,* $\mu = 1.49$.

# Capitolo 5

# Elementi di Inferenza Statistica

## 5.5 Esercizi proposti

**Esercizio 5.5.1** *Si deve utilizzare la statistica* $(n-1)S^2/\sigma^2$ *che ha distribuzione* $\chi^2_{24}$ *e considerando che* $\alpha = 0.05$ *quindi* $\alpha/2 = 0.025$, *ottenendo*

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025,24}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975,24}}$$

*da cui si ricava*

$$60.97 \leq \sigma^2 \leq 193.53.$$

**Esercizio 5.5.2** *Bisogna calcolare manualmente media e deviazione standard campionaria*

$$\overline{X} = 3.15, \qquad S = 0.14.$$