

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Modelli Matematici	3
1.1.1	Il problema della dieta	5
1.1.2	Un problema di miscelazione	8
1.1.3	Un problema di pianificazione della produzione	10
1.1.4	Il problema dello zaino	11
1.1.5	Un problema di pianificazione	12
1.1.6	Un problema di scheduling del personale	14
1.1.7	Un problema di pianificazione urbana	16
1.1.8	Un esempio sportivo	18
1.1.9	Il problema del trasporto	19
1.1.10	Un esempio di pianificazione edilizia	21
1.1.11	Un esempio di modello non lineare	23
1.1.12	Un altro esempio di modello non lineare	26
1.2	Esercizi	27
2	Richiami di algebra lineare e geometria dei poliedri	33
2.1	Elementi di Algebra Lineare	33
2.1.1	Calcolo della matrice inversa	41
2.1.2	Rango di una matrice	45
2.2	Geometria poliedrale	45
3	Programmazione lineare	49
3.1	Introduzione	49
3.2	Il metodo grafico	51
3.2.1	Alcune osservazioni sul metodo grafico	54
3.3	La geometria dei problemi di programmazione lineare	61
3.4	Il Metodo del Simplexso	66

3.4.1	Forma algebrica del metodo del simplesso	67
3.4.2	Forma tabellare del metodo del simplesso	77
3.5	Problemi di programmazione lineare in forma non standard . .	89
3.6	Il Metodo del Simpleso a due fasi	94
3.7	Il Metodo del Simpleso in Forma Matriciale	115
3.7.1	Calcolo di una soluzione di base ammissibile	116
3.7.2	Forma matriciale delle equazioni correnti	119
3.7.3	Riassunto della forma matriciale del metodo del simplesso	121
3.8	Il Metodo del Simpleso Rivisitato	128
3.9	Esercizi	132
4	Teoria della dualità	139
4.1	Introduzione	139
4.2	Dualità per problemi di programmazione lineare	141
4.3	Dualità, basi ottime e metodo del simplesso	144
4.4	Altre forme di dualità	146
4.5	Dualità forte e scarti complementari	149
4.5.1	Il metodo del simplesso duale	151
4.6	Analisi di sensitività e postottimale	164
4.6.1	Analisi di sensitività	165
4.6.2	Prezzi ombra	166
4.7	Esercizi	170
5	Programmazione Lineare Intera	173
5.1	Introduzione	173
5.2	L'algoritmo Branch-and-Bound per Problemi di Programma- zione Binaria	176
5.2.1	Sommario dell'algoritmo Branch-and-Bound	178
5.3	L'algoritmo Branch-and-Bound per la Programmazione Intera	188
5.4	L'algoritmo Branch-and-Cut per la Programmazione Binaria .	194
5.5	Esercizi	203

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Modelli Matematici

Il termine modello indica una struttura appositamente costruita per evidenziare le caratteristiche di oggetti reali. Alcune volte i modelli possono essere concreti (come ad esempio i modelli che rappresentano i prototipi di aerei, navi oppure automobili), ma spesso sono di tipo astratto, come i cosiddetti **modelli matematici** che usano appunto il simbolismo matematico per evidenziare determinate caratteristiche di oggetti veri. In poche parole i modelli matematici non sono altro che insiemi di relazioni che descrivono, in modo semplificato, fenomeni reali. L'interesse nella modellistica deriva dal fatto che essa consente di studiare l'evoluzione di tali fenomeni senza che questo accadano realmente. Si pensi per esempio alle simulazioni matematiche degli effetti di eventi catastrofici come i terremoti in zone abitate, in grado di fornire informazioni sulle loro conseguenze che ovviamente non potrebbero mai essere note se non dopo tale evento (e di conseguenza del tutto inutili). I campi di applicazione dei modelli matematici sono attualmente i più svariati: esempi concreti sono i modelli che descrivono la dinamica delle popolazioni, oppure la diffusione di epidemie oppure lo studio dell'inquinamento in determinati territori. Nei capitoli seguenti saranno analizzate le proprietà dei modelli matematici di ottimizzazione e saranno descritti alcuni metodi numerici per determinarne la soluzione.

I modelli matematici possono essere di due tipi:

1. Modelli stocastici: quando descrivono problemi influenzati da eventi casuali (ad esempio il modello matematico della teoria delle code, in

cui il tempo di servizio di uno sportello è di tipo casuale);

2. Modelli deterministici: quando descrivono relazioni esatte tra grandezze.

Una seconda suddivisione riguarda la validità dei modelli dal punto di vista temporale, infatti i modelli matematici possono essere:

1. Modelli statici: se le relazioni tra le grandezze restano invariate nel tempo;
2. Modelli dinamici: se le relazioni tra le grandezze dipendono dal tempo.

Un'ultimo tipo di classificazione è inerente la tipologia di relazioni matematiche tra grandezze:

1. Modelli lineari: se le relazioni tra le grandezze sono descritte da equazioni/disequazioni di tipo lineare;
2. Modelli non lineari: se almeno una delle relazioni tra le grandezze non è di tipo lineare.

L'approccio modellistico di un problema reale viene realizzato attraverso diverse fasi:

1. Analisi del problema: Consiste nell'analisi della struttura del problema con lo scopo di determinare l'obiettivo da raggiungere e le relazioni logico-funzionali;
2. Costruzione del modello: Si descrivono in termini matematici le principali caratteristiche del problema e si traducono le relazioni tra le grandezze del problema;
3. Analisi del modello: Si deducono analiticamente le proprietà matematiche del modello (esistenza, unicità della soluzione, stabilità della soluzione e altre);
4. Soluzione numerica: Si definisce un algoritmo per determinare (anche via software) la soluzione del problema;
5. Validazione dei risultati: Si verifica la congruenza dei risultati numerici rispetto ai dati sperimentali di cui si è in possesso. Nel caso in cui i dati siano discordanti allora si effettua un affinamento del modello e si ripetono i passi precedenti.

Come detto la costruzione del modello matematico consiste nel tradurre una serie di relazioni logiche tra le grandezze reali coinvolte in termini, appunto, matematici. Per far questo è necessario applicare leggi fisiche, economiche, di mercato tradotte in equazioni algebriche, disequazioni, funzioni e così via. Poichè il modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono è necessario che queste siano il più indipendenti possibile dai dati introdotti poichè un modello deve essere usato in più situazioni e con valori differenti. I risultati numerici devono essere considerati sempre in modo critico: la loro affidabilità dipende da molti fattori (precisione dei dati, affidabilità del software, efficacia e stabilità dell'algoritmo numerico e altri). Nei successivi paragrafi saranno descritti alcuni classici Problemi di Ottimizzazione in diversi ambiti applicativi.

1.1.1 Il problema della dieta

Supponiamo di avere n alimenti (o classi di alimenti, carne, pesce, uova, legumi e altri) che contengono m sostanze nutritive (per esempio proteine, vitamine, carboidrati e altre). Si vuole determinare la quantità giornaliera di ciascun alimento che una persona deve assumere in modo tale da minimizzare il costo giornaliero del cibo ma garantendo il fabbisogno minimo di ogni sostanza nutriente.

Per formulare il modello matematico del problema dobbiamo innanzitutto elencare i dati assegnati. Infatti è necessario conoscere quindi i seguenti dati:

- c_j = costo unitario del j -esimo alimento, per $j = 1, \dots, n$;
- b_i = fabbisogno minimo giornaliero dell' i -esimo nutriente, per $i = 1, \dots, m$;
- a_{ij} = quantità dell' i -esimo nutriente presente nell'unità del j -esimo alimento, per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Finora il problema è stato descritto in linguaggio naturale e, per formulare il relativo modello matematico, bisogna seguire una serie di passi. Innanzitutto bisogna capire quali sono le grandezze che si vogliono determinare.

I Passo: Identificare le variabili

In questo caso l'identificazione è molto semplice in quanto dobbiamo determinare le quantità giornaliere di ciascun alimento, quindi definiamo le seguenti grandezze:

x_j = quantità giornaliera del j -esimo alimento, per $j = 1, \dots, n$.

II Passo: Definire la funzione obiettivo

L'obiettivo è la minimizzazione del costo giornaliero della dieta noti i costi unitari c_j , ovvero il costo complessivo di tutti gli alimenti. La quantità x_1 del primo alimento costa c_1x_1 , la quantità x_2 del secondo costa c_2x_2 , cosicchè il costo complessivo degli alimenti è

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

L'obiettivo è quello di determinare le quantità x_j , $j = 1, \dots, n$, in modo tale che venga minimizzato il valore di Z , purchè le quantità dell' i -esimo nutriente sia superiore al valore minimo giornaliero b_i . Le variabili x_j non possono assumere valori arbitrari ma questi devono essere tali da soddisfare una serie di vincoli, ovvero un vincolo per ciascuna sostanza nutriente. E questo porta all'ultima fase nella definizione del modello.

III Passo: Determinare i vincoli del problema

I vincoli riguardano esclusivamente le sostanze nutrienti. Bisogna calcolare la quantità complessiva di ciascuna sostanza nutriente presente in tutti n gli alimenti assunti nelle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$. Per esempio nella quantità x_1 del primo alimento è presente $a_{11}x_1$ quantità del primo nutriente, $a_{21}x_1$ del secondo e così via. Nella quantità x_2 del secondo alimento sono presenti $a_{12}x_2$ quantità del primo nutriente, $a_{22}x_2$ del secondo e così via. Volendo determinare la quantità del primo nutriente questa risulta:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

che deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

che costituisce il primo vincolo del modello. In generale la necessità di soddisfare il fabbisogno dell' i -esimo nutriente definisce un vincolo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

In questo modo definiamo esattamente m vincoli. Al termine di questa fase abbiamo un passo finale che consiste nella formulazione del modello.

IV Passo: Formulazione completa del modello

In definitiva il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Soggetto a:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Supponiamo per esempio di dover decidere la composizione della dieta giornaliera a base di pasta, carne, verdura e formaggio, tenendo conto che giornalmente si devono assumere almeno 70 g. di proteine, almeno 50 g. di grassi ed almeno 250 g. di zuccheri. Nella seguente tabella sono indicati i grammi di nutrienti in ogni 100 grammi di alimento ed i relativi costi.

	Pasta	Carne	Verdura	Formaggio
Proteine	9.9	20.8	2	22
Grassi	1.2	1.1	0.2	26
Zuccheri	75.3	0	4	0
Costo €/kg	1.4	12	1.2	12

Ad esempio un etto di pasta contiene 9.9 grammi di proteine, 1.2 g. di grassi e 75.3 g. di zuccheri. Di conseguenza un chilo di pasta contiene 99 grammi di proteine, 12 grammi di grassi e 753 grammi di zuccheri. L'obiettivo che ci poniamo è quello di minimizzare la spesa giornaliera per l'acquisto degli alimenti in modo tale che venga soddisfatto il fabbisogno giornaliero di grassi, zuccheri e proteine.

Indicando con x_1 la quantità (in chilogrammi) di pasta, con x_2 la quantità (in chilogrammi) di carne, con x_3 la quantità (in chilogrammi) di verdura e con x_4 la quantità (in chilogrammi) di formaggio da acquistare, il problema

può essere formulato come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 1.4x_1 + 12x_2 + 1.2x_3 + 12x_4 \\ \text{Soggetto a:} \quad & 99x_1 + 208x_2 + 20x_3 + 220x_4 \geq 70 \\ & 12x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 260x_4 \geq 50 \\ & 753x_1 + 40x_3 \geq 250 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

1.1.2 Un problema di miscelazione

Una fonderia deve produrre 1000 pezzi del peso ciascuno di un chilogrammo. Il ferro con cui tali pezzi sono fatti dovrà contenere manganese e silicio nelle seguenti quantità:

$$0.45\% \leq \text{manganese}, \quad 3.25\% \leq \text{silicio} \leq 5.5\%.$$

Sono disponibili tre tipi di materiale ferroso le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Materiale ferroso	A	B	C
Silicio (%)	4.00	1.00	0.60
Manganese (%)	0.45	0.50	0.40
Costo (€/kg.)	0.025	0.030	0.018

Inoltre si può aggiungere direttamente manganese al costo di 10 Euro al kg. Il problema che si vuole modellare è quello di determinare il piano di produzione che minimizza il costo del materiale utilizzato. Si vogliono cioè individuare le quantità di materiale per ciascuno dei tre tipi A, B, o C e di manganese puro da acquistare per produrre i 1000 pezzi richiesti, spendendo il meno possibile. Proviamo a costruire un modello analitico per il problema. A questo scopo introduciamo le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 , aventi il seguente significato:

$x_1 (\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso A da utilizzare;

$x_2 (\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso B da utilizzare;

$x_3 (\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso C da utilizzare;

$x_4 (\geq 0)$: la quantità in kg di manganese da utilizzare.

Abbiamo imposto che le quantità di prodotto acquistate siano dei valori non negativi (vincoli di nonnegatività). Il costo complessivo dei materiali risulta essere:

$$0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4.$$

Gli altri vincoli da rispettare sono descritti in seguito. Innanzitutto la quantità complessiva di prodotto deve essere pari a 1000 kg.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

La quantità di silicio, in kg, presente nel prodotto risultante è data da

$$0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3$$

e deve essere compresa nei limiti voluti (cioè deve essere superiore a 32.5 kg su 1000 kg di prodotto finito e inferiore a 55 kg nella stessa quantità di prodotto, pari rispettivamente al 3.25% e al 5.5%):

$$32.5 \leq 0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3 \leq 55.$$

Possiamo quindi esprimere la condizione sulla percentuale di silicio mediante i due vincoli lineari (per semplicità i due vincoli sono stati moltiplicati per 100):

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 &\geq 3250 \\ 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 &\leq 5500. \end{aligned}$$

Analogamente, per la condizione sulla percentuale di manganese (che deve essere superiore a 4.5 kg su 1000 kg di prodotto, pari allo 0.45%) si ottiene

$$0.0045x_1 + 0.005x_2 + 0.004x_3 + x_4 \geq 4.5$$

e quindi

$$0.45x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 100x_4 \geq 450.$$

Il problema della determinazione di un piano di produzione che minimizza il costo può quindi essere formulato come segue:

$$\min Z = 0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 &\geq 3250 \\ 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 &\leq 5500 \\ 0.45x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 100x_4 &\geq 450 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Le variabili x_1, x_2, x_3 e x_4 corrispondono alle scelte operative che il problema reale richiede di compiere, e ciascun vincolo del modello corrisponde ad una condizione imposta dal problema reale. Determinare i valori delle variabili in modo che i vincoli siano soddisfatti e la funzione obiettivo assuma il minimo valore fornisce il miglior piano di produzione.

1.1.3 Un problema di pianificazione della produzione

Un'industria chimica produce quattro tipi di fertilizzante, la cui lavorazione è affidata a due reparti: produzione e confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria la lavorazione in entrambi i reparti. La seguente tabella riporta, per ciascun tipo di fertilizzante, i tempi (in ore) necessari per la lavorazione in ciascun reparto per avere una tonnellata di prodotto pronto per la vendita

Reparto	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Produzione	2	1.5	0.5	2.5
Confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto, da ciascuna tonnellata, il costo del materiale grezzo, una tonnellata di fertilizzante produce i seguenti profitti (in euro per tonnellata):

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Profitto netto	250	230	110	350

Si vuol determinare la quantità di fertilizzante di ciascun tipo da produrre settimanalmente in modo tale da massimizzare il profitto sapendo che il reparto produzione può lavorare al più 100 ore la settimana mentre il reparto confezionamento al più 50 ore settimanali.

Definiamo, come variabili del modello, quelle pari al numero di tonnellate prodotte settimanalmente per ciascun tipo di fertilizzante:

x_i = tonnellate dell' i -esimo tipo di fertilizzante prodotte settimanalmente.

Scopo è la massimizzazione del profitto complessivo, che si ottiene moltiplicando il profitto unitario per il numero di tonnellate prodotte:

$$Z = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4.$$

I vincoli riguardano il numero di ore settimanali che i due reparti possono lavorare. Per il reparto produzione il vincolo sul tempo necessario a produrre le quantità di prodotto pari a x_1, x_2, x_3 e x_4 è:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100,$$

mentre per il reparto confezionamento il vincolo è:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50.$$

Il problema della pianificazione settimanale della produzione può quindi essere formulato come segue:

$$\max Z = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +1.5x_2 & +0.5x_3 & +2.5x_4 & \leq & 100 \\ 0.5x_1 & +0.25x_2 & +0.25x_3 & +x_4 & \leq & 50 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

1.1.4 Il problema dello zaino

Sia dato un insieme E di n oggetti, a ciascuno dei quali è associato un peso w_i ed un valore c_i , $i = 1, \dots, n$, valori interi e positivi. Il problema dello zaino (KP, da Knapsack Problem) consiste nel determinare un sottoinsieme di elementi che abbia valore totale massimo ed il cui peso totale non superi un prefissato intero b . Il nome deriva dal fatto che viene usualmente descritto come il problema di scegliere quali oggetti di un assegnato insieme mettere in uno zaino in modo da non superare un dato peso (o capacità) e da massimizzare appunto il valore complessivo degli oggetti selezionati. Si assume che sia

$$0 < b < \sum_{i=1}^n w_i,$$

altrimenti il problema sarebbe banale e che inoltre sia

$$w_i \leq b, \quad i = 1, \dots, n$$

in quanto nessun elemento di peso superiore alla capacità b può far parte di una soluzione e quindi ogni elemento di peso superiore a b può essere eliminato da E . Il problema può essere scritto come un problema di massimo. Possiamo formulare il problema come uno di programmazione lineare introducendo, per ogni oggetto $i = 1, 2, \dots, n$, una variabile $x_i \in \{0, 1\}$, con il significato che la variabile assume valore 1 se l'elemento i -esimo appartiene al sottoinsieme selezionato, e 0 altrimenti (si decide cioè se inserire o meno l'oggetto). La funzione obiettivo, da massimizzare, è

$$Z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

in cui sono sommati i valori dei soli oggetti selezionati. La condizione relativa alla capacità dello zaino diviene

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq b$$

infatti, dato che ciascuna x_i può assumere solo i valori 0 o 1, nella somma vengono considerati i pesi dei soli oggetti selezionati. La formulazione finale del problema è la seguente

$$\begin{aligned} \max \quad Z &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ &\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq b \\ &x_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

1.1.5 Un problema di pianificazione

Una comunità agricola, composta da tre cooperative, deve pianificare la produzione agricola per l'intero anno. Il rendimento di ogni cooperativa dipende dalla quantità di terreno disponibile e dalla quantità di acqua, come risulta dalla seguente tabella:

Cooperativa	Terra disponibile (ettari)	Acqua disponibile (migliaia metri cubi)
1	160	400
2	240	600
3	120	175

I raccolti possibili sono barbabietole, cotone e sorgo. Queste coltivazioni differiscono per la quantità di acqua di cui necessitano e per il rendimento netto per ettaro, dati riportati nella seguente tabella:

Prodotto	Consumo di acqua (metri-cubi/ettaro)	Guadagno netto (euro/ettaro)
Barbabietole	3	1000
Cotone	2	750
Sorgo	1	250

Si deve considerare inoltre che per ciascuna coltivazione la comunità ha fissato la massima quantità di terreno coltivabile che si può usare: 240 ettari per le barbabietole, 200 per il cotone e 130 per il sorgo. Inoltre è stato stabilito che la percentuale di terreno che ogni cooperativa può utilizzare per le coltivazioni deve essere la stessa.

Ovviamente le quantità da determinare sono le aree di ciascuna delle tre cooperative da destinare alle tre coltivazioni, quindi definiamo nove variabili:

Coltivazione	Cooperativa		
	1	2	3
Barbabietola	x_1	x_2	x_3
Cotone	x_4	x_5	x_6
Sorgo	x_7	x_8	x_9

Ovviamente la funzione da massimizzare è il guadagno totale netto che si ottiene moltiplicando la quantità totale di ettari destinati a ciascun singolo prodotto per il guadagno netto per ettaro:

$$Z = 1000(x_1 + x_2 + x_3) + 750(x_4 + x_5 + x_6) + 250(x_7 + x_8 + x_9).$$

I vincoli sono di quattro tipi:

1) Terra utilizzabile da ciascuna cooperativa:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_7 &\leq 160 \\ x_2 + x_5 + x_8 &\leq 240 \\ x_3 + x_6 + x_9 &\leq 120, \end{aligned}$$

2) Acqua utilizzabile da ciascuna cooperativa:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_4 + x_7 &\leq 400 \\ 3x_2 + 2x_5 + x_8 &\leq 600 \\ 3x_3 + 2x_6 + x_9 &\leq 175, \end{aligned}$$

3) Terra utilizzabile complessivamente per ciascuna coltivazione:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 240 \\ x_4 + x_5 + x_6 &\leq 200 \\ x_7 + x_8 + x_9 &\leq 130, \end{aligned}$$

4) Stessa proporzione di terra coltivata:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_4 + x_7}{160} &= \frac{x_2 + x_5 + x_8}{240} \\ \frac{x_2 + x_5 + x_8}{240} &= \frac{x_3 + x_6 + x_9}{120} \\ \frac{x_3 + x_6 + x_9}{120} &= \frac{x_1 + x_4 + x_7}{160},\end{aligned}$$

che in questo caso sono espresse scrivendo tutte le variabili al primo membro:

$$\begin{aligned}3(x_1 + x_4 + x_7) - 2(x_2 + x_5 + x_8) &= 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 - 2(x_3 + x_6 + x_9) &= 0 \\ 4(x_3 + x_6 + x_9) - 3(x_1 + x_4 + x_7) &= 0,\end{aligned}$$

ovviamente oltre alla condizioni di nonnegatività, $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 9$.

1.1.6 Un problema di scheduling del personale

Una compagnia aerea sta riorganizzando i servizi nel proprio aeroporto principale e per questo deve effettuare una politica di nuove assunzioni delle quali si deve decidere la numerosità. Per questo vengono analizzate le necessità legate ai diversi momenti della giornata, considerando che il proprio personale deve essere ripartito in 5 turni di lavoro che coprono l'intero arco delle 24 ore:

Turno 1: dalle 6.00 alle 14.00

Turno 2: dalle 8.00 alle 16.00

Turno 3: dalle 12.00 alle 20.00

Turno 4: dalle 16.00 alle 24.00

Turno 5: dalle 22.00 alle 6.00.

Inoltre, per il numero minimo di lavoratori che devono essere presenti nelle diverse fasce orarie della giornata e per i relativi costi di un'unità di personale sono stati individuati i seguenti dati:

	Turno					
Fascia oraria	1	2	3	4	5	Addetti
6.00-8.00	×					40
8.00-10.00	×	×				70
10.00-12.00	×	×				65
12.00-14.00	×	×	×			80
14.00-16.00		×	×			65
16.00-18.00			×	×		70
18.00-20.00			×	×		80
20.00-22.00				×		40
22.00-24.00				×	×	50
24.00-6.00					×	15
Costo per addetto	170€	160€	175€	180€	200€	

Il problema è determinare il numero di dipendenti che devono essere assegnati a ciascun turno in modo tale da minimizzare il costo complessivo e superando il numero minimo di persone che devono essere presenti in ciascuna fascia oraria.

È opportuno in questo caso definire le seguenti variabili:

x_j = numero di dipendenti assegnati al turno j , $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Il vincolo principale per i possibili valori di queste variabili è che il loro numero presente durante ogni intervallo di tempo deve superare i valori riportati nell'ultima colonna. Per esempio dalle 8.00 alle 10.00 sono in servizio i dipendenti del secondo e del terzo turno e la loro somma deve superare 70:

$$x_1 + x_2 \geq 70.$$

La funzione da minimizzare è il costo complessivo giornaliero che è la somma dei costi relativi ai dipendenti assegnati a ciascun turno, quindi:

$$\text{minimizzare } Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 200x_5$$

mentre i vincoli sono:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & \geq 40 \\
 x_1 + x_2 & & \geq 70 \\
 x_1 + x_2 & & \geq 65 \\
 x_1 + x_2 + x_3 & & \geq 80 \\
 & x_2 + x_3 & \geq 65 \\
 & & x_3 + x_4 \geq 70 \\
 & & x_3 + x_4 \geq 80 \\
 & & x_4 \geq 40 \\
 & & x_4 + x_5 \geq 50 \\
 & & x_5 \geq 15
 \end{array}$$

e inoltre

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Possiamo osservare che alcuni vincoli non sono necessari. Infatti i vincoli di nonnegatività per x_1, x_4 e x_5 sono ridondanti in virtù del primo, dell'ottavo e del decimo vincolo, così come anche il terzo vincolo, a causa della presenza del secondo (se la somma tra x_1 e x_2 deve essere maggiore di 70 allora è chiaro che supera anche 65) ma anche il sesto esattamente per un motivo analogo.

1.1.7 Un problema di pianificazione urbana

Il piano regolatore di una città prevede che in una zona debbano essere costruiti il nuovo ospedale, il carcere, una caserma dei Vigili del Fuoco, una scuola, un parcheggio ed una chiesa. Sono state individuate 6 zone in cui le strutture potrebbero essere costruite e, per ciascun'opera, sono stati determinati i costi per l'eventuale realizzazione in ognuna delle aree. Tali costi (in milioni di euro) sono riassunti nella seguente tabella.

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6
Carcere	7.0	8.0	6.5	9.0	8.0	7.0
Ospedale	9.0	9.0	8.0	7.0	6.0	9.0
Caserma	4.0	4.5	3.5	4.0	3.0	3.5
Scuola	2.0	2.0	1.5	2.5	1.0	1.5
Parcheggio	0.5	0.3	0.5	0.6	0.5	0.6
Chiesa	2.0	1.5	1.0	1.5	2.0	1.8

Si vuole pianificare la costruzione delle 6 opere pubbliche minimizzando il costo complessivo della loro realizzazione.

In questo caso il problema che si vuole descrivere è quello di associare ad ogni elemento di un insieme (ovvero quello delle opere da costruire) un singolo elemento di un secondo insieme (ovvero quello delle zone edificabili), in modo tale che non ci sia nessun elemento (di entrambi gli insiemi) che non sia associato a nulla oppure abbia più associazioni. Definiamo quindi le variabili x_{ij} tali che

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima opera viene realizzata nella } j\text{-esima zona;} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i, j = 1, \dots, 6$. Ogni x_{ij} è una variabile binaria (può assumere solo due valori). Per esempio se fosse $x_{11} = 1$ allora tutte le variabili x_{1j} , con $j \neq 1$, e x_{i1} , con $i \neq 1$, dovrebbero essere uguali a zero. Il valore assunto da tale insieme di variabili potrebbe essere riassunto in una matrice, per esempio la seguente

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Indicato con c_{ij} il costo richiesto per la realizzazione della i -esima opera nella j -esima zona, il costo complessivo richiesto risulterebbe essere

$$Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij} \quad (1.2)$$

Se la scelta fosse stata quella schematizzata dalla matrice (1.1) allora il costo complessivo sarebbe stato pari a

$$Z = 7 + 8 + 3.5 + 2.5 + 0.3 + 2 = 15.3 \text{ M€}.$$

Obiettivo è quello di minimizzare la funzione (1.2) al variare di tutte le possibili matrici (1.1). I vincoli sono legati alla richiesta che in ogni riga ed in ogni colonna della matrice X ci sia solo un elemento uguale a 1. Questo

può essere tradotto richiedendo che la somma degli elementi di ogni riga e di ogni colonna della matrice X sia uguale a 1 e che gli elementi possano essere uguali a 0 o a 1.

Riassumendo il modello matematico è il seguente

$$\min Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}$$

soggetto ai vincoli

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 x_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, 6 \\ \sum_{i=1}^6 x_{ij} &= 1, \quad j = 1, \dots, 6 \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

1.1.8 Un esempio sportivo

Sapendo che una squadra di pallavolo dopo 15 partite di campionato ha vinto 20 set e ne ha persi 30, si vuol determinare il massimo dei punti che potrebbe avere ottenuto.

Come noto i possibili risultati di una partita di pallavolo sono solo sei: tre in caso di vittoria (per 3 set a zero, 3 set a 1 oppure 3 set a 2) e tre in caso di sconfitta (analogamente 0-3, 1-3 oppure 2-3). Il numero di punti assegnati per la vittoria è 3 (se il risultato è 3-0 oppure 3-1) oppure 2 (se il risultato è 3-2). Per la sconfitta è assegnato solo un punto se il risultato è 2-3, altrimenti non sono assegnati punti. Poichè è noto il numero dei set vinti e persi conviene definire sei variabili, ognuna delle quali conta un diverso risultato:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{numero di vittorie per } 3-0; \\ x_2 &= \text{numero di vittorie per } 3-1; \\ x_3 &= \text{numero di vittorie per } 3-2; \\ x_4 &= \text{numero di sconfitte per } 0-3; \\ x_5 &= \text{numero di sconfitte per } 1-3; \\ x_6 &= \text{numero di sconfitte per } 2-3. \end{aligned}$$

In questo caso il numero di punti è la funzione

$$Z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6$$

che deve essere massimizzata. I vincoli sono tre:

1) Il numero di partite:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15;$$

2) Il numero di set vinti

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 = 20;$$

3) Il numero di set persi

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 30.$$

Riassumendo, la formulazione matematica del problema è la seguente

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 30. \\ & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

1.1.9 Il problema del trasporto

Una ditta di trasporto deve trasferire container vuoti dai propri 6 Magazzini, situati a Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia, ai principali Porti nazionali (Genova, Venezia, Ancona, Napoli, Bari). Le disponibilità di container vuoti ai Magazzini sono le seguenti

	Container vuoti
Verona	10
Perugia	12
Roma	20
Pescara	24
Taranto	18
Lamezia	30

e le richieste ai Porti sono le seguenti:

	Container richiesti
Genova	20
Venezia	15
Ancona	25
Napoli	33
Bari	21

Il costo del trasporto dei container dai magazzini ai porti è proporzionale alla distanza percorsa dal camion che lo trasporta. I costi (in €) di trasporto per un singolo container sono riportati nella seguente tabella:

	Genova	Venezia	Ancona	Napoli	Bari
Verona	290	115	355	715	810
Perugia	380	340	165	380	610
Roma	505	530	285	220	450
Pescara	655	450	155	240	315
Taranto	1010	840	550	305	95
Lamezia	1072	1097	747	372	333

Si vuole formulare il relativo problema di ottimizzazione avendo come obiettivo la minimizzazione dei costi di trasporto.

Innanzitutto associamo ad ognuno dei sei magazzini un numero intero (1=Verona, 2=Perugia, 3=Roma, 4=Pescara, 5=Taranto, 6=Lamezia) e ad ognuno dei porti un altro numero intero (1=Genova, 2=Venezia, 3=Ancona, 4=Napoli, 5=Bari). Per determinare il costo complessivo del trasporto si deve conoscere il numero di container che sono trasportati da ciascun magazzino ad ogni porto. Definiamo pertanto le seguenti variabili nonnegative

x_{ij} = il numero di container spediti dal magazzino i al porto j ,

con $i = 1, \dots, 6$, e $j = 1, \dots, 5$.

Per semplicità indichiamo con c_{ij} il costo unitario per trasportare un container dall' i -esimo magazzino al j -esimo porto.

La funzione obiettivo, da minimizzare, è pertanto

$$Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}.$$

I vincoli derivano dalla richiesta che ovviamente tutti i container presenti in ciascun magazzino devono essere inviati ai porti. Pertanto avremo esattamente 6 vincoli di uguaglianza:

$$\begin{array}{rcccccl} x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & +x_{15} & = & 10 \\ x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & +x_{25} & = & 12 \\ x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & +x_{35} & = & 20 \\ x_{41} & +x_{42} & +x_{43} & +x_{44} & +x_{45} & = & 24 \\ x_{51} & +x_{52} & +x_{53} & +x_{54} & +x_{55} & = & 18 \\ x_{61} & +x_{62} & +x_{63} & +x_{64} & +x_{65} & = & 30 \end{array}$$

Analogamente ogni porto potrà ricevere un numero di container pari alla sua capacità. Dobbiamo pertanto aggiungere altri 5 vincoli, uno per ciascun porto:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} &= 20 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} &= 15 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} &= 25 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} &= 33 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} &= 21
 \end{aligned}$$

A questi vanno aggiunti i vincoli di interezza per ciascuna variabile x_{ij} . Riassumiamo il modello finale:

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 10 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 12 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 20 \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 24 \\
 x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 18 \\
 x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} &= 30 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} &= 20 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} &= 15 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} &= 25 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} &= 33 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} &= 21 \\
 x_{ij} &\in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

1.1.10 Un esempio di pianificazione edilizia

In un terreno di 8 ettari una società deve costruire alcuni impianti sportivi, ovvero campi di calcio, di calcetto, di tennis, di pallavolo e di pallacanestro. Si vuole massimizzare il numero di impianti da costruire considerando che i relativi costi e le dimensioni sono riassunti nella seguente tabella:

Impianto	Dimensioni (in metri)	Costo (in M€)
Calcio	100×50	1.0
Calcio a 5	40×20	0.4
Tennis	24×11	0.3
Pallavolo	18×9	0.5
Pallacanestro	28×15	0.5

Bisogna inoltre considerare che l'estensione di ciascun impianto va aumentata del 10% per gli spazi da adibire a strade, spogliatoi e spazio libero intorno ai campi, che la società ha a disposizione 4 milioni di euro, che bisogna costruire almeno un impianto per ciascuna tipologia e che il numero di campi di pallacanestro e pallavolo non deve superare la metà del numero degli altri impianti.

La funzione da massimizzare è il numero di impianti complessivo pertanto bisogna conoscere il numero di ciascun tipo di impianto da costruire. Definiamo pertanto 5 variabili:

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{Numero di campi di calcio da costruire} \\x_2 &= \text{Numero di campi di calcio a 5 da costruire} \\x_3 &= \text{Numero di campi di tennis da costruire} \\x_4 &= \text{Numero di campi di pallavolo da costruire} \\x_5 &= \text{Numero di campi di pallacanestro da costruire.}\end{aligned}$$

La funzione obiettivo, da massimizzare, è pertanto la seguente:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

Il primo vincolo riguarda lo spazio a disposizione, bisogna pertanto calcolare i metri quadri richiesti da ciascun impianto sportivo.

Superficie campo di calcio	$= 100 \times 50 \text{ m}^2 = 5000$	$+10\% = 5050\text{m}^2$
Superficie campo di calcio a 5	$= 40 \times 20 \text{ m}^2 = 800$	$+10\% = 880\text{m}^2$
Superficie campo di tennis	$= 24 \times 11 \text{ m}^2 = 464$	$+10\% = 510.4\text{m}^2$
Superficie campo di pallavolo	$= 18 \times 9 \text{ m}^2 = 162$	$+10\% = 178.2\text{m}^2$
Superficie campo di pallacanestro	$= 28 \times 15 \text{ m}^2 = 720$	$+10\% = 792\text{m}^2$

Pertanto deve risultare:

$$5050x_1 + 880x_2 + 510.4x_3 + 178.2x_4 + 792x_5 \leq 80000\text{m}^2.$$

Il secondo vincolo riguarda i costi complessivi che non devono superare la cifra disponibile:

$$x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 \leq 4 \text{ M€}.$$

L'ultima riguarda il vincolo sul numero di campi di pallacanestro e pallavolo:

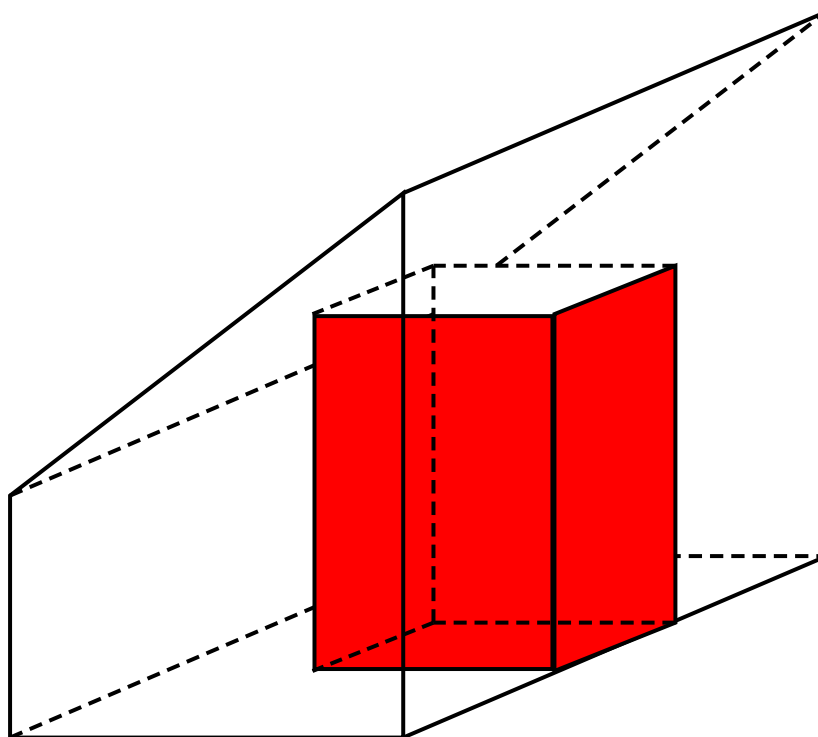
$$x_4 + x_5 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

Il vincolo di nonnegatività è sostituito dal requisito che tutte le variabili x_i devono essere maggiori o uguali di 1. La formulazione del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ & 5050x_1 + 880x_2 + 510.4x_3 + 178.2x_4 + 792x_5 \leq 80000 \\ & x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.5x_4 + 0.5x_5 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 \geq 0. \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1, \text{ variabili intere.} \end{aligned}$$

1.1.11 Un esempio di modello non lineare

Un'industria chimica deve costruire un serbatoio scoperto da adibire all'immagazzinamento di un prodotto liquido utilizzando una quantità di lamiera pari a 150 metri quadri. Il serbatoio deve essere collocato all'interno di un capannone a pianta quadrata con lato di 15 metri e con un tetto spiovente dall'altezza di 7 metri fino all'altezza di 4 metri. Per semplicità si suppone che il serbatoio abbia la forma di un prisma retto con base quadrata. Si vuole formulare il problema di determinare le dimensioni del serbatoio in modo tale che il volume sia massimo.



Appare chiaro che, dovendo determinare le dimensioni del serbatoio, ovvero la lunghezza del lato di base e dell'altezza, si pongano, come variabili del problema:

$$\begin{aligned}x_1 &= \text{lunghezza del lato di base} \\x_2 &= \text{lunghezza dell'altezza.}\end{aligned}$$

Il volume del serbatoio è quindi

$$Z = x_1^2 x_2$$

che è la funzione da massimizzare.

I vincoli sulle variabili del problema sono di due tipi:

- 1) vincoli sulla quantità di lamiera da utilizzare;
- 2) vincoli sulle dimensioni del serbatoio rispetto al capannone che lo deve contenere.

La lamiera disponibile (ovvero 150 metri quadri) deve essere sufficiente per costruire solo la base e le pareti laterali, ovvero la superficie complessiva deve essere

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = 150.$$

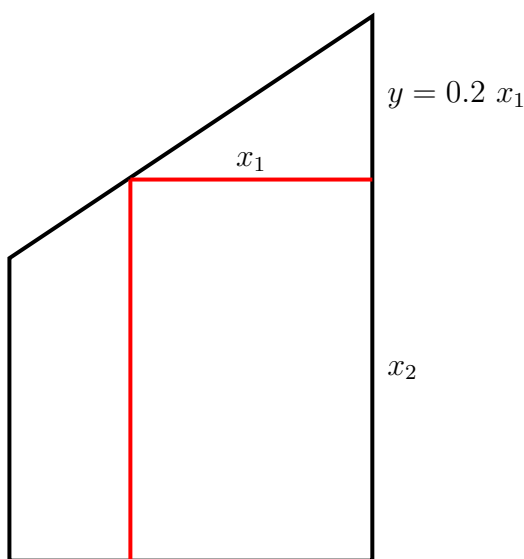
Per quello che riguarda le dimensioni deve essere innanzitutto

$$x_1 \leq 15.$$

Per determinare il vincolo sull'altezza calcoliamo prima la pendenza del tetto (ovvero il rapporto tra la differenza di ordinate e quella di ascisse):

$$p = \frac{7 - 4}{15} = \frac{3}{15} = 0.2$$

cosicchè, dalla seguente figura (non in scala)



si evince che deve essere

$$x_2 + 0.2x_1 = 7.$$

Il problema di programmazione lineare può quindi essere riassunto nel seguente modo:

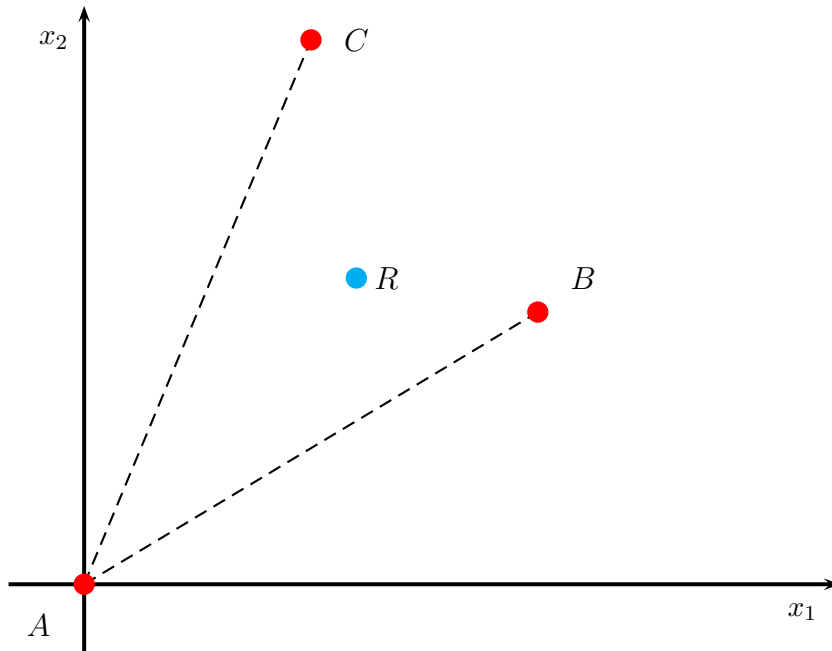
$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1^2 x_2 \\ & x_1^2 + 4x_1 x_2 = 150 \\ & x_1 \leq 15 \\ & 0.2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo esempio sia la funzione Z che i vincoli sulle variabili x_1, x_2 sono di tipo non lineare.

1.1.12 Un altro esempio di modello non lineare

Una compagnia petrolifera si rifornisce di greggio in tre città portuali, indicate con A, B e C. Il porto B è ubicato a 200 km a est e a 150 km a nord del porto A. Il porto C si trova a 100 km a est e a 300 km a nord del porto A. La compagnia intende costruire una nuova raffineria in modo tale da minimizzare la quantità totale di tubi occorrenti per collegare la raffineria ai porti. Inoltre la raffineria non può essere costruita a sud del porto A nè a meno di 100 km di distanza da questo.

Innanzitutto scegliamo un sistema di riferimento in cui il porto A coincide con l'origine, in modo tale che i tre porti abbiano le seguenti coordinate: $A(0, 0)$, $B(200, 150)$ e $C(100, 300)$.



Siano (x_1, x_2) le coordinate del punto dove costruire la raffineria R. Calcoliamo le distanze di R dai tre porti:

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \overline{BR} &= \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} \\ \overline{CR} &= \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}\end{aligned}$$

cosicchè la distanza totale dai tre porti è la funzione

$$Z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} + \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}.$$

Un primo vincolo è che risulti $x_2 \geq 0$ (la raffineria deve trovarsi infatti a nord del porto A). Inoltre deve distare da questo più di 100 km quindi deve essere

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 100^2.$$

Il problema può essere quindi formulato nel seguente modo

$$\min Z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 200)^2 + (x_2 - 150)^2} + \sqrt{(x_1 - 100)^2 + (x_2 - 300)^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 10000$$

$$x_2 \geq 0.$$

1.2 Esercizi

Esercizio 1.2.1 *Una multinazionale produce biocarburanti in uno stabilimento composto da tre reparti: Preparazione, Purificazione ed Estrazione. Le tipologie di carburanti sono due: il biometano ed il biodiesel. I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata di prodotto sono riportati nella seguente tabella, insieme alla capacità produttiva giornaliera di ciascun reparto.*

Reparto	Ore di lavorazione per tonnellata		Capacità giornaliera (ore)
	Biometano	Biodiesel	
Preparazione	0.50	0.75	18
Purificazione	1.10	1.35	18
Estrazione	1.85	1.95	15

Il management intende pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di carburante sapendo che il biometano produce un ricavo di 500 € per tonnellata, il biodiesel 590 € per tonnellata con l'obiettivo di massimizzare il ricavo giornaliero. Si scriva il relativo modello di ottimizzazione.

Esercizio 1.2.2 *Un'azienda chimica può produrre due tipi di fertilizzanti. Ogni quintale di fertilizzante di tipo A contiene 0.1 quintali di azoto e 0.3*

quintali di potassio e ha un prezzo di vendita di 300€. Ogni quintale di fertilizzante di tipo B contiene 0.2 quintali di azoto, 0.1 quintali di potassio e ha un prezzo di vendita di 400€. L'azienda dispone di 9 quintali di azoto e di 10 quintali di potassio. Si scriva il relativo modello di ottimizzazione volendo conoscere le produzioni giornaliere espresse in quintali di A e B che rendono massimo il ricavo supponendo che, per problemi di tipo tecnologico, le produzioni di A e B devono essere nel rapporto $1/2$ e che ci sia una domanda di mercato pari almeno a 20 quintali di prodotto tra A e B.

Esercizio 1.2.3 Un'azienda deve produrre 2 profilati metallici (A e B) che richiedono l'impiego di manodopera, disponibile al massimo in 36 squadre. Per la produzione giornaliera di un lotto di A e di un lotto di B si impiegano rispettivamente 3 e 6 squadre. È necessario produrre tra A e B almeno 4 lotti al giorno. Si possono impiegare due diverse tecnologie (1 e 2). La tecnologia 1 produce al massimo 2 lotti di B per ogni lotto di A (cioè le produzioni di B ed A sono al massimo nel rapporto due a uno). La tecnologia 2 produce al massimo 2 lotti di A per ogni lotto di B (cioè le produzioni di A e B sono al massimo nel rapporto due a uno). Il profitto unitario è lo stesso per entrambi i prodotti. Si scriva il relativo modello di ottimizzazione volendo determinare il piano di produzione giornaliero che massimizzi il profitto totale. (Osservazione. Ogni soluzione ammissibile deve essere tale da soddisfare entrambi i vincoli sulle tecnologie utilizzate.)

Esercizio 1.2.4 Un'azienda di materie plastiche ha avuto una commessa per la quale deve consegnare entro una settimana almeno 4 tonnellate di materiale dei prodotti A e B. Problemi di organizzazione del lavoro impongono che la differenza tra le quantità prodotte di B e di A sia al massimo pari a 4 tonnellate. I vincoli posti dal sistema tecnologico impongono invece che per ogni tonnellata di A si producano almeno 2 tonnellate di B. I costi di produzione di A e di B sono nel rapporto uno a tre. Si scriva il relativo modello di ottimizzazione volendo conoscere il piano di produzione che minimizzi il costo totale.

Esercizio 1.2.5 In un commissariato di polizia si deve provvedere alla riorganizzazione dei turni giornalieri, ciascuno dei quali è composto da 4 ore. Ogni poliziotto deve lavorare giornalmente per due turni alternati, per esempio, chi inizia a lavorare al primo turno lavorerà anche al terzo, chi inizia al secondo turno lavorerà anche al quarto, e così via. Nella seguente tabella,

per ogni turno, è riportato il numero minimo di poliziotti che devono essere presenti in quel turno:

Turno	1	2	3	4	5	6
Orario	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24
Num. minimo	30	25	50	40	60	35

Per esempio, nel turno 4, cioè dalle ore 12 alle ore 16, devono essere in servizio almeno 40 poliziotti. La retribuzione dei poliziotti è di 14 euro all'ora per i turni diurni (3, 4, 5 e 6) e di 20 euro all'ora per i turni notturni (1 e 2). Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare le spese giornaliere di retribuzione dei poliziotti.

Esercizio 1.2.6 L'allenatore della staffetta italiana 4×100 mista di nuoto deve decidere i 4 atleti da schierare dei 6 disponibili. Nella seguente tabella sono riportati i tempi medi, in secondi, di ciascun nuotatore in ognuna delle 4 frazioni:

Nuotatore	Dorso	Rana	Delfino	Stile libero
Alberto	65	73	63	57
Bruno	67	70	65	58
Carlo	68	72	69	55
Donato	67	75	70	59
Erminio	71	69	75	57
Francesco	69	71	66	59

Scrivere il relativo modello di ottimizzazione per assegnare ciascun nuotatore ad una delle 4 frazioni volendo minimizzare il tempo complessivo della staffetta.

Esercizio 1.2.7 Un'industria chimica produce due tipi di concimi, A e B, che si differenziano per il diverso contenuto di azoto e ferro. Il concime di tipo A deve contenere almeno il 25% di azoto e almeno il 10% di ferro, mentre il concime di tipo B deve contenere esattamente il 20% di azoto e almeno il 16% di ferro. I concimi si ottengono facendo due composti contenenti azoto e ferro. L'industria dispone di 30.000 kg di composto 1, acquistato al prezzo di 3 €/kg, e di 25.000 kg di composto 2, acquistato al prezzo di 4 €/kg. Il composto 1 contiene il 40% di ferro ed il 50% di azoto, il composto 2 contiene il 6% di ferro ed il 70% di azoto. Si scriva il modello di ottimizzazione della

produzione dei due concimi sapendo che la quantità di concime deve essere pari a 40.000 kg per quello di tipo A e 50.000 kg per quello di tipo B con l'obiettivo di minimizzare i costi di produzione.

Esercizio 1.2.8 Un'azienda ospedaliera deve riorganizzare i turni del personale paramedico. Ogni infermiere, indipendentemente dalla collocazione all'interno della settimana, lavora 5 giorni consecutivi e poi ha diritto a due giorni di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza del seguente numero minimo di infermieri:

Giorno	Numero minimo
Lunedì	28
Martedì	18
Mercoledì	20
Giovedì	26
Venerdì	22
Sabato	13
Domenica	13

Ciascun infermiere viene retribuito in base al giorno della settimana in cui lavora. In particolare il costo che l'ospedale sostiene per retribuire un infermiere è di 50 euro al giorno (per i turni del lunedì, martedì, mercoledì, giovedì e venerdì), di 75 euro al giorno per i turni di sabato e di 85 euro al giorno per i turni di domenica. Ad esempio, un infermiere il cui turno comincia il giovedì, per i suoi 5 giorni lavorativi (dal giovedì al lunedì) riceve una retribuzione pari a euro 310 (ovvero $50 \times 3 + 75 + 85$). Scrivere il relativo modello di ottimizzazione considerando che l'obiettivo dell'azienda ospedaliera è quello di minimizzare i costi complessivi settimanali di retribuzione degli infermieri.

Esercizio 1.2.9 Il Ministero della Sanità ha in progetto la costruzione di ospedali ortopedici specializzati, che nel raggio di 200 km siano in grado di servire le seguenti città: Latina, Lecce, Matera, Napoli, Potenza, Salerno e Roma. Nel seguito, per ogni città, sono elencate quelle situate a una distanza inferiore ai 200 km:

1. Latina: Latina, Napoli, Roma;
2. Lecce: Lecce, Matera;
3. Matera: Lecce, Matera, Potenza;
4. Napoli: Latina, Napoli, Potenza, Salerno;
5. Potenza: Matera, Napoli, Potenza, Salerno;

6. Salerno: Napoli, Potenza, Salerno;

7. Roma: Latina, Roma.

Ad esempio, se un ospedale venisse costruito a Napoli, esso sarebbe in grado di servire anche le città di Latina, Potenza e Salerno, che si trovano a una distanza da Napoli inferiore a 200 km. Si vuole decidere in quale delle 7 città costruire gli ospedali, in maniera tale che ogni città abbia almeno un ospedale ad una distanza non superiore a 200 km e tenendo conto che in una stessa città non si può costruire più di un ospedale.

Scrivere il relativo modello di ottimizzazione avendo l'obiettivo di minimizzare il numero di ospedali da costruire.

Esercizio 1.2.10 *Un coltivatore ha a disposizione 16 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione sono 70 kg. di semi di lattuga, 18 tonnellate di tuberi e 160 tonnellate di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione, la resa stimata per la lattuga è 3000€ per ettaro e quella per le patate è 6500€ per ettaro. L'assorbimento di risorse per un ettaro coltivato è di 7 kg di semi e 10 tonnellate di concime per la lattuga e 3 tonnellate di tuberi e 20 di concime per le patate. Scrivere il modello di ottimizzazione volendo stabilire quanti ettari di terreno destinare a lattuga e quanti a patate e avendo l'obiettivo di massimizzare il ricavo.*

Esercizio 1.2.11 *Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti:*

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

Scrivere il modello di ottimizzazione con l'obiettivo di minimizzare i costi per il trasporto delle merci dagli stabilimenti ai magazzini.

Esercizio 1.2.12 *Un'industria alimentare produce hamburger del peso di almeno 100 grammi costituito da carne macinata di manzo e di maiale. Il macinato di manzo contiene l'80% di polpa ed il 20% di grasso e costa all'industria 6 euro al chilogrammo. Il macinato di maiale contiene il 68% di*

polpa ed il 32% di grasso e costa all'industria 3.5 euro al chilogrammo. Si vuole determinare la quantità di macinato di manzo e di maiale da utilizzare per produrre ogni singolo hamburger che superi il peso minimo ed evitando che il contenuto grasso dell'hamburger superi i 25 grammi ma che sia superiore a 10 grammi avendo l'obiettivo di minimizzare il costo delle materie prime.

Esercizio 1.2.13 Un condominio deve effettuare la ristrutturazione del fabbricato. Un ingegnere incaricato di redarre il capitolato di spesa individua cinque lavori da eseguire prioritariamente:

I lavoro: Rifacimento dell'impianto elettrico;

II lavoro: Rifacimento dell'impianto idrico;

III lavoro: Tinteggiatura vano scale;

IV lavoro: Rifacimento frontespizio;

V lavoro: Rifacimento balconi.

L'amministratore contatta cinque ditte che sottopongono un preventivo per ciascuna delle cinque voci previste dal capitolato riassunto nella seguente tabella:

	<i>Ditta 1</i>	<i>Ditta 2</i>	<i>Ditta 3</i>	<i>Ditta 4</i>	<i>Ditta 5</i>
<i>I Lavoro</i>	6.0	5.5	6.0	4.0	5.0
<i>II Lavoro</i>	8.0	8.0	7.0	8.0	7.5
<i>III Lavoro</i>	4.0	4.5	4.0	5.0	5.5
<i>IV Lavoro</i>	10.0	9.0	10.0	8.0	9.0
<i>V Lavoro</i>	3.0	3.5	2.5	2.9	3.0

L'assemblea condominiale deve assegnare i lavori alle ditte con l'obiettivo di minimizzare il costo complessivo della ristrutturazione ma volendo assegnare ogni singolo lavoro ad una ditta diversa in modo tale da minimizzare il tempo di esecuzione dei lavori.

Capitolo 2

Richiami di algebra lineare e geometria dei poliedri

2.1 Elementi di Algebra Lineare

Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un insieme ordinato di n numeri reali disposti per convenzione in una colonna e viene rappresentato nel seguente modo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Il vettore può essere anche rappresentato come una riga utilizzando l'operazione di *trasposizione*, che viene indicata aggiungendo T come apice:

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n].$$

Considerando l'insieme $\mathbb{R}^n$ come uno spazio ad n dimensioni un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ può essere visto un punto appartenente al suddetto spazio. Da questo punto di vista i termini *vettore* e *punto* possono essere considerati come sinonimi. Si definisce *norma euclidea* di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o *lunghezza* la quantità non negativa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

e può essere considerata come una misura della grandezza di un vettore (ricordiamo che nello spazio $\mathbb{R}^n$ non esiste il concetto di ordinamento).

Si possono definire operazioni che coinvolgono vettori e scalari, per esempio se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ allora il vettore $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{x}$ è il seguente

$$\alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix},$$

ma anche le classiche operazioni tra vettori, come la somma tra $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

La *combinazione lineare* tra m vettori $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ ed altrettanti scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ è ottenuta come

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_1^{(i)} \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_2^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_n^{(i)} \end{bmatrix},$$

che ovviamente è sempre un vettore appartenente ad $\mathbb{R}^n$.

Gli m vettori $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono m scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, non tutti nulli, tali che la combinazione lineare tra gli m vettori e gli m scalari sia uguale a zero.

Un primo tipo di *prodotto* tra vettori è il cosiddetto **prodotto interno** (o scalare), spesso indicato come $(\cdot, \cdot)$, e che è definito nel seguente modo: siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha$$

e il risultato è un numero reale. Il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = 0$;
2. $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
3. $(\alpha \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T \mathbf{y})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
4. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T \mathbf{z} = \mathbf{x}^T \mathbf{z} + \mathbf{y}^T \mathbf{z}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.
5. se $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ allora i due vettori si dicono **ortogonali**.

Assegnati due numeri interi positivi $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, si definisce **matrice** una tabella avente m righe ed n colonne. Se gli elementi della matrice sono numeri reali allora l'insieme delle matrici aventi m righe ed n colonne si indica con $\mathbb{R}^{m \times n}$. Per convenzione le matrici si indicano con lettere maiuscole dell'alfabeto latino. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora m ed n si dicono **dimensioni della matrice**. Se consideriamo due numeri interi $i, j \in \mathbb{N}$, tali che $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, questi identificano, rispettivamente, una riga ed una colonna della matrice A , e l'elemento che si trova nella posizione (i, j) viene indicato con a_{ij} . Una matrice di dimensione $m \times n$ può essere rappresentata nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se $m = n$ allora la matrice A si dice **quadrata** di dimensione n o di ordine n altrimenti si dice **rettangolare**. Gli elementi a_{ij} di una matrice quadrata A di ordine n tali che $i = j$ sono detti **elementi principali** o **diagonali** e formano la cosiddetta diagonale principale di A .

Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce **matrice trasposta di A** la matrice $B = A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tale che

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Se accade che $A = A^T$ allora la matrice è detta **simmetrica**. Assegnate due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si definisce **somma** di A e B , e si denota con $C = A + B$, la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i cui elementi sono:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

In modo analogo si definisce la **differenza** tra matrici, infatti $D = A - B$ è la matrice avente elementi:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora la matrice $C = \alpha A$ è definita da:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ si definisce *prodotto* di A per B la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i cui elementi sono

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si noti che affinché tale prodotto abbia senso è necessario che il numero delle colonne di A coincida con il numero delle righe di B . Quando ciò accade le matrici si dicono **conformabili**, altrimenti si dicono **non conformabili**. Ad esempio nel nostro caso se $m \neq n$ allora il prodotto BA non ha senso. Ha sempre significato considerare i prodotti AB e BA se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine ($m = n$).

È facile verificare che il prodotto tra matrici gode della proprietà *associativa* ma in generale non di quella **commutativa**. Vale invece la seguente proprietà:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Esempio 2.1.1 Siano A e B le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice $C = AB$. L'elemento c_{ij} è uguale alla somma dei prodotti degli elementi della i -esima riga di A per la j -esima colonna di B .

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 6 \\ c_{12} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4 \\ c_{13} &= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -2 \\ c_{21} &= -1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 0 \\ c_{22} &= -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ c_{23} &= -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 \\ c_{31} &= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 8 \\ c_{32} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5 \\ c_{33} &= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

In definitiva

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcolando il prodotto $D = BA$ si trova invece:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui risulta evidente che $AB \neq BA$.

Si definisce **matrice identità di ordine n** la matrice quadrata diagonale I_n avente tutti gli elementi principali uguali a 1:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice identità è l'elemento neutro per il prodotto, cioè se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si ha

$$AI_n = I_n A = A.$$

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

dove $A_{11}, B_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $A_{12}, B_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$, $A_{21}, B_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ e infine $A_{22}, B_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, con $p < n$, rappresentano a loro volta matrici e non semplici elementi. Si dice cioè che A e B sono state suddivise a blocchi. Il prodotto AB può essere calcolato utilizzando tale decomposizione delle matrici:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Tale modo di effettuare il prodotto tra matrici viene detto **prodotto a blocchi** ed è molto utile quando le matrici hanno una particolare struttura (per

esempio se uno dei blocchi è identicamente nullo oppure è uguale alla matrice identità). Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, una matrice $B \in \mathbb{R}^{h \times k}$, $0 < h \leq m$, $0 < k \leq n$, è detta **sottomatrice** di A se è ottenuta da A eliminando $m - h$ righe ed $n - k$ colonne. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, una sottomatrice quadrata B di ordine $k \leq n$ di A è detta **principale** se gli elementi principali di B sono anche gli elementi principali di A . Una sottomatrice B principale di ordine k di A è detta **principale di testa** se è formata dagli elementi a_{ij} , $i, j = 1, \dots, k$.

Esiste un secondo prodotto tra vettori, il cosiddetto **prodotto esterno**: se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ allora viene definito nel seguente modo:

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$$

e il risultato è una matrice di dimensione $n \times m$ i cui elementi sono:

$$a_{ij} = x_i y_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Osservazione. A differenza del prodotto scalare il prodotto esterno può essere eseguito anche tra vettori che hanno un numero differente di elementi.

Esempio 2.1.2 Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i seguenti vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo prima il prodotto interno:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 7.$$

Osserviamo che tale operazione gode della proprietà commutativa, poichè $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 7$.

Per quello che riguarda il prodotto esterno, il risultato è la matrice

$$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ -3 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Tale prodotto non gode della proprietà commutativa, infatti:

$$B = \mathbf{y}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Infatti $B \neq A$, anche se va osservato che $B = A^T$.

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è possibile definire il prodotto matrice per vettore nel seguente modo:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

quindi $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Non è possibile effettuare il prodotto $A\mathbf{x}^T$ perchè le dimensioni non sono compatibili.

Esempio 2.1.3 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

e sia $\mathbf{x}$ il vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il vettore prodotto $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 7 \\ y_2 &= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 7 \\ y_3 &= 5 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -2. \end{aligned}$$

Definizione 2.1.1 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice di ordine $n = 1$, si definisce *determinante di A* il numero

$$\det A = a_{11}.$$

Se la matrice A è quadrata di ordine n allora, fissata una qualsiasi riga (colonna) di A , diciamo la i -esima (j -esima), applicando la cosiddetta *regola di Laplace* il determinante di A è:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

Il determinante è pure uguale a

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

cioè il determinante è indipendente dall'indice di riga (o di colonna) fissato. Se A è la matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Assegnata la matrice A di ordine 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e prendendo $i = 1$ risulta

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Il determinante ha le seguenti proprietà:

1. Se A è una matrice triangolare o diagonale allora

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii};$$

2. $\det I = 1$;

3. $\det A^T = \det A$;

4. $\det AB = \det A \det B$ (Regola di Binet);

5. se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $\det \alpha A = \alpha^n \det A$;

6. $\det A = 0$ se una riga (o una colonna) è nulla, oppure una riga (o una colonna) è proporzionale ad un'altra riga (o colonna) oppure è combinazione lineare di due (o più) righe (o colonne) di A .

Una matrice A di ordine n si dice **non singolare** se il suo determinante è diverso da zero, in caso contrario viene detta *singolare*. Si definisce **inversa di A** la matrice A^{-1} tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Per quello che riguarda il determinante della matrice inversa vale la seguente proprietà:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Ricordiamo che se A, B e C sono matrici invertibili, in base alla regola di Binet, anche il loro prodotto è una matrice invertibile e risulta

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Questa proprietà vale anche se abbiamo più di due matrici, cioè:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

2.1.1 Calcolo della matrice inversa

Per il calcolo della matrice inversa si può utilizzare il cosiddetto **algoritmo di Gauss-Jordan**, che si basa su un'operazione fondamentale che consente di trasformare una matrice A (in generale di dimensione $m \times n$) in un'altra $\overline{A}$ in cui la k -esima colonna sia uguale alla h -esima colonna della matrice identità di ordine m , purchè l'elemento a_{hk} sia diverso da zero.

Per eseguire tale trasformazione si devono eseguire le seguenti operazioni:

1. Dividere la riga di indice h per l'elemento a_{hk} ;
2. Sottrarre da ogni riga i della matrice (con $i \neq h$) la riga h della matrice (quella appena modificata) moltiplicata per a_{ik} .

Esempio 2.1.4 *Consideriamo la matrice*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essendo $a_{22} = 2 \neq 0$ possiamo prendere tale elemento come pivot. Dividiamo la seconda riga per a_{22} :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adesso eseguiamo la sottrazione tra la prima riga e la seconda riga moltiplicata per 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adesso eseguiamo la sottrazione tra la terza riga e la seconda riga moltiplicata per 6:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 5 & 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss-Jordan consiste nell'applicare la suddetta trasformazione m volte, ottenendo una matrice che avrà m colonne uguali alla matrice identità. Per calcolare l'inversa di una matrice quadrata di ordine n applichiamo tale algoritmo alla matrice $[A \ I_n]$ di ordine $n \times 2n$ prendendo come pivot gli elementi in posizione (i, i) con $i = 1, \dots, n$. Alla fine di tale procedura si otterrà la matrice $[I_n \ B]$ di dimensione $n \times 2n$. Si osserva pertanto che

$$A^{-1}[A \ I_n] = [I_n \ B]$$

da cui si ricava che $B = A^{-1}$.

Esempio 2.1.5 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aggiungiamo a questa la matrice identità di ordine 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ed eseguiamo un'operazione di pivot sull'elemento $a_{11} = 3$. Innanzitutto dividiamo la prima riga per $a_{11} = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essendo $a_{21} = 0$ non eseguiamo nessuna operazione sulla seconda riga. Sottraiamo alla terza riga la prima moltiplicata per 5 (o analogamente sommiamo alla terza riga la prima moltiplicata per -5):

$$\begin{array}{cccccc}
 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & + \\
 -5 & -20/3 & -10/3 & -5/3 & 0 & 0 & = \\
 \hline
 0 & -2/3 & -1/3 & -5/3 & 0 & 1 &
 \end{array}$$

Si ottiene la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè $a_{22} = 2 \neq 0$ possiamo eseguire l'operazione di pivot su tale elemento. Dividiamo la seconda riga per 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sommiamo alla prima riga la seconda moltiplicata per $-4/3$:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 4/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & + \\
 0 & -4/3 & -4/3 & 0 & -2/3 & 0 & = \\
 \hline
 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 &
 \end{array}$$

Il risultato è la nuova prima riga della matrice.

Sommiamo ora alla terza riga la seconda moltiplicata per $2/3$:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & -2/3 & -1/3 & -5/3 & 0 & 1 & + \\
 0 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & = \\
 \hline
 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1/3 & 1 &
 \end{array}$$

Il risultato è la nuova terza riga della matrice.

Abbiamo ottenuto la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè $a_{33} = 4 \neq 0$ possiamo eseguire l'operazione di pivot su tale elemento.

Dividiamo la terza riga per $1/3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sommiamo alla prima riga la terza moltiplicata per $2/3$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 & + \\ 0 & 0 & 2/3 & -10/3 & 2/3 & 2 & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}$$

Il risultato di tale operazione costituisce la nuova prima riga della matrice.

Sommiamo alla seconda riga la terza moltiplicata per -1 :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & + \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -3 & = \\ \hline 0 & 1 & 0 & 5 & -1/2 & -3 \end{array}$$

Otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avendo ottenuto una matrice le cui prime tre colonne coincidono con quelle della matrice identità abbiamo terminato il calcolo della matrice inversa di

A che risulta essere:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & -1/2 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Rango di una matrice

Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il **rango** di A , indicato con $\text{rk}(A)$, è definito come il numero di righe (o di colonne) della più grande sottomatrice non singolare di A . Il rango di A coincide anche con il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti di A . Il rango, a differenza del determinante, è definito anche per matrici rettangolari, e si ha che

$$\text{rk}(A) \leq \min \{m, n\}.$$

Se risulta

$$\text{rk}(A) = \min \{m, n\}$$

allora si dice che la matrice *ha rango pieno*.

Se A è rettangolare con $m \leq n$, allora un insieme di $k \leq m$ colonne di A forma una sottomatrice corrispondente ad una *matrice di base* se:

1. le k colonne sono linearmente indipendenti;
2. aggiungendo una qualsiasi colonna restante di A a tale insieme si ottengono $k + 1$ colonne linearmente dipendenti.

2.2 Geometria poliedrale

Assegnati k vettori $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ e k scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ allora il vettore

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^{(i)}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

si dice:

- **combinazione affine di $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$** se

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1;$$

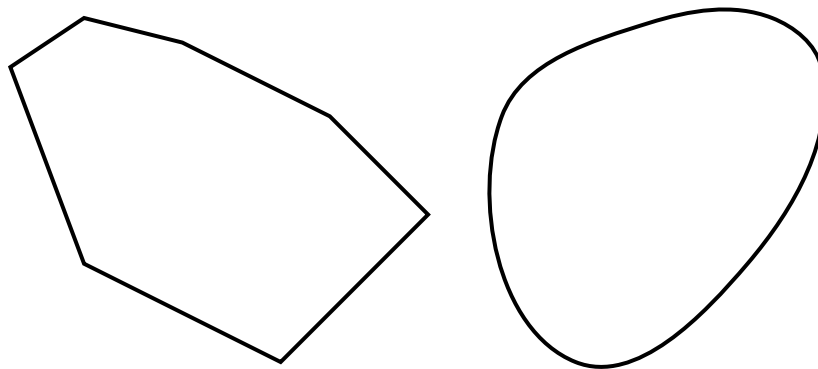
- **combinazione conica** di $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ se $\alpha_j \geq 0$, per $j = 1, \dots, k$;
- **combinazione convessa** di $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ se $\alpha_j \geq 0$, per $j = 1, \dots, k$, e

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

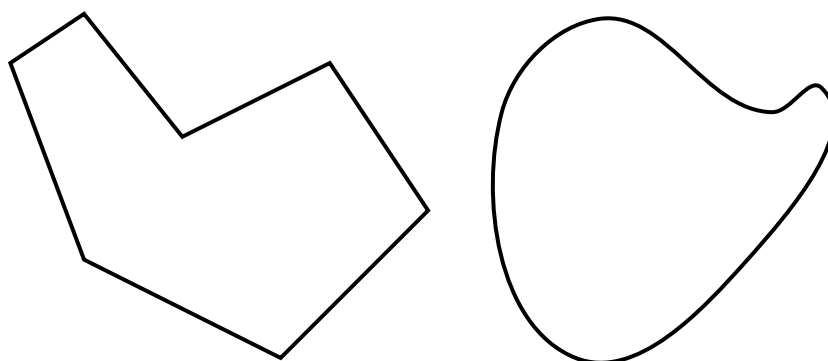
Definizione 2.2.1 Un insieme $P \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$ risulta

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in P, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Se un insieme è convesso allora, per ogni coppia di punti appartenenti ad esso, il segmento che li congiunge appartiene interamente all'insieme. I seguenti sono esempi di insiemi convessi.



I seguenti sono invece esempi di insiemi non convessi.



Un iperpiano $\mathbf{I}$ di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di punti che soddisfa un'equazione lineare e separa i punti di $\mathbb{R}^n$ in due regioni dette **semispazi**. Dato un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, uno scalare $b \in \mathbb{R}$ ed un vettore di variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{I}$ può essere rappresentato come

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}.$$

I punti di $\mathbb{R}^n$ sono suddivisi in due semispazi S_1 ed S_2 tali che

$$S_1 \cap S_2 = \mathbf{I}.$$

I due semispazi sono rappresentabili nel seguente modo:

$$S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$$

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}.$$

L'unione dei semispazi S_1 ed S_2 corrisponde a $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.2.2 *Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno **spazio affine** se e solo se la combinazione affine di ogni sottoinsieme finito di vettori di S appartiene ad S .*

Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore di variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ allora l'insieme

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

è uno spazio affine. Se il sistema di equazioni $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è composto da una sola equazione allora lo spazio affine è un iperpiano. Uno spazio affine è un insieme convesso.

Definizione 2.2.3 *Un **cono poliedrale** C è l'intersezione di un insieme finito di semispazi i cui iperpiani passano per l'origine.*

Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed un vettore di variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, C può essere rappresentato come

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq 0\}.$$

Anche un cono poliedrale è un insieme convesso.

Definizione 2.2.4 Un **poliedro** P è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, un vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ed un vettore di variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, allora il poliedro P può essere rappresentato come

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

Un poliedro P è **limitato** se esiste uno scalare M sufficientemente grande tale che, per ogni $\mathbf{x} \in P$ si ha che

$$\|\mathbf{x}\| \leq M.$$

Un poliedro limitato si dice **politopo**.

Assegnato un poliedro P un punto $\bar{\mathbf{x}} \in P$ si dice **vertice** se non può essere ottenuto come combinazione convessa di altri punti di P .

Capitolo 3

Programmazione lineare

3.1 Introduzione

I problemi di ottimizzazione, alcuni dei quali sono stati descritti nel precedente capitolo, hanno la seguente forma

$$\begin{cases} \max & Z = f(x) \\ x \in S \end{cases} \quad (3.1)$$

dove f è una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mentre $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Una possibile variazione del problema (3.1) è che il problema sia quello di minimizzare $f(x)$. La funzione

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

viene detta **funzione obiettivo**, le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, prendono il nome di **variabili decisionali**. Una qualunque assegnazione di valore alle variabili decisionali è detta **soluzione**. L'insieme S , che viene definito solitamente attraverso una serie di disequazioni, o anche equazioni, dette **vincoli**, prende il nome di **regione ammissibile**, o **regione di ammissibilità**. Ogni $x \in S$ viene detto **soluzione ammissibile**. Una **soluzione non ammissibile** è una soluzione che viola almeno un vincolo. La **soluzione ottima** è quella che fornisce il valore migliore per la funzione obiettivo (cioè il massimo o il minimo in base al tipo di problema da risolvere). Un problema viene detto **inammissibile** se $S = \emptyset$. Tra i diversi problemi di ottimizzazione è possibile distinguere i seguenti tipi:

- **Problemi di Ottimizzazione Continua**, se le variabili possono assumere valori reali, ovvero $x \in \mathbb{R}^n$, in particolare si parla di **Ottimizzazione Vincolata** se $S \subset \mathbb{R}^n$, **Ottimizzazione Non Vincolata** se $S = \mathbb{R}^n$.
- **Problemi di Ottimizzazione Discreta**, se le variabili possono assumere valori interi, ovvero $x \in \mathbb{N}^n$, in particolare si parla di **Programmazione Intera** se $S \subset \mathbb{N}^n$, **Programmazione Binaria** se le variabili decisionali possono assumere come valore solo 0 oppure 1.
- **Problemi di Programmazione Mista**, se alcune variabili possono assumere valori interi mentre le altre possono assumere valori reali.

Quando la funzione $f(x)$ è di tipo lineare, ovvero può essere scritta come

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ed anche i vincoli che definiscono S sono di tipo lineare allora il problema di ottimizzazione viene detto di **programmazione lineare**, dove in questo caso il termine programmazione deve essere inteso come sinonimo di pianificazione. Come visto negli esempi del precedente capitolo la programmazione lineare riguarda la pianificazione di alcune attività al fine di ottenere il risultato migliore, ovvero l'uso ottimale delle risorse disponibili. Dal punto di vista matematico il modello consiste nel determinare il valore assunto dalle variabili decisionali in modo tale che la funzione $f(x)$ sia massima. I vincoli lineari posti sulle variabili decisionali sono detti **vincoli funzionali** (o **strutturali**):

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m, \end{array}$$

con $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. A questi si aggiungono **vincoli di nonnegatività** per le variabili decisionali: $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Il numero di variabili decisionali è indipendente dal numero di vincoli strutturali. Il tipo di problema appena definito viene detto in **forma standard**, e chiaramente è possibile definire problemi che abbiano caratteristiche differenti da quanto visto, per esempio si potrebbe porre il problema di minimizzare la funzione obiettivo, oppure qualche vincolo potrebbe essere in forma di uguaglianza

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

oppure con differente verso nella disuguaglianza

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

oppure potrebbe mancare qualche vincolo di nonnegatività oppure si potrebbe richiedere che una variabile sia intera oppure binaria.

3.2 Il metodo grafico

Quando un problema ha soltanto due variabili decisionali, per esempio x_1 e x_2 , allora è possibile risolverlo per via grafica. Tale tecnica consiste nel tracciare, nel piano (x_1, x_2) (cioè x_1 ascissa e x_2 ordinata), i contorni della regione ammissibile. Si considerano quindi i vincoli uno per uno e si identificano le regioni del piano contenenti i punti che soddisfano tale vincolo e che vengono intersecate con la regione già identificata grazie ai vincoli che sono già stati considerati. I vincoli di nonnegatività $x_1, x_2 \geq 0$ restringono la ricerca della regione di ammissibilità al solo primo quadrante del piano cartesiano.

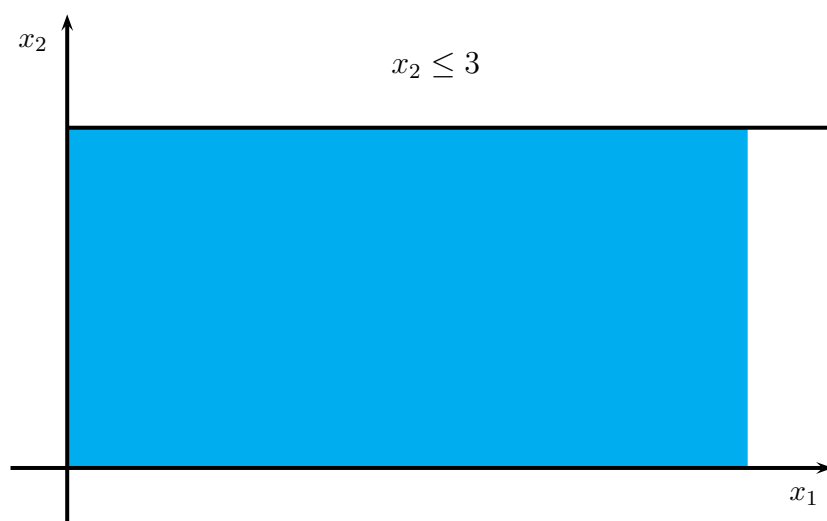
Consideriamo ora il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Rappresentiamo graficamente le regioni del piano (x_1, x_2) che sono identificate dai vincoli del problema. Per identificare la regione del piano cartesiano identificata dal primo vincolo tracciamo il grafico della retta

$$x_2 = 3.$$

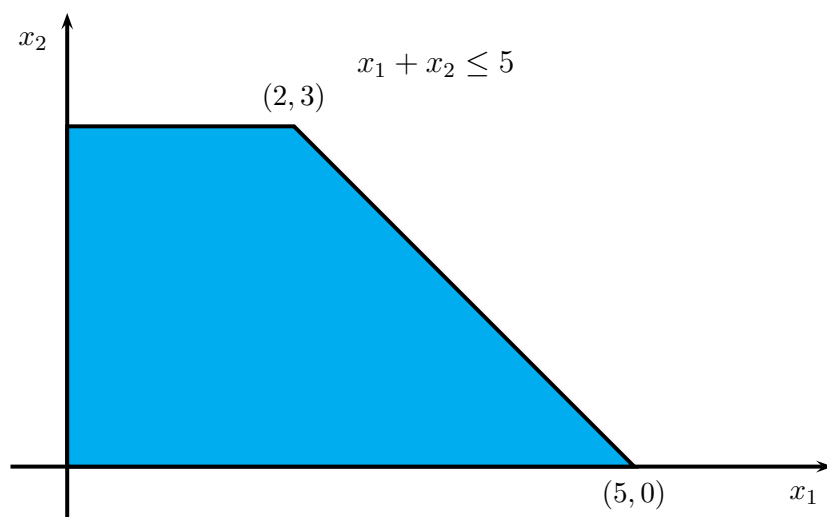
I punti sono quelli che si trovano al di sotto di questa, come evidenziato nella figura.



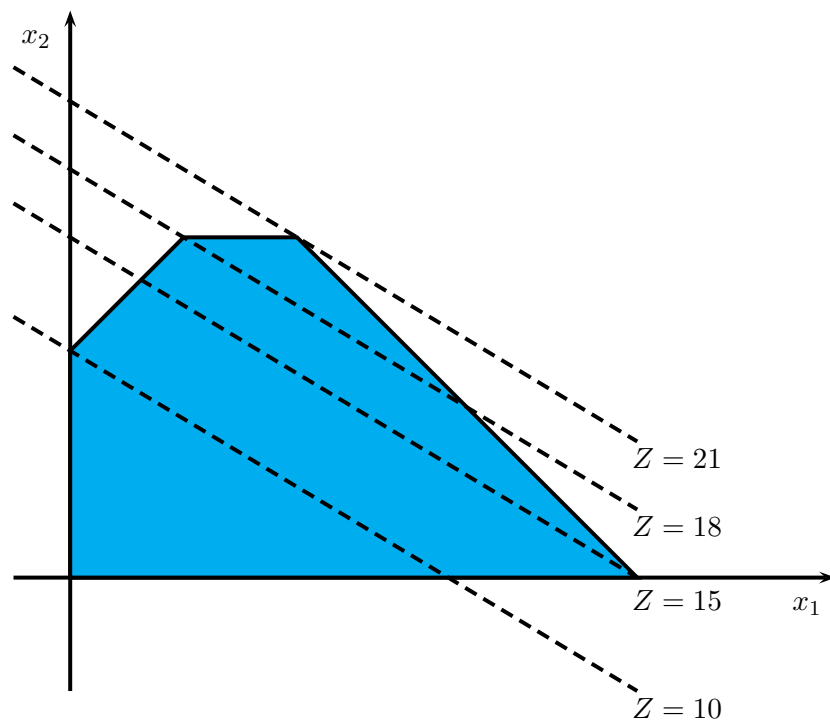
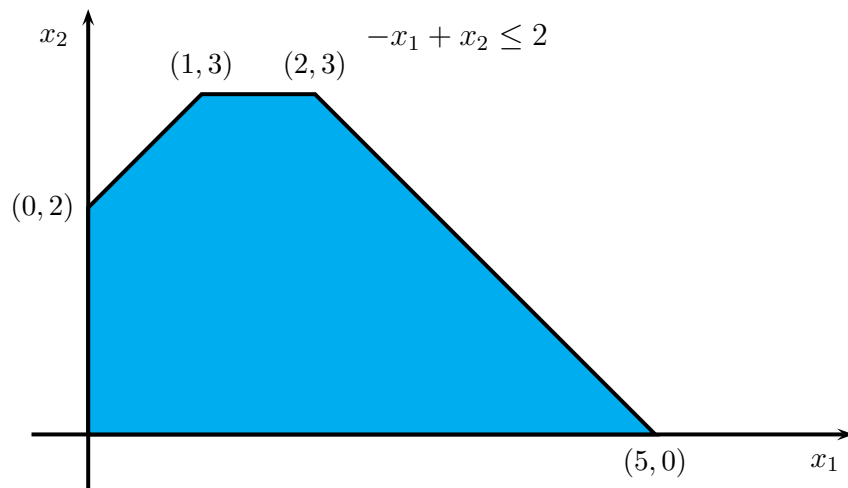
Per il secondo vincolo consideriamo la retta

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Per individuare la regione di interesse osserviamo che l'origine $(0, 0)$ soddisfa la disequazione quindi la porzione del piano di interesse è quella che la contiene. La regione ammissibile si ottiene effettuando l'intersezione tra quella appena determinata e l'insieme identificato dal primo vincolo.



Procediamo in modo analogo anche per il terzo vincolo, ottenendo la seguente regione ammissibile.



Si ricava ora la variabile x_2 dall'espressione della funzione obiettivo

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z.$$

L'equazione della funzione obiettivo in forma esplicita rappresenta un fascio di rette parallele aventi coefficiente angolare $-3/5$ ed ordinata del punto di intersezione con l'asse x_2 pari a $Z/5$. Assegnando qualche valore a Z si può determinare in quale direzione di tale fascio il valore aumenta. In questo modo il valore massimo della funzione obiettivo viene assunto necessariamente nel vertice della regione ammissibile che viene incontrato per ultimo procedendo nella direzione del fascio di rette che aumenta il valore di Z . Ponendo $Z = 0$ la retta del fascio passa per l'origine del riferimento cartesiano mentre la retta passante per il punto $(0, 2)$ ha valore $Z = 10$. I valori di Z crescono (come era prevedibile) in corrispondenza di rette del fascio che si muovono verso la direzione delle ordinate crescenti. Quindi la soluzione ottima coincide con il punto $(2, 3)$ in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 21$.

Volendo verificare che la soluzione ottima è quella trovata si può calcolare il valore di Z anche negli altri vertici:

nel punto $(1, 3)$ si ha $Z = 18$;

nel punto $(5, 0)$ si ha $Z = 15$.

Riassumendo il metodo grafico per risolvere problemi di programmazione lineare in due dimensioni prevede i seguenti passi:

1. Individuare la regione ammissibile calcolando l'intersezione tra tutti gli insiemi cui appartengono i punti che soddisfano ogni singolo vincolo;
2. Individuare la direzione del fascio di rette identificato dalla funzione obiettivo;
3. Individuare la direzione di crescita o decrescita di Z in base al tipo di problema assegnato;
4. Identificare la soluzione ottima come l'ultimo vertice della regione ammissibile intersecata con una retta del fascio che si muove lungo la direzione individuata al passo precedente.

3.2.1 Alcune osservazioni sul metodo grafico

Osservazione 1. Il metodo grafico si può applicare facilmente quando il problema ha due variabili. Se il problema avesse tre variabili decisionali la

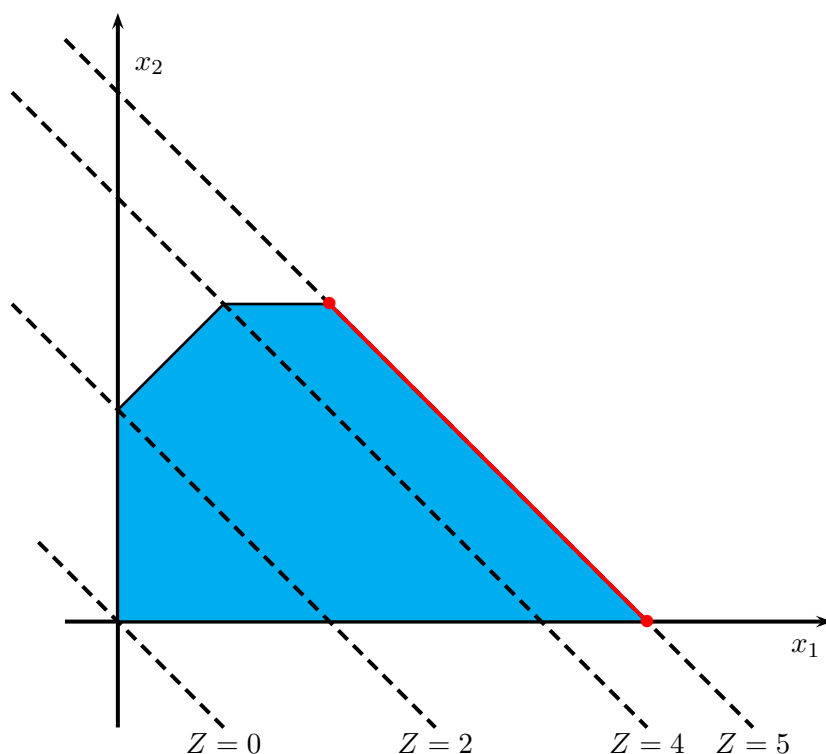
regione ammissibile diventerebbe una figura solida (un poliedro in particolare) mentre la funzione obiettivo sarebbe un fascio di piani paralleli. È chiaro come la rappresentazione grafica di tali enti geometrici diventi molto più complessa, seppur non impossibile da studiare.

Osservazione 2. Il metodo grafico consente alcune osservazioni che sono valide anche nel caso in cui le variabili decisionali siano un numero maggiore. Infatti la soluzione si trova sempre sulla frontiera della regione ammissibile ed è localizzata (quando esiste ed è unica) in un vertice. Sulla questione relativa all'esistenza e all'unicità della soluzione tuttavia ci sono altre osservazioni da fare.

Osservazione 3. Consideriamo la stessa regione ammissibile dell'esempio fatto ma cambiamo la funzione obiettivo:

$$\max Z = x_1 + x_2$$

allora cambia la soluzione.

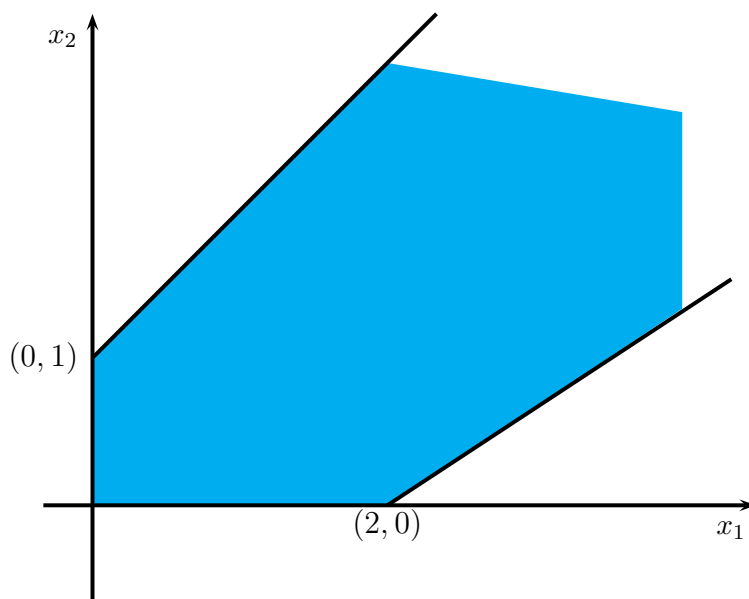


Infatti osserviamo che le soluzioni sarebbero state tutti i punti appartenenti al segmento congiungente $(5, 0)$ e $(2, 3)$, cioè sarebbero state infinite.

Osservazione 4. Se i vincoli fossero stati i seguenti:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

allora la regione ammissibile sarebbe stata la seguente

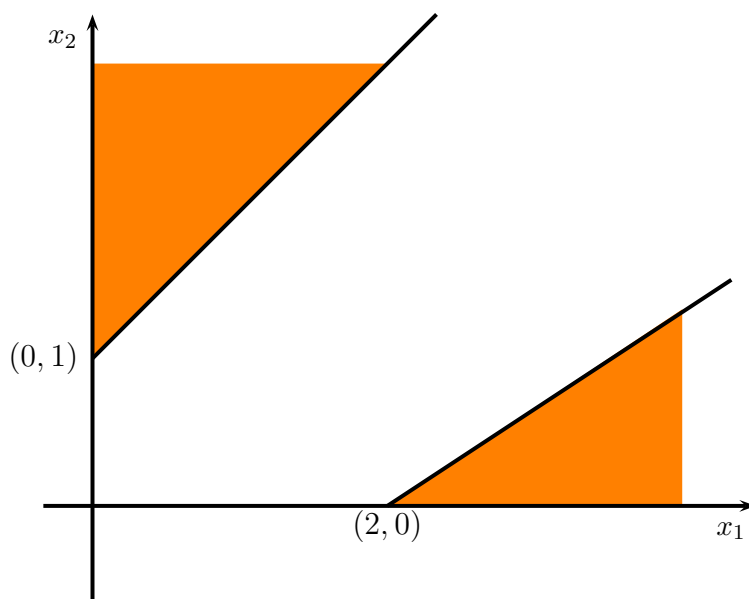


cioè una regione illimitata superiormente allora anche la funzione obiettivo sarebbe stata illimitata e quindi la soluzione sarebbe stata $Z = +\infty$, quindi il problema di massimo non avrebbe ammesso soluzione.

Osservazione 5. Se invece si fossero considerati i vincoli opposti, cioè

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

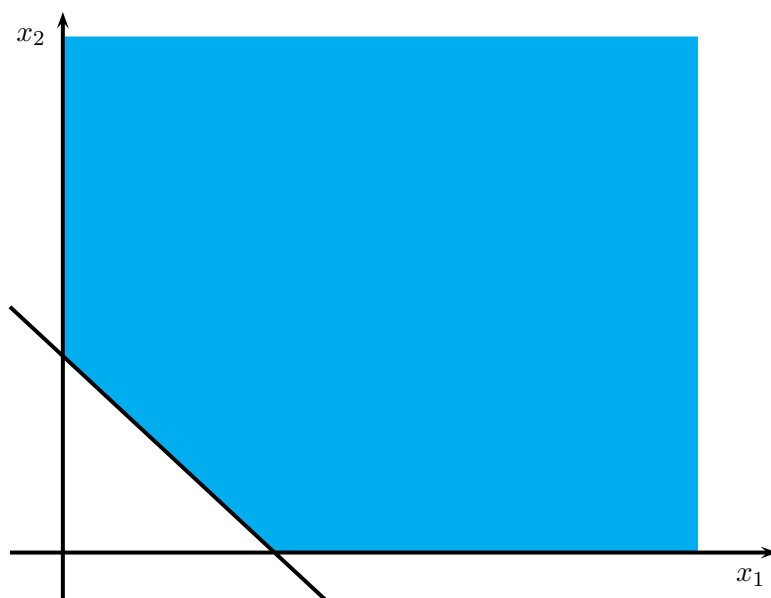
allora la regione ammissibile sarebbe stata l'intersezione tra gli insiemi evidenziati nel seguente grafico, ovvero sarebbe stata vuota ed il problema non avrebbe ammesso soluzione.



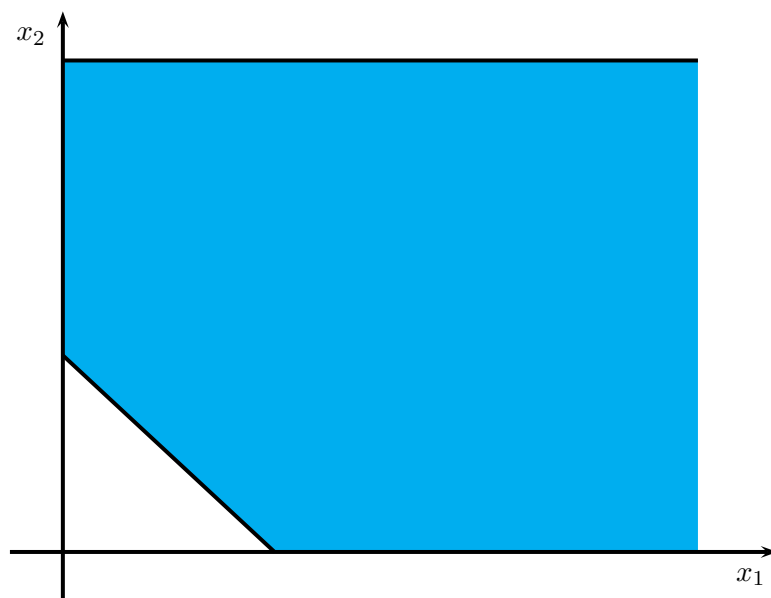
Esempio 3.2.1 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

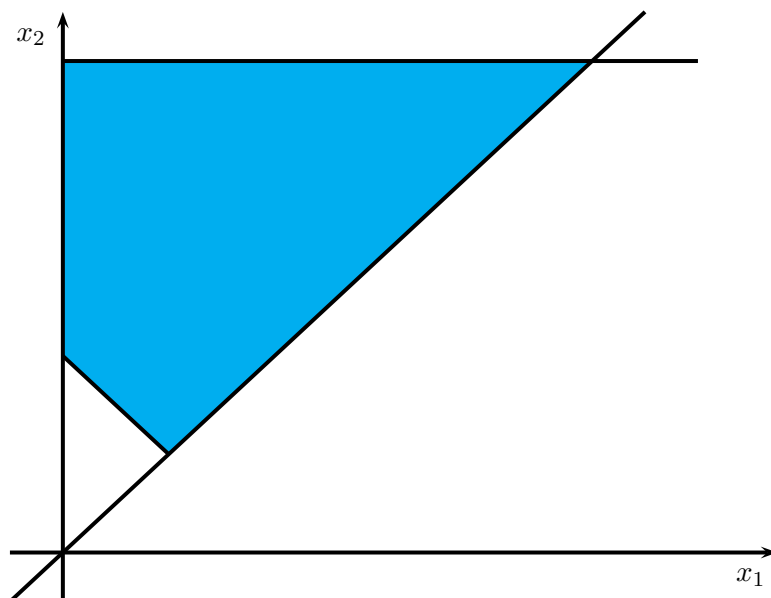
Rappresentiamo graficamente le regioni del piano (x_1, x_2) che sono identificate dai vincoli del problema, iniziando dalla retta $x_1 + x_2 = 4$



L'insieme dei punti che soddisfa il primo vincolo è quello che non contiene l'origine pertanto coincide con quello evidenziato in ciano. La retta $x_2 = 10$ è parallela all'asse x_1 cosicchè il secondo vincolo identifica i punti che appartengono alla striscia delimitata dalle due rette e, intersecandola con l'insieme già ottenuto si ottiene il seguente



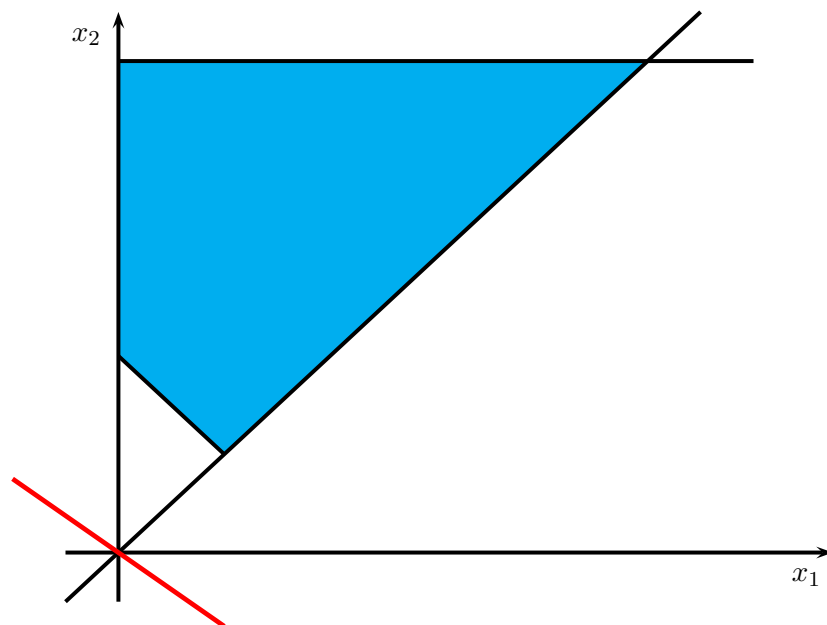
Il terzo vincolo è delimitato dalla retta $x_1 = x_2$ (ovvero la bisettrice del primo e terzo quadrante), e, poichè è soddisfatto dal punto di coordinate $(0, 1)$ allora la regione ammissibile è la seguente



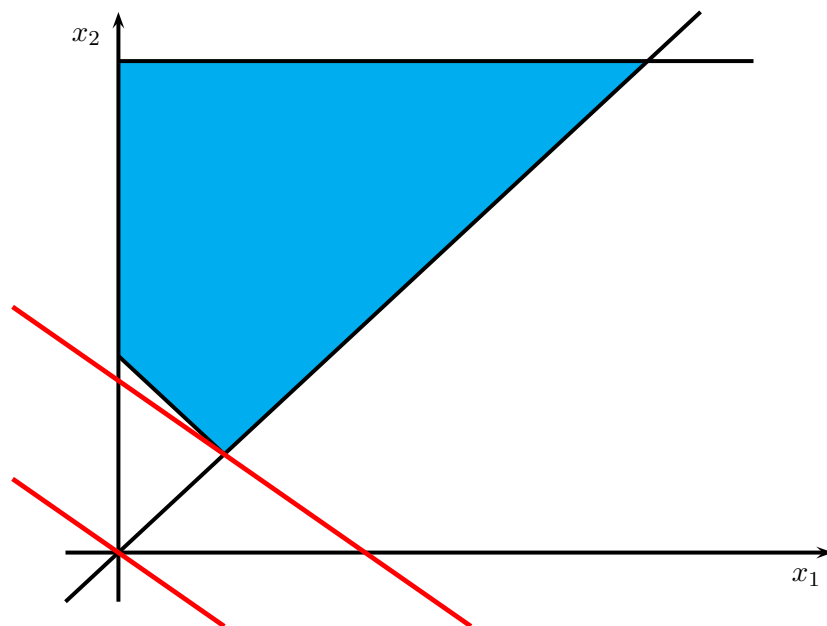
Consideriamo ora la funzione obiettivo e ricaviamo la variabile x_2

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}Z$$

che rappresenta l'equazione del fascio di rette parallele di coefficiente angolare $-3/4$. Poichè la funzione obiettivo deve essere minimizzata la soluzione coincide con il punto della regione ammissibile che appartiene al fascio e avente il minimo valore di Z . Tracciando la retta del fascio passante per l'origine (con $Z = 0$ quindi)



si vede graficamente che la soluzione è il punto $(2, 2)$ per cui $Z = 14$.



3.3 La geometria dei problemi di programmazione lineare

Nei paragrafi seguenti l'attenzione sarà rivolta allo studio delle proprietà geometriche e alla risoluzione dei **problemi di programmazione lineare in forma standard**, cioè tali che

1. Funzione obiettivo da massimizzare;
2. Vincoli funzionali (o strutturali) nella forma $\leq$ e termine noto $b_i \geq 0$ per ogni i ;
3. Vincoli di nonnegatività per le variabili decisionali.

Osserviamo che il vincolo di nonnegatività del termine noto serve a discriminare effettivamente tra le diverse tipologie di disuguaglianza. Infatti considerando il vincolo

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 2$$

moltiplicandolo per -1 diventerebbe

$$-3x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -2$$

e quindi apparentemente potrebbe essere trattato come un vincolo di tipo $\leq$. In realtà le cose sono piuttosto differenti e vedremo in seguito che esistono meccanismi sostanzialmente molto diversi per risolvere problemi con differenti tipi di disuguaglianza.

In termini matematici il problema in forma standard è il seguente

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \dots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ed inoltre $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Le variabili x_i che definiscono le incognite del problema sono dette, come abbiamo visto, **variabili decisionali**. Talvolta questi problemi possono essere

rappresentati in forma compatta ponendo

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

con $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la funzione obiettivo risulta essere pertanto pari al prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$, e, per quello che riguarda i vincoli, posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

costituiscono un sistema di disequazioni

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}.$$

La **forma matriciale** di un problema di programmazione lineare in forma standard risulta essere la seguente

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Si definisce **frontiera del vincolo** l'iperpiano in $\mathbb{R}^n$ di equazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

L'insieme dei punti che soddisfa la disequazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

rappresenta un **semispazio** in $\mathbb{R}^n$. La regione ammissibile è l'intersezione di tutti i semispazi e gli iperpiani definiti dai vincoli. Una proprietà importante di cui gode sempre la regione ammissibile è che si tratta di un insieme convesso. La relazione

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$$

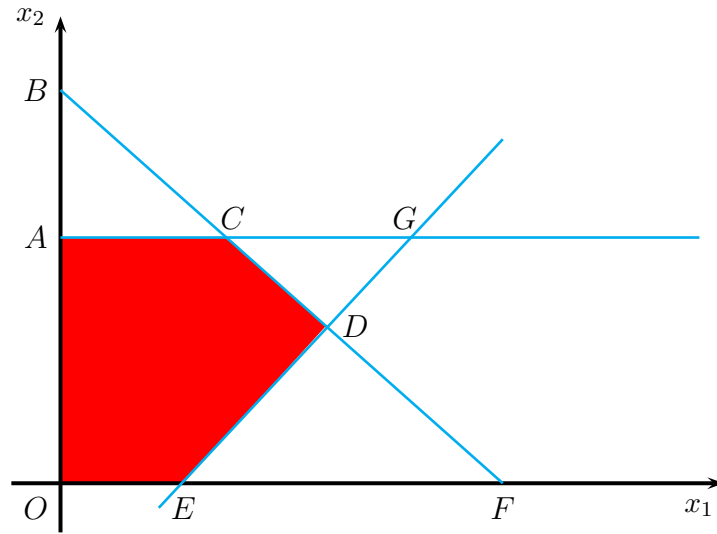


Figura 3.1:

prende il nome di **combinazione lineare convessa**. Tale concetto può essere generalizzato considerando k elementi $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k \in P$ e definendo una loro combinazione lineare convessa nel seguente modo

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{t}_i, \quad \text{purchè} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

I punti di intersezione tra n iperpiani sono detti **vertici**. I **vertici ammissibili** sono quelli che appartengono alla **regione ammissibile** mentre i **vertici non ammissibili** sono quelli che non appartengono alla regione ammissibile. Se consideriamo la Figura 3.1 allora i punti O, A, C, D ed E sono vertici ammissibili, mentre i punti B, F e G sono vertici non ammissibili.

Osservazione. È chiaro che anche gli iperpiani di equazione

$$x_i = 0$$

che corrispondono ai vincoli di nonnegatività delimitano la regione ammissibile. Per i problemi di programmazione lineare in forma standard accade che proprio per questo l'origine è sempre un vertice ammissibile (soddisfa sicuramente i vincoli funzionali che hanno termine noto nonnegativo ed appartiene, per ogni i all'iperpiano di equazione $x_i = 0$).

Teorema 3.3.1 (di Weyl-Minkowski. Enunciato) *Ogni punto interno al politopo $P \subset \mathbb{R}^n$ può essere espresso come combinazione lineare convessa di un insieme di vertici di P .*

Fondamentale nella teoria dei problemi di programmazione lineare è il seguente teorema del quale viene fornita una dimostrazione, seppur non molto rigorosa.

Teorema 3.3.2 *Se la regione ammissibile è un politopo allora il massimo della funzione obiettivo non può essere un punto interno.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w}$ un punto interno al politopo e supponiamo che, applicando il Teorema 3.3.1, esistono due vertici $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tali che

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Calcoliamo la funzione obiettivo nei due vertici e poniamo

$$Z_1 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad Z_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{y},$$

e supponiamo che sia $Z_1 < Z_2$. Calcoliamo la funzione obiettivo in $\mathbf{w}$:

$$Z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{w} = \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{c}^T \mathbf{y} = \lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2.$$

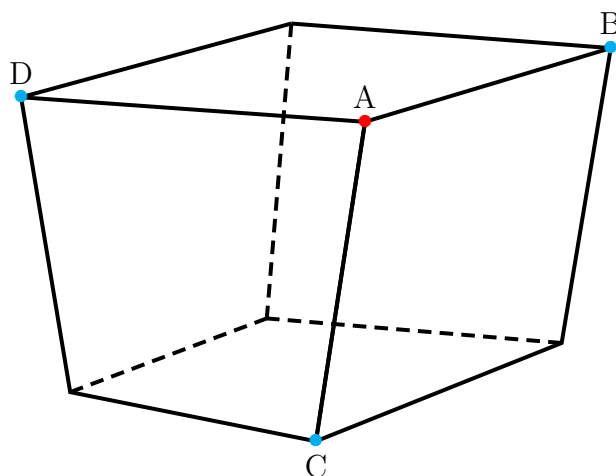
Ovviamente risulta

$$Z^* = \lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2 < \lambda Z_2 + (1 - \lambda) Z_2 = \lambda Z_2 + Z_2 - \lambda Z_2 = Z_2.$$

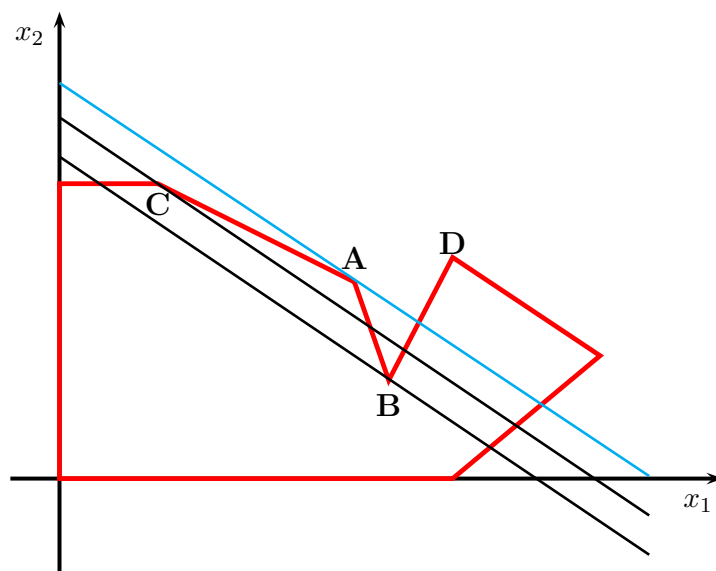
Quindi appare chiaro come il valore della funzione obiettivo in un qualunque punto interno sia sempre inferiore rispetto al valore assunto in un vertice. La dimostrazione può essere generalizzata supponendo che $\mathbf{w}$ sia una combinazione convessa di un insieme di vertici. $\square$

In un problema di programmazione lineare con n variabili decisionali, due vertici si dicono **adiacenti** se condividono le frontiere di $n - 1$ vincoli. Facendo riferimento alla Figura 3.1 sono vertici adiacenti, per esempio, A e C , ma anche C e D , mentre non sono vertici adiacenti O e C .

Invece nella seguente figura in $\mathbb{R}^3$ il vertice A ha come vertici adiacenti (esattamente tre) i punti B , C e D . Con ciascuno di questi condivide l'appartenenza a due piani che delimitano la regione ammissibile.



Due vertici adiacenti sono collegati attraverso un segmento che giace sulla frontiera comune e che viene detto **spigolo** della regione ammissibile. Una delle idee alla base del metodo del simplesso è la proprietà che la soluzione ottima è sempre uno dei vertici della regione ammissibile, e inoltre se si considera un qualsiasi problema di programmazione lineare che possiede almeno una soluzione ottima allora se un vertice non ha vertici adiacenti migliori (valutati attraverso la funzione obiettivo), allora deve essere necessariamente **la soluzione ottima**. Consideriamo infatti la seguente figura in $\mathbb{R}^2$.



Il valore della funzione obiettivo nel vertice **A** è sicuramente maggiore di quello dei due vertici adiacenti **B** e **C**. Se esistesse un vertice **D** non adiacente ad **A** migliore di quest'ultimo allora la regione ammissibile non potrebbe essere un insieme convesso. Questa proprietà è fondamentale per l'applicazione del metodo descritto nei seguenti paragrafi per risolvere problemi di programmazione lineare in forma standard, ovvero il **metodo del simplesso**.

3.4 Il Metodo del Simpleso

Il metodo del simplesso è una procedura iterativa di tipo algebrico che si applica a problemi di programmazione lineare in forma standard. Il metodo del simplesso si basa sulle seguenti idee chiave:

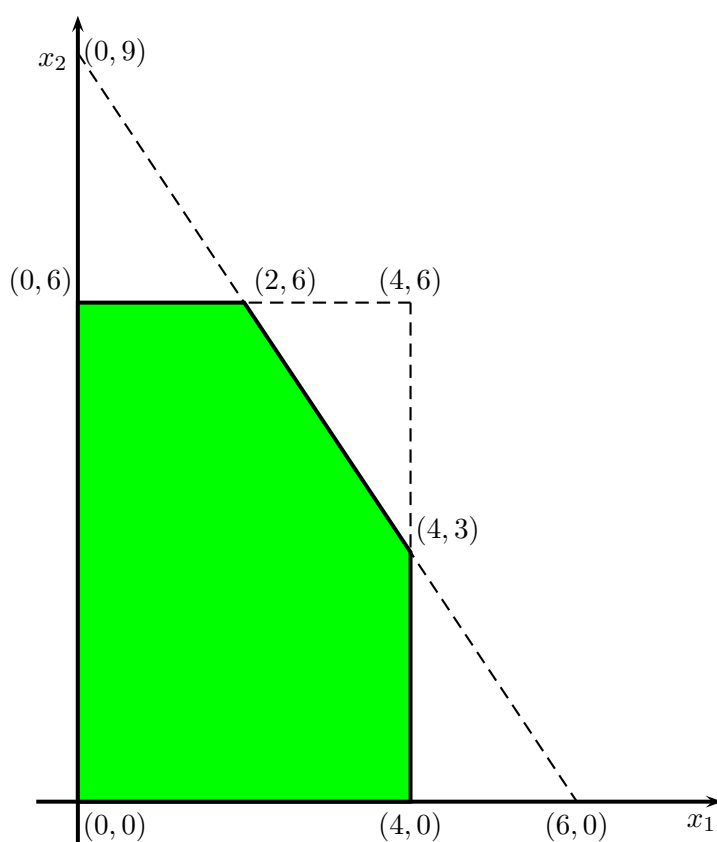
1. Il metodo del simplesso è un algoritmo di tipo iterativo che concentra l'attenzione esclusivamente sui vertici della regione ammissibile, passando, ad ogni iterazione, da un vertice ad un altro, finchè non trova la soluzione ottima oppure conclude che la funzione obiettivo è illimitata (ovvero $Z = +\infty$), identificando anche il caso in cui la soluzione ottima non è unica.
2. Il metodo sceglie come vertice iniziale l'origine (tutte le variabili decisionali sono poste uguali a zero).
3. Considerato un determinato vertice risulta più conveniente, da un punto di vista computazionale, ottenere informazioni sui vertici adiacenti. Passando da un vertice all'altro la procedura per trovare la soluzione ottima si snoda attraverso gli spigoli della regione ammissibile.
4. Dopo aver identificato il vertice ammissibile la procedura si muove lungo lo spigolo dove il tasso di incremento di Z è maggiore.
5. Un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo implica che il vertice adiacente è migliore di quello attuale, un tasso negativo indica invece che è peggiore. Se nessuno dei vertici adiacenti produce un tasso positivo significa che è stata raggiunta la soluzione ottima.

3.4.1 Forma algebrica del metodo del simplesso

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tracciamo la regione ammissibile ed identifichiamo i suoi vertici.



Si verifica agevolmente che il vertice $(2,6)$ è soluzione ottima in cui il valore della funzione obiettivo è $Z = 36$.

La procedura algebrica del metodo del simplesso si basa sulla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Il primo passo di inizializzazione del metodo

consiste nel convertire i **vincoli funzionali di disuguaglianza** in equivalenti **vincoli di uguaglianza**. Questa trasformazione avviene introducendo le cosiddette variabili **slack** (**scarto**). Considerando il primo vincolo

$$x_1 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 4 - x_1 \geq 0$$

e ponendo

$$x_3 = 4 - x_1$$

risulta

$$x_3 \geq 0$$

cosicchè le variabili x_1 e x_3 soddisfano l'equazione

$$x_1 + x_3 = 4.$$

Procedendo in modo analogo per gli altri vincoli funzionali, il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

diventa il seguente

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + x_4 = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \tag{3.2}$$

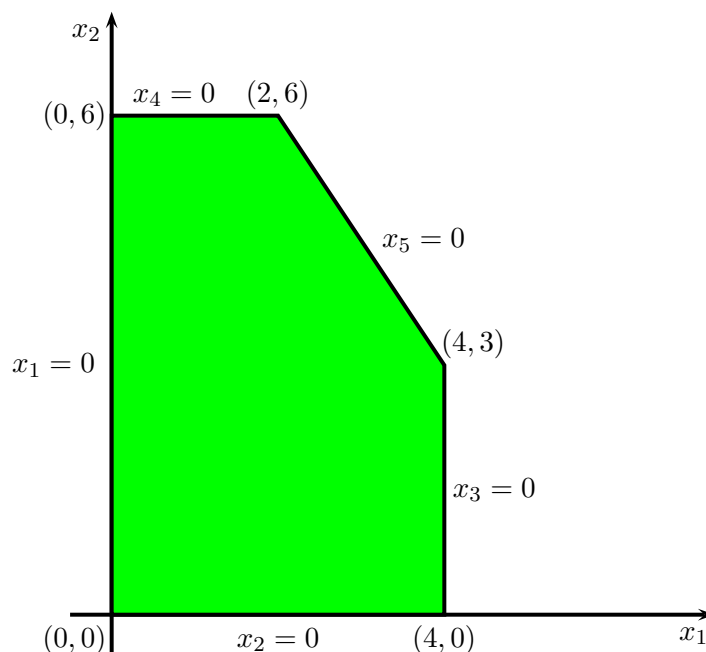
che viene detto **problema in forma aumentata**. Le variabili slack introdotte sono appunto x_3, x_4 e x_5 .

Si definisce **soluzione aumentata** quella soluzione per cui alle variabili decisionali sono state aggiunte le variabili slack.

Si definisce **soluzione di base** (**basica**) un vertice cui sono stati aggiunti i valori delle variabili slack.

Si definisce **soluzione basica ammissibile** (in breve BFS=Basic Feasible Solution) un vertice ammissibile cui sono state aggiunte le variabili slack.

Se una variabile slack è uguale a zero, allora la soluzione corrente appartiene alla frontiera del vincolo funzionale, mentre se il valore della variabile slack è positivo allora la soluzione corrente si trova all'interno della regione ammissibile rispetto a tale vincolo. In realtà si può osservare che se una soluzione ha una variabile (sia decisionale che slack) uguale a zero questo vuol dire che appartiene ad uno degli spigoli che delimitano la regione ammissibile:



Il numero di BFS è finito e possiamo elencarle tutte:

$$\begin{aligned} & (0, 0, 4, 12, 18) \\ & (0, 6, 4, 0, 6) \\ & (2, 6, 2, 0, 0) \\ & (4, 3, 0, 6, 0) \\ & (4, 0, 0, 12, 6), \end{aligned}$$

i valori delle variabili sono desunte dalle equazioni dei vincoli scritte in forma aumentata (3.2). Per esempio posto $x_1 = x_2 = 0$, dall'equazione del primo vincolo si deduce $x_3 = 4$, dal secondo $x_4 = 12$ e dal terzo $x_5 = 18$. Ancora, posto $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ sempre dall'equazione del primo vincolo si ricava $x_3 = 4$, $x_4 = 0$ perchè appartiene al segmento in cui x_4 è nulla, mentre x_5 si

ricava dall'equazione del terzo vincolo

$$x_5 = 18 - 2x_2 = 6.$$

Per le altre BFS si procede in modo analogo.

In base alle osservazioni fatte risulta ovvio che ogni BFS ha almeno due variabili uguali a zero. Il motivo di questa proprietà sta nel fatto che, nella forma aumentata, si deve risolvere un sistema di 3 equazioni lineari in 5 incognite. Il sistema presenta, quindi, 2 gradi di libertà, cioè a due variabili possono essere assegnati valori arbitrari, per esempio zero.

Le due variabili poste uguali a zero sono dette **variabili non di base** (o non in base) mentre le altre tre variabili sono dette **variabili di base**. Il numero di variabili di base è uguale al numero di vincoli funzionali, mentre il numero di variabili non di base è la differenza tra il numero complessivo di variabili ed il numero di vincoli. Se le variabili di base soddisfano i vincoli di nonnegatività allora la soluzione è una BFS.

Due BFS **adiacenti** condividono tutte le variabili non di base tranne una, quindi per passare da una BFS ad una adiacente è necessario che una variabile non di base lo diventi e viceversa.

Per esempio se consideriamo la BFS $(0, 0, 4, 12, 18)$ allora $(0, 6, 4, 0, 6)$ è adiacente ad essa in quanto x_1 risulta non essere in base in entrambe, mentre la BFS $(2, 6, 2, 0, 0)$ non lo è in quanto non hanno in comune alcuna variabile non in base.

Cerchiamo ora di descrivere matematicamente i passi delle singole iterazioni previste dal metodo del simplesso. Il primo passo è quello di riscrivere le equazioni del modello, scrivendo anche la funzione obiettivo come se fosse un'ulteriore equazione:

$$\begin{array}{rcllcl} (0) & Z - & 3x_1 - & 5x_2 & & = & 0 \\ (1) & & x_1 & & +x_3 & = & 4 \\ (2) & & & 2x_2 & & +x_4 & = & 12 \\ (3) & & 3x_1 + & 2x_2 & & +x_5 & = & 18. \end{array}$$

Si parte da una soluzione base e si usa l'equazione (0) per calcolare il valore della funzione obiettivo. Anche Z viene considerata come variabile sempre in base.

Scegliere l'origine come vertice ammissibile significa porre $x_1 = x_2 = 0$ cioè si considera come soluzione basica ammissibile $(0, 0, 4, 12, 18)$. Appare chiaro che inizialmente le variabili in base sono le variabili slack, i cui valori vengono

calcolati sfruttando le equazioni (1), (2) e (3), in particolare

$$x_3 = 4, \quad x_4 = 12, \quad x_5 = 18,$$

mentre la funzione obiettivo calcolata vale 0.

Il problema, scritto attraverso le equazioni (0)-(3), ha le seguenti proprietà:

1) Nella funzione obiettivo sono presenti solo variabili non in base (ad eccezione di Z);

2) Ogni variabile in base è presente solo in un'equazione con coefficiente uguale a 1.

Un problema scritto in tale forma viene detto **in forma canonica**.

Il vantaggio offerto dalla prima proprietà è che, essendo nullo il valore di tutte le variabili presenti nella funzione obiettivo, il valore assunto da questa nella BFS corrente coincide con il termine noto della funzione stessa.

La seconda proprietà consente di ottenere immediatamente il valore della variabile in base presente nell'equazione che è uguale al termine noto (poichè tutte le altre variabili presenti nell'equazione hanno valore zero).

In un problema in forma canonica è possibile associare ad ogni equazione una (ed una sola) variabile di base:

$$\begin{array}{llllll} (0) & Z - & 3x_1 - & 5x_2 & & = 0 & \text{Variabile di base } Z \\ (1) & & x_1 & & +x_3 & = 4 & \text{Variabile di base } x_3 \\ (2) & & & 2x_2 & +x_4 & = 12 & \text{Variabile di base } x_4 \\ (3) & & 3x_1 + & 2x_2 & & +x_5 = 18 & \text{Variabile di base } x_5. \end{array}$$

Trasformare, ad ogni passo, il problema in forma canonica consente, una volta determinata la nuova BFS, di aggiornare il valore delle variabili in base e della funzione obiettivo.

Poichè le variabili slack non compaiono nell'espressione di Z , i coefficienti delle variabili non di base x_1, x_2 indicano il tasso di incremento della funzione obiettivo prodotto da un eventuale aumento del valore di tali variabili. Poichè i tassi di miglioramento, cioè i coefficienti di x_1 e x_2 , sono positivi si può concludere che $(0, 0, 4, 12, 18)$ non è soluzione ottima.

Passo 1 della singola iterazione: Stabilire la direzione dello spostamento.

Incrementare il valore di una variabile non di base rispetto al valore zero corrente (pur adattando i valori in modo tale da soddisfare i vincoli) corrisponde a muoversi lungo uno spigolo che inizia dal vertice ammissibile. La

scelta della variabile non di base viene fatta osservando l'espressione della funzione obiettivo:

$$Z = 3x_1 + 5x_2.$$

Aumentare x_1 significa che il tasso di miglioramento della funzione obiettivo è 3, mentre per x_2 è 5. Appare chiaro che conviene scegliere x_2 come variabile entrante in base.

Passo 2 della singola iterazione: Criterio di arresto.

Bisogna determinare il valore da assegnare alla variabile entrante senza che la nuova soluzione basica esca dalla regione di ammissibilità. Il valore della variabile non di base x_1 resta zero.

$$\begin{array}{llllll} (1) & x_1 & +x_3 & = & 4 & x_3 = 4 \\ (2) & & 2x_2 & +x_4 & = & 12 & x_4 = 12 - 2x_2 \\ (3) & 3x_1 & +2x_2 & & +x_5 & = & 18 & x_5 = 18 - 2x_2. \end{array}$$

La nonnegatività delle variabili impone dei vincoli sulle relazioni appena scritte:

$$x_3 = 4 \geq 0 \quad \text{Nessun limite su } x_2$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 12/2 = 6$$

$$x_5 = 18 - 2x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 18/2 = 9.$$

Quindi il valore di x_2 può essere incrementato fino a 6, valore che rende la variabile attualmente in base $x_4 = 0$. Oltre tale valore x_4 assume valore negativo violando l'ammissibilità della soluzione. Questi calcoli costituiscono quello che è noto come **test del minimo rapporto**. Obiettivo di tale test è determinare quale variabile di base assume per prima il valore zero all'aumentare del valore della variabile entrante. Si possono escludere da tale test tutte quelle variabili associate ad equazioni in cui il coefficiente della variabile entrante è zero oppure negativo. Quindi per ogni equazione in cui il coefficiente della variabile entrante è strettamente positivo, il test calcola il rapporto tra il termine noto ed il coefficiente della variabile entrante. La variabile di base nell'equazione con il minimo rapporto è quella che raggiunge per prima il valore 0 e quindi rappresenta, di fatto, la variabile uscente dalla base. Nell'esempio fatto entra x_2 ed esce x_4 .

Passo 3 della singola iterazione: Ottenere la nuova BFS.

La situazione determinata dal passo 2 del metodo del simpleso è schematizzata nella seguente tabella:

	BFS iniziale	Nuova BFS
Variabili di base	$x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$	$x_2 = 6, x_3 = ?, x_5 = ?$
Variabili non di base	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_1 = 0, x_4 = 0$

Il sistema

$$\begin{array}{rclclcl}
 (0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & = 0 \\
 (1) & & x_1 & & +x_3 & = 4 \\
 (2) & & & 2x_2 & +x_4 & = 12 \\
 (3) & & 3x_1 & +2x_2 & & +x_5 = 18
 \end{array}$$

deve essere scritto ora in forma canonica, cioè ogni variabile in base deve comparire solo in un'equazione e con coefficiente uguale a 1 e nell'equazione (0) i coefficienti delle variabili in base devono essere uguali a zero. La trasformazione può avvenire effettuando delle opportune combinazioni lineari tra le equazioni del problema attraverso il cosiddetto metodo di Gauss-Jordan. Innanzitutto dividiamo l'equazione (2) per 2 ottenendo la nuova seconda equazione:

$$(2') \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6.$$

Per eliminare il coefficiente di x_2 dall'equazione (3) sommiamo all'equazione (3) l'equazione (2') moltiplicata per -2:

$$\begin{array}{rclclcl}
 (3) & 3x_1 & +2x_2 & & +x_5 & = 18 & + \\
 -2 \times (2') & & -2x_2 & & -x_4 & = -12 & \\
 \hline
 (3') & 3x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = 6.
 \end{array}$$

L'equazione (1) resta invariata perchè il coefficiente di x_2 è già uguale a zero. Ora dobbiamo eliminare il coefficiente della variabile entrante in base dall'equazione (0), sommando all'equazione (0) l'equazione (2') moltiplicata per 5 :

$$\begin{array}{rclclcl}
 (0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & = 0 & + \\
 5 \times (2') & & & 5x_2 & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 & \\
 \hline
 (0') & Z & -3x_1 & & +\frac{5}{2}x_4 & = 30.
 \end{array}$$

Il sistema è diventato quindi

$$(0) \quad Z - 3x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 30 \quad \text{Variabile di base } Z$$

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4 \quad \text{Variabile di base } x_3$$

$$(2) \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6 \quad \text{Variabile di base } x_2$$

$$(3) \quad 3x_1 - x_4 + x_5 = 6 \quad \text{Variabile di base } x_5.$$

Dalle equazioni (1) e (2) rispettivamente si ricava che $x_5 = 6$ e $x_3 = 4$. Quindi la nuova BFS è $(0, 6, 4, 0, 6)$. Si osservi che ogni variabile di base appare in una sola equazione con coefficiente 1.

Test di ottimalità:

Effettuando il test di ottimalità sulla nuova funzione obiettivo

$$Z = 3x_1 - \frac{5}{2}x_4 + 30$$

si deduce che è necessaria una seconda iterazione poichè il coefficiente di x_1 è positivo, infatti la variabile entrante deve essere proprio x_1 . Per calcolare la variabile uscente dobbiamo effettuare il test del minimo rapporto tra le equazioni (1), (2) e (3).

$$(1) \quad x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 4$$

$$(2) \quad x_2 = 6 \geq 0 \quad \text{Nessun limite su } x_2$$

$$(3) \quad x_5 = 6 - 3x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 6/3 = 2.$$

Da tale test risulta che la variabile uscente è x_5 .

	BFS precedente	Nuova BFS
Variabili di base	$x_2 = 6, x_3 = 4, x_5 = 6$	$x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = ?$
Variabili non di base	$x_1 = 0, x_4 = 0$	$x_4 = 0, x_5 = 0$

Il sistema

$$\begin{array}{rclcl}
 (0) & Z & -3x_1 & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \\
 (1) & & x_1 & +x_3 & = 4 \\
 (2) & & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
 (3) & & 3x_1 & -x_4 +x_5 & = 6
 \end{array}$$

deve essere trasformato in modo tale che i coefficienti della colonna relativa alla variabile entrante x_1 siano uguali a quelli della colonna relativa alla variabile uscente x_5 , quindi bisogna rendere 1 il coefficiente di x_1 nell'equazione (3) ed eliminare quelli di x_1 dalle equazioni (0) e (1). L'equazione (3) viene divisa per 3 diventando:

$$(3) \quad x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 2.$$

Il sistema è diventato

$$\begin{array}{rclcl}
 (0) & Z & -3x_1 & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 \\
 (1) & & x_1 & +x_3 & = 4 \\
 (2) & & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
 (3) & & x_1 & -\frac{1}{3}x_4 +\frac{1}{3}x_5 & = 2.
 \end{array}$$

Sommiamo all'equazione (3) la (1) moltiplicata per -1 :

$$\begin{array}{rclcl}
 (1) & x_1 & +x_3 & & = 4 + \\
 -1 \times (3) & x_1 & & \frac{1}{3}x_4 -\frac{1}{3}x_5 & = -2 \\
 \hline
 (1') & & x_3 & +\frac{1}{3}x_4 -\frac{1}{3}x_5 & = 2
 \end{array}$$

e sommiamo all'equazione (0) la (3) moltiplicata per 3:

$$\begin{array}{rclcl}
 (0) & Z & -3x_1 & +\frac{5}{2}x_4 & = 30 & + \\
 3 \times (3) & & 3x_1 & -x_4 & +x_5 & = 6 \\
 \hline
 (0') & Z & & +\frac{3}{2}x_4 & +x_5 & = 36.
 \end{array}$$

Il sistema è diventato

$$\begin{array}{llll}
 (0) & Z & +\frac{3}{2}x_4 & +x_5 = 36 \quad \text{Variabile di base } Z \\
 (1) & & x_3 +\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_5 = 2 \quad \text{Variabile di base } x_3 \\
 (2) & & x_2 & +\frac{1}{2}x_4 = 6 \quad \text{Variabile di base } x_2 \\
 (3) & & x_1 & -\frac{1}{3}x_4 +\frac{1}{3}x_5 = 2 \quad \text{Variabile di base } x_1.
 \end{array}$$

Dalla (1) segue che $x_3 = 2$ quindi la nuova BFS è $(2, 6, 2, 0, 0)$ da cui si ottiene il valore della funzione obiettivo $Z = 36$ che è ottimo perchè tutti i coefficienti dell'equazione (0)

$$Z = -\frac{3}{2}x_4 - x_5 + 36$$

sono negativi quindi non è possibile trovare nessuna direzione di ulteriore crescita.

Esercizio 3.4.1 *Calcolare le coordinate in forma aumentata di tutti i vertici ammissibili della regione delimitata dai seguenti vincoli:*

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & \leq & 3 \\
 x_1 & +x_2 & \leq 6 \\
 -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\
 x_1, x_2 & \geq & 0.
 \end{array}$$

3.4.2 Forma tabellare del metodo del simplesso

La forma tabellare del metodo del simplesso consente di organizzare i dati del problema in modo sintetico e di avere in forma compatta tutte le informazioni che consentono di effettuare le iterazioni previste dal metodo. Nella tabella, detta anche **tableau**, compaiono, riga per riga, i coefficienti di tutte le equazioni del problema, compresa l'equazione (0) (che sarebbe la funzione obiettivo). In ogni colonna sono riportati tutti i coefficienti relativi ad una stessa variabile ed i termini noti b_i . Nella prima colonna è specificata la variabile in base presente nell'equazione riportata nella riga, ovviamente per l'equazione (0) si suppone che la variabile in base sia Z . Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Introduciamo le variabili slack x_4 e x_5 , cosicchè, in forma aumentata, il sistema algebrico diventa:

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ (1) \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ (2) \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 15, \end{aligned}$$

con vincolo di nonnegatività su tutte le variabili. Il tableau iniziale del metodo del simplesso è il seguente

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	6
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	15

Identifichiamo in x_2 la variabile entrante in base, in quanto il coefficiente negativo dell'equazione (0) più grande in modulo è proprio quello di x_2 . Evidenziamo la colonna relativa alla variabile entrante in base, che viene detta **colonna pivot**:

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	6
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	15

A questo punto applichiamo il criterio del minimo rapporto per decidere quale variabile deve uscire dalla base attraverso i seguenti passi:

1. si individuano nella colonna pivot tutti i coefficienti strettamente positivi;
2. si divide il termine noto per tale coefficiente;
3. si identifica il più piccolo tra tali rapporti;
4. la variabile di base corrispondente a tale riga (detta **riga pivot**) è quella uscente.

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	$6 \rightarrow 6/1 = 6$
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	$15 \rightarrow 15/3 = 5$

Il criterio del minimo rapporto stabilisce che dalla base deve uscire la variabile x_5 . Evidenziamo tutti i coefficienti dell'equazione relativa alla riga di x_5 :

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-1	0	0	0
x_4	(1)	0	1	1	3	1	0	6
x_5	(2)	0	2	3	1	0	1	15

La variabile entrante x_2 prende il posto, nella prima colonna, della variabile uscente x_5 .

Ora la colonna relativa alla variabile entrante in base deve essere resa uguale a quella della variabile uscente. Per rendere unitario l'elemento pivot (cioè 3) dobbiamo dividere l'equazione (2) proprio per questo numero ottenendo i nuovi coefficienti che andranno inseriti nel nuovo tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
(2)	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Nelle operazioni sul tableau non vengono considerati i coefficienti della colonna relativa a Z perchè rimangono inalterati in tutte le iterazioni.

Adesso si devono azzerare, con opportune combinazioni lineari tra le equazioni, i coefficienti di x_2 nelle equazioni (0) e (1).

Per quello che riguarda il coefficiente 1 nell'equazione (1) si può sottrarre da questa l'equazione (2) che adesso presenta lo stesso coefficiente, ovvero sommare alla stessa l'equazione (2) moltiplicata per -1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(1)	1	1	3	1	0	6	+
$-1 \times (2)$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	-5	=
(1')	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1	

Per quello che riguarda il coefficiente -2 nell'equazione (0) si può sommare a questa l'equazione (2) moltiplicata per 2:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(0)	-1	-2	-1	0	0	0	+
$2 \times (2)$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10	=
(0')	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10	

Adesso i valori possono essere riportati nel tableau relativo alla prima iterata del metodo del simplesso.

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10
x_4	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Dobbiamo effettuare un'altra iterazione perchè il test di ottimalità non è verificato in quanto nell'equazione (0) è presente un coefficiente negativo. Variabile entrante è x_3 mentre variabile uscente è x_4 (applicando il test del minimo rapporto).

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10
x_4	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5

Dopo la seconda iterazione abbiamo il seguente tableau, che è stato ottenuto prima moltiplicando l'equazione (1) per $3/8$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
(1)	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

poi sommando all'equazione (2) la (1) moltiplicata per $-1/3$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(2)	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	5	+
$-1/3 \times (1)$	$-\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{8}$	=
(2')	$\frac{5}{8}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{39}{8}$	

In seguito, per azzerare il coefficiente $-1/3$ dall'equazione (0) sommiamo a quest'ultima l'equazione (1) moltiplicata per $1/3$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
(0)	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	10	+
$1/3 \times (1)$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	=
(0')	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{81}{8}$	

Il tableau del metodo è diventato pertanto

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{81}{8}$
x_3	(1)	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_2	(2)	0	$\frac{5}{8}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{39}{8}$

Siamo arrivati alla soluzione ottima $(0, 39/8, 3/8, 0, 0)$ in cui la funzione obiettivo vale $Z = 81/8$.

Terminiamo questo paragrafo analizzando alcune situazioni che si possono verificare applicando il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare.

Scelta della variabile entrante e di quella uscente

Nell'applicazione del metodo del simplesso potrebbero verificarsi due situazioni:

1. Nell'equazione (0) due, o più, variabili non di base hanno lo stesso coefficiente negativo più piccolo e pertanto possono entrambe entrare in base presentando lo stesso tasso di incremento per la funzione obiettivo;
2. Due, o più quozienti, soddisfano il test del minimo rapporto ovvero, incrementando il valore della variabile entrante in base, ci sono più variabili di base che raggiungeranno simultaneamente il valore zero.

Ci chiediamo come bisogna comportarsi in questo caso e soprattutto se esiste un modo ottimale per scegliere la variabile.

Il secondo caso presenta un aspetto molto delicato in quanto delle variabili che soddisfano il test solo una uscirà dalla base mentre l'altra, o le altre, resteranno in base pur assumendo valore zero nell'iterazione successiva.

In questo caso tali variabili, così come la relativa BFS, sono dette **degeneri**. In presenza di BFS degeneri il cambiamento di base può non migliorare il valore della funzione obiettivo poichè il minimo rapporto può essere uguale a zero anche nelle iterazioni successive pertanto possono entrare in base variabili con valore uguale a zero. Una conseguenza di tale situazione è che potrebbe percorrersi ciclicamente (e cioè all'infinito) una sequenza di basi degeneri associate allo stesso vertice. Questi casi, che in verità non derivano da problemi reali, possono essere evitati applicando alcune regole cosiddette **anticiclo** che cambiano il criterio per la scelta delle variabili entranti o uscenti dalla base. La più nota è senz'altro la **Regola di Bland** che impone di scegliere, tra le variabili candidate ad entrare o ad uscire, sempre quella che ha indice minore. È possibile dimostrare che, applicando la regola di Bland, il metodo del simplesso converge sempre in un numero finito di iterazioni.

Anche per quello che riguarda la scelta della variabile entrante in base non c'è alcun modo di sapere, a priori, la scelta migliore, pertanto di solito conviene applicare la regola di Bland anche in questo caso.

Esempio 3.4.1 *Risolvere il seguente problema in forma standard:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata introducendo tre variabili slack:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 18 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_3 + x_6 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -5x_1 & -6x_2 & -4x_3 & & & & & = & 0 \\ (1) & & -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & & & & = & 18 \\ (2) & & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & & & = & 4 \\ (3) & & 3x_1 & & +2x_3 & & & +x_6 & & = & 8 \end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-5	-6	-4	0	0	0	0
x_4	(1)	0	-1	3	4	1	0	0	18
x_5	(2)	0	2	2	1	0	1	0	4
x_6	(3)	0	3	0	2	0	0	1	8

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	1	0	-1	0	3	0	12
x_4	(1)	0	-4	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	12
x_2	(2)	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
x_6	(3)	0	3	0	2	0	0	1	8

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	3	2	0	0	4	0	16
x_4	(1)	0	-9	-5	0	1	-4	0	2
x_3	(2)	0	2	2	1	0	1	0	4
x_6	(3)	0	-1	-4	0	0	-2	1	0

Soluzione è $(0, 0, 4, 2, 0, 0)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$. Osserviamo che la variabile in base x_6 assume valore nullo, pertanto la BFS trovata è degenere.

Nessuna variabile di base uscente- Z illimitata

Questa situazione si verifica quando nel tableau del metodo del simplesso ad un coefficiente negativo dell'equazione (0) corrispondente ad una variabile non di base è associata una colonna di coefficienti tutti nulli o negativi. Questo vuol dire che la variabile entrante può essere incrementata all'infinito senza uscire dalla regione di ammissibilità e lasciando che anche Z può essere aumentata all'infinito, cioè $Z = +\infty$. Una situazione del genere si verifica quando è stato commesso qualche errore nella definizione del modello utilizzato per descrivere il problema reale.

Risolviamo quindi il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 + 5x_4 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Scriviamo innanzitutto il problema in forma aumentata

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 10 \\ & 3x_1 + x_2 + 5x_4 + x_6 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -6x_1 & -4x_2 & -x_3 & -x_4 & & & & = & 0 \\ (1) & & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +4x_4 & +x_5 & & & = & 10 \\ (2) & & 3x_1 & +x_2 & & +5x_4 & & +x_6 & & = & 6 \end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-6	-4	-1	-1	0	0	0
x_5	(1)	0	2	1	-3	4	1	0	10
x_6	(2)	0	3	1	0	5	0	1	6

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	-2	-1	9	0	2	12
x_5	(1)	0	0	$\frac{1}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	6
x_1	(2)	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	6	0	-1	19	0	4	24
x_5	(1)	0	-1	0	-3	-1	1	-1	4
x_2	(2)	0	3	1	0	5	0	1	6

La variabile x_3 può entrare in base ma non c'è alcuna variabile candidata ad uscire. Quindi la funzione obiettivo è illimitata e risulta $Z = +\infty$.

Il caso di soluzioni ottime multiple

Può verificarsi che un problema ammetta infinite soluzioni tutte ottime (è il caso in cui due vertici adiacenti sono entrambi ottimi e quindi anche il relativo spigolo che li congiunge è costituito da soluzioni ottime). Questo caso si verifica quando il coefficiente di una variabile non di base nell'equazione (0) è uguale a zero e nella colonna ci sono coefficienti positivi relativi a variabili che potrebbero uscire dalla base. Volendo si potrebbe effettuare un'ulteriore iterazione del metodo del simplesso, verificando che la funzione obiettivo non cambia valore, e trovando un altro vertice ammissibile.

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\max Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Scriviamo il problema nella forma aumentata introducendo tre variabili slack:

$$\max Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & & & & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & & & = & 6 \\ x_1 & & +2x_3 & & & & +x_7 & & & = & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Le equazioni da risolvere sono

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -4x_1 & -5x_2 & -3x_3 & -5x_4 & & & & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & & & = & 12 \\ (2) & & 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & = & 6 \\ (3) & & x_1 & & +2x_3 & & & & +x_7 & = & 10. \end{array}$$

Iterazione 0										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-4	-5	-3	-5	0	0	0	0
x_5	(1)	0	1	1	1	2	1	0	0	12
x_6	(2)	0	3	2	-1	2	0	1	0	6
x_7	(3)	0	1	0	2	0	0	0	1	10

Iterazione 1										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	15
x_5	(1)	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	9
x_2	(2)	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3
x_7	(3)	0	1	0	2	0	0	0	1	10

Iterazione 2										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_5	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	$\frac{7}{4}$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

A questo punto osserviamo che la BFS in forma non aumentata

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{11}{2}, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 0$$

in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 85/2$, soddisfa il test di ottimalità e pertanto è soluzione ottima. Bisogna osservare però che la variabile x_4 , nonostante non sia in base, ha coefficiente nullo nell'equazione (0) e che è presente invece una variabile in base, ovvero x_5 , che soddisfa il test del minimo rapporto e che potrebbe uscire dalla base. Eseguiamo pertanto un'ulteriore iterazione facendo entrare x_4 ed uscire x_5 :

Iterazione 2										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_5	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	$\frac{7}{4}$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

Iterazione 3										
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$\frac{25}{4}$	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{85}{2}$
x_4	(1)	0	$-\frac{5}{4}$	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	3	1	0	0	-1	1	1	4
x_3	(3)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5

Anche la BFS

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = \frac{3}{2}$$

in cui la funzione obiettivo assume valore $Z = 85/2$, soddisfa il test di ottimalità, pertanto esistendo due vertici ottimi significa che tutti i punti che appartengono allo spigolo che li congiunge sono soluzione ottima.

3.5 Problemi di programmazione lineare in forma non standard

Ricordiamo che un problema di programmazione lineare in forma standard ha le seguenti proprietà:

1. funzione obiettivo da massimizzare;
2. vincoli di tipo $\leq$ e termini noti positivi;
3. nonnegatività delle variabili decisionali.

Esamineremo nei paragrafi successivi come si risolvono i problemi in cui una (o più) delle proprietà elencate viene meno. In alcuni casi è possibile ricondurre il problema alla forma standard, utilizzando degli opportuni cambi di variabile, in altri invece ciò non è possibile.

Infatti in alcuni problemi in forma non standard l'origine non è un vertice ammissibile e quindi manca una soluzione basica ammissibile iniziale per poter innescare il metodo del simplesso. Inoltre nei problemi con vincoli di uguaglianza non è possibile introdurre le variabili slack, e quindi sceglierle

come variabili di base. In questi casi l'approccio utilizzato è l'introduzione delle cosiddette variabili artificiali, che definiscono un vero e proprio problema artificiale che viene risolto per ottenere, se esiste, la soluzione basica ammissibile.

Analizziamo ora i diversi modi di affrontare il problema in base alle possibili difformità del problema rispetto alla forma standard.

Termini noti negativi

Se uno dei termini noti è negativo allora l'intero vincolo può essere moltiplicato per -1 , quindi

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

diventa

$$-x_1 + x_2 \geq 1.$$

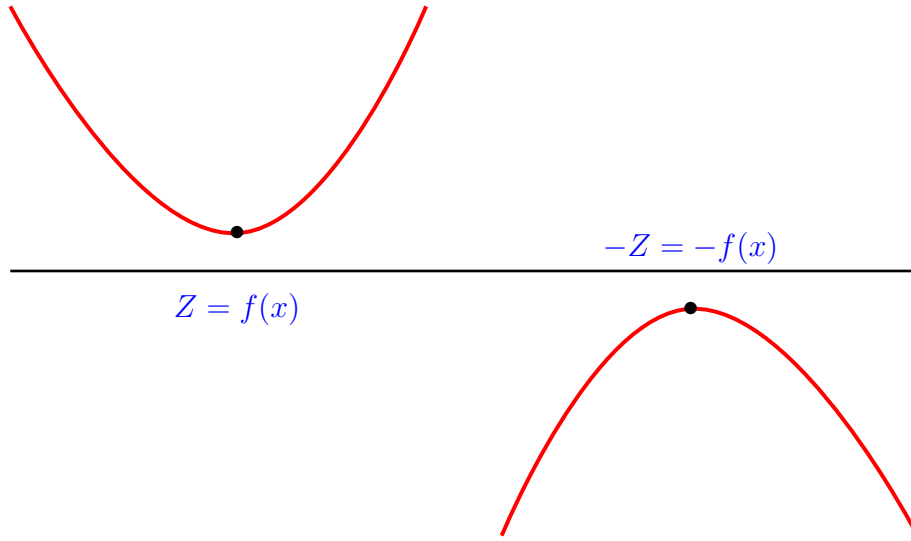
Considereremo come si tratta il vincolo funzionale nella forma $\geq$ nei successivi paragrafi, adesso analizziamo il caso di un vincolo di uguaglianza. D'ora in poi si continuerà a supporre che il termine noto di un vincolo sia sempre positivo (oppure nullo) e a considerare i vincoli in modo tale che rispettino sempre questa proprietà.

Minimizzazione della funzione obiettivo

Quando il problema da risolvere è la minimizzazione della funzione obiettivo può essere trasformato in forma standard facendolo diventare di massimo. Infatti il punto in cui viene assunto il valore minimo di una funzione coincide con quello in cui viene raggiunto il massimo dalla medesima funzione ma con il segno cambiato. Quindi

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \Leftrightarrow \quad \max -Z = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

e si può applicare il metodo del simplesso a tale funzione obiettivo. Si deve poi considerare che, una volta trovato il valore massimo di tale funzione obiettivo, per ottenere il valore del minimo voluto si dovrà cambiare il suo segno.



Variabili senza un esplicito limite inferiore

Se il vincolo di nonnegatività fosse sostituito dal seguente

$$x_j \leq 0$$

allora basterebbe porre

$$x'_j = -x_j \geq 0,$$

effettuare il cambio di variabile $x_j = -x'_j$ nella funzione obiettivo e nei vincoli, ed applicare il metodo del simplesso.

Se la variabile x_j non ha un esplicito limite inferiore, ovvero il vincolo

$$x_j \in \mathbb{R}$$

sostituisce quello di nonnegatività $x_j \geq 0$, allora è necessario sostituire ad x_j la differenza tra due nuove variabili nonnegative, ponendo

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Ogni BFS per la nuova forma del modello ha la proprietà che $x_j^+ = 0$ oppure $x_j^- = 0$ (oppure possono essere entrambe nulle). Nella soluzione ottenuta con il metodo del simplesso si ha:

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j & \text{se } x_j \geq 0; \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad x_j^- = \begin{cases} |x_j| & \text{se } x_j \leq 0; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per esempio nel problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

poniamo

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-, \quad x_3^+, x_3^- \geq 0$$

e scriviamo il problema in forma aumentata introducendo due variabili slack:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- \\ & 2x_1 + x_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + x_5 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Le equazioni da risolvere sono:

$$\begin{array}{llllllllll} (0) & Z & -3x_1 & -x_2 & +4x_3^+ & -4x_3^- & & & & = 0 \\ (1) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3^+ & +x_3^- & +x_4 & & & = 4 \\ (2) & & 2x_1 & +2x_2 & +3x_3^+ & -3x_3^- & & +x_5 & & = 9 \end{array}$$

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-3	-1	4	-4	0	0	0
x_4	(1)	0	2	1	-1	1	1	0	4
x_5	(2)	0	2	2	3	-3	0	1	9
Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	5	3	0	0	4	0	16
x_3^-	(1)	0	2	1	-1	1	1	0	4
x_5	(2)	0	8	5	0	0	3	1	21

La soluzione è $x_1 = x_2 = x_3^+ = 0$, $x_3^- = 4$ da cui segue

$$x_3 = -4$$

e quindi la BFS è $(0, 0, -4)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$. Questa tecnica ha lo svantaggio di incrementare il numero di variabili decisionali rispetto al problema originale. Infatti se nessuna variabile avesse limite inferiore il loro numero raddoppierebbe. Questo approccio può essere modificato in modo tale da aggiungere solo una variabile decisionale al modello. Infatti ad ogni variabile non limitata inferiormente si può sostituire

$$x_j = x'_j - x'', \quad x'_j, x'' \geq 0,$$

in cui x'' rappresenta sempre la stessa variabile. L'interpretazione di x'' in questo caso è che $-x''$ rappresenta il valore attuale della più grande (in termini assoluti) variabile originale negativa, cosicchè x'_j rappresenta di quanto x_j eccede tale valore.

Variabili definite in un intervallo

Supponiamo che, per una variabile x_j , sia definito il seguente vincolo

$$l_j \leq x_j \leq L_j, \quad l_j < L_j.$$

Sottraendo il valore l_j dalle disequazioni si ottiene

$$0 \leq x_j - l_j \leq L_j - l_j.$$

Introducendo una nuova variabile

$$x'_j = x_j - l_j,$$

il vincolo

$$x'_j \leq L_j - l_j$$

viene considerato come un vincolo funzionale mentre il limite inferiore

$$x'_j = x_j - l_j \geq 0,$$

diviene il consueto vincolo di nonnegatività. Pertanto si effettua il seguente cambio di variabile

$$x_j = x'_j + l_j$$

in ogni equazione del problema. Per esempio, nel seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq -10, x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

Definiamo le variabili

$$x'_1 = x_1 + 10, \quad x'_2 = x_2 - 1, \quad x'_1, x'_2 \geq 0,$$

cosicchè

$$x_1 = x'_1 - 10, \quad x_2 = x'_2 + 1$$

ed il problema diventa

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3(x'_1 - 10) + 5(x'_2 + 1) \\ & x'_1 - 10 \leq 4 \\ & 2(x'_2 + 1) \leq 12 \\ & 3(x'_1 - 10) + 2(x'_2 + 1) \leq 18 \\ & x'_1, x'_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x'_1 + 5x'_2 - 25 \\ & x'_1 \leq 14 \\ & 2x'_2 \leq 10 \\ & 3x'_1 + 2x'_2 \leq 46 \\ & x'_1, x'_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3.6 Il Metodo del Simplexso a due fasi

In questo paragrafo saranno analizzati gli ultimi due casi di problemi in forma non standard, ovvero il caso in cui il vincolo sia di uguaglianza oppure il caso di vincolo tipo $\geq$. Per ora consideriamo il primo caso. Le difficoltà nella risoluzione del problema sono

1. l'origine non è (nella gran parte dei casi) un vertice ammissibile quindi il metodo del simplexso non è applicabile in quanto manca la BFS iniziale da cui iniziare l'esplorazione dei vertici ammissibili;

2. non è possibile introdurre le variabili slack da usare come variabili in base in quanto il vincolo si presenta già come un'equazione.

Tali problemi vengono risolti utilizzando una versione modificata del metodo del simplesso, detta **metodo del simplesso a due fasi**. Il nome deriva dal fatto che, in una prima fase, viene determinata la BFS iniziale, se esiste, mentre nella seconda viene risolto il problema partendo proprio da tale BFS. Sostanzialmente nelle due fasi vengono definiti (e risolti) due diversi problemi. Iniziamo considerando il caso di un vincolo di uguaglianza. Sia assegnato il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile slack:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Appare ovvio che nel sistema manca una variabile in base, pertanto è necessario introdurne una modificando artificialmente il problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La variabile $\bar{x}_5$, detta appunto **variabile artificiale**, viene indicata in modo diverso in quanto deve assumere valore zero in qualsiasi BFS ammissibile del problema (3.3). Il problema definito nella prima fase del metodo deve essere tale che la sua soluzione abbia tutte le variabili artificiali (in questo caso $\bar{x}_5$) uguali a zero, quindi:

$$\begin{aligned} \text{I Fase} \\ \max \quad & Z = -\bar{x}_5 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 \geq 0. \end{aligned}$$

In generale se il problema è di massimo si sceglie come funzione obiettivo

$$Z = - \sum \text{variabili artificiali}$$

ovvero tale che $Z \leq 0$ ed assuma valore massimo (nullo) proprio quando le variabili artificiali introdotte siano tutte uguali a zero.

Nella seconda fase, avendo già una BFS ammissibile, calcolata nella prima fase, non è necessario l'uso di alcuna variabile artificiale, pertanto possiamo applicare il metodo del simplesso alla funzione obiettivo del problema di partenza:

II Fase

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono x_4 e $\bar{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0, 0, 0, 4, 6)$. Le equazioni della I fase sono

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z \quad \quad \quad + \bar{x}_5 = 0 \\ (1) \quad & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ (2) \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 6. \end{aligned}$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando il coefficiente della variabile di base $\bar{x}_5$ dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ (1) \quad & x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ (2) \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 6. \end{aligned}$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	-3	0	0	-6
x_4	(1)	0	1	5	-1	1	0	4
$\bar{x}_5$	(2)	0	1	2	3	0	1	6

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	0	1	0
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	2

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima della I fase in cui il valore della funzione obiettivo è 0 (come era atteso), la BFS $(0, 0, 2)$ è quella iniziale per la II fase. Terminata la prima fase del metodo del simplesso, prima di procedere alla successiva, si devono effettuare alcune operazioni sul tableau che è stato ottenuto. Innanzitutto devono essere eliminate le colonne relative alle variabili artificiali, inoltre deve essere sostituita la funzione obiettivo ed infine il problema deve essere posto in forma canonica (cioè devono essere azzerati i coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili in base), quindi eliminiamo la colonna relativa alla variabile $\bar{x}_5$ e sostituiamo l'equazione (0):

$$(0) \quad Z \quad -5x_1 \quad -x_2 \quad -6x_3 \quad = \quad 0$$

Tableau finale I Fase con funzione obiettivo II Fase							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	-5	-1	-6	0	0
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	1	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	2

A questo punto si elimina il coefficiente della variabile di base x_3 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	-3	3	0	0	12
x_4	(1)	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	1	6
x_3	(2)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	2

Iterazione 1							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	1	0	$\frac{63}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{51}{2}$
x_1	(1)	0	1	$\frac{17}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}$
x_3	(2)	0	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(9/2, 0, 1/2)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 51/2$.

Esempio 3.6.1 *Applicare il metodo del simplesso adue fasi per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
 & 2x_1 + x_2 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile artificiale in ogni vincolo di uguaglianza:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
 & 2x_1 + x_2 + \bar{x}_4 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Scriviamo ora i problemi da risolvere nelle due fasi:

I Fase

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_5 \\
 & 2x_1 + x_2 + \bar{x}_4 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

II Fase

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
 & 2x_1 + x_2 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0, 0, 0, 4, 8)$. Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & & & & +\bar{x}_4 & +\bar{x}_5 & = & 0 \\ (1) & & 2x_1 & +x_2 & & +\bar{x}_4 & & = & 4 \\ (2) & & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +\bar{x}_5 & = & 8. \end{array}$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando i coefficienti delle variabili artificiali dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0) le equazioni (1) e (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & -3x_1 & -4x_2 & -3x_3 & & & = & -12 \\ (1) & & 2x_1 & +x_2 & & +\bar{x}_4 & & = & 4 \\ (2) & & x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +\bar{x}_5 & = & 8. \end{array}$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-3	-4	-3	0	0	-12
$\bar{x}_4$	(1)	0	2	1	0	1	0	4
$\bar{x}_5$	(2)	0	1	3	3	0	1	8

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$\bar{x}_4$	(1)	0	$\frac{5}{3}$	0	-1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	(2)	0	$\frac{1}{3}$	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima della I fase in cui il valore della funzione obiettivo è 0 (come era atteso), la BFS $(4/5, 12/5, 0)$ è quella iniziale per la II fase. Per risolvere la seconda eliminiamo dal tableau le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo la funzione obiettivo scrivendo la nuova l'equazione (0):

$$(0) \quad Z - 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

Tableau I Fase con funzione obiettivo II Fase						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	-4	-2	-1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$

A questo punto si eliminano i coefficienti delle variabile di base x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	0	-1	8
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{12}{5}$

Iterazione 1						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	$\frac{5}{6}$	0	10
x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	(2)	0	0	$\frac{5}{6}$	1	2

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(2, 0, 2)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 10$.

Vincoli funzionali nella forma $\geq$

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
 & x_1 + 3x_2 - 6x_3 \geq 6 \\
 & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il primo vincolo viene modificato in uno di uguaglianza definendo la variabile x_4 , detta **variabile surplus**, posta uguale a:

$$x_4 = x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 6, \quad x_4 \geq 0.$$

In questo modo il vincolo diventa l'uguaglianza

$$x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 6$$

ed è necessario aggiungere un'ulteriore variabile artificiale $\bar{x}_5$ poichè x_4 non può essere usata come variabile di base perchè nell'equazione ha coefficiente -1 mentre la forma canonica del problema prevede che le variabili in base debbano avere necessariamente coefficiente 1. Nel secondo vincolo è necessario aggiungere la usuale variabile slack. Il problema nella forma aumentata è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
 & x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 6 \\
 & 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_6 = 10 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Obiettivo della prima fase del metodo è:

$$\text{Massimizzare } Z = -\bar{x}_5$$

fino ad ottenere $\bar{x}_5 = 0$. Nella seconda fase invece si vuole

$$\text{Massimizzare } Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

con $\bar{x}_5 = 0$. La soluzione ottima della prima fase viene utilizzata come BFS iniziale per la seconda.

Riscriviamo ora i problemi che devono essere risolti nelle due fasi.

I Fase:

$$\max Z = -\bar{x}_5$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\bar{x}_5 & & & & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & & +x_6 & & = & 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 & \geq & 0, \end{array}$$

II Fase

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & & & & & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & & +x_6 & & = & 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 & \geq & 0. \end{array}$$

Le equazioni della prima fase sono

$$\begin{array}{ccccccccc} (0) & Z & & & & +\bar{x}_5 & & & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\bar{x}_5 & & = & 6 \\ (2) & & 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10 \end{array}$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni

$$\begin{array}{ccccccccc} (0) & Z & -x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +x_4 & & & = & -6 \\ (1) & & x_1 & +3x_2 & -6x_3 & -x_4 & +\bar{x}_5 & & = & 6 \\ (2) & & 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & & & +x_6 & = & 10. \end{array}$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	b_i
Z	(0)	1	-1	-3	6	1	0	0	-6
$\bar{x}_5$	(1)	0	1	3	-6	-1	1	0	6
x_6	(2)	0	2	-1	5	0	0	1	10

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	0	1	0	0
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	12

Eliminiamo ora la colonna relativa alle variabile artificiale $\bar{x}_5$ e sostituiamo la funzione obiettivo:

Tableau iniziale II Fase								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	-1	-4	-3	0	0	0
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	1	12

A questo punto, per rendere il tableau in forma canonica, eliminiamo il coefficiente di x_2 dall'equazione (0), moltiplicando l'equazione (1) per 4 e sommandola, appunto, all'equazione (0);

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	$\frac{1}{3}$	0	-11	$-\frac{4}{3}$	0	8
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	-2	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	(2)	0	$\frac{7}{3}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	1	12

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	b_i
Z	(0)	1	$\frac{80}{9}$	0	0	$-\frac{23}{9}$	$\frac{11}{3}$	52
x_2	(1)	0	$\frac{17}{9}$	1	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	10
x_3	(2)	0	$\frac{7}{9}$	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	4

Poichè la variabile x_4 può entrare in base ma nessuna variabile soddisfa il test del minimo rapporto, la funzione è illimitata, quindi il problema non ammette soluzione e

$$Z = +\infty.$$

Il metodo del simplesso a due fasi per problemi di minimo

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema di minimo:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 & x_1 \quad \quad + 3x_3 = 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile surplus e due variabili artificiali:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 & x_1 \quad \quad + 3x_3 + \bar{x}_4 = 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \quad \quad - x_5 + \bar{x}_6 = 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il problema che definisce la prima fase del metodo a due fasi deve essere tale che la sua soluzione abbia tutte le variabili artificiali (in questo caso $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_6$) uguali a zero, quindi:

I Fase

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \\ & x_1 \quad \quad + 3x_3 \quad + \bar{x}_4 \quad \quad = 6 \\ & x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad \quad - x_5 + \quad \bar{x}_6 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6 \geq 0. \end{aligned}$$

In generale se il problema è di minimo si sceglie come funzione obiettivo

$$Z = \sum \text{variabili artificiali}$$

ovvero tale che $Z \geq 0$ ed assuma valore minimo (nullo) proprio quando le variabili artificiali introdotte sono tutte uguali a zero.

Nella seconda fase si può applicare il metodo del simplesso alla funzione obiettivo del problema di partenza:

II Fase

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & x_1 \quad \quad + 3x_3 \quad \quad = 6 \\ & x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad \quad - x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Poichè il problema è di minimo dobbiamo trasformarlo in un problema di massimo cambiando il segno ai due membri della funzione obiettivo in entrambi i problemi:

I Fase

$$\begin{aligned} \max \quad & -Z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_6 \\ & x_1 \quad \quad + 3x_3 \quad + \bar{x}_4 \quad \quad = 6 \\ & x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad \quad - x_5 + \quad \bar{x}_6 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6 \geq 0. \end{aligned}$$

II Fase

$$\begin{aligned} \max \quad & -Z = -x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ & x_1 \quad \quad + 3x_3 \quad \quad = 6 \\ & x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad \quad - x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{rcllclclcl} (0) & -Z & & & +\bar{x}_4 & & +\bar{x}_6 & = & 0 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\bar{x}_4 & & = & 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \bar{x}_6 & = & 4. \end{array}$$

Per porre in problema in forma canonica bisogna prima sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (1), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{rcllclclcl} (0) & -Z & -x_1 & & -3x_3 & & +\bar{x}_6 & = & -6 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\bar{x}_4 & & = & 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \bar{x}_6 & = & 4 \end{array}$$

e poi sottrarre dall'equazione (0) l'equazione (2), ottenendo la nuova equazione:

$$\begin{array}{rcllclclcl} (0) & -Z & -2x_1 & -x_2 & -4x_3 & & +x_5 & = & -10 \\ (1) & & x_1 & & +3x_3 & +\bar{x}_4 & & = & 6 \\ (2) & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5+ & \bar{x}_6 & = & 4. \end{array}$$

Adesso possiamo scrivere il tableau del metodo del simplesso:

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	-2	-1	-4	0	1	0	-10
$\bar{x}_4$	(1)	0	1	0	3	1	0	0	6
$\bar{x}_6$	(2)	0	1	1	1	0	-1	1	4

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{4}{3}$	1	0	-2
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
$\bar{x}_6$	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	b_i
Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

Ora eliminiamo dal tableau finale della I fase le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo i coefficienti dell'equazione obiettivo della II fase:

Tableau II Fase							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	1	5	4	0	0
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	2

II Fase-Eliminaz. coeff. Equazione (0)							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{7}{3}$	0	4	5	-10
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	2

Iterazione 0							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	$-\frac{11}{3}$	0	0	5	-18
x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	2
x_2	(2)	0	$\frac{2}{3}$	1	0	-1	2

Iterazione 1							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{11}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-7
x_3	(1)	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
x_1	(2)	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	3

Iterazione 2							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	5	1	0	-6
x_5	(1)	0	0	-1	2	1	2
x_1	(2)	0	1	0	3	0	6

La BFS ottima è $(6, 0, 0)$ mentre il valore minimo della funzione obiettivo è:

$$Z = 6.$$

Soluzioni non ammissibili

Nel metodo del simplesso il problema fondamentale è l'identificazione di una BFS iniziale quando una soluzione semplice non è disponibile. L'uso di variabili artificiali consente di trasformare il problema in uno artificiale e la stessa tecnica consente di ottenere una BFS iniziale per tale problema. Il metodo del simplesso a due fasi consente di ottenere una soluzione ottima partendo dalla BFS iniziale del problema artificiale. Tale tecnica tuttavia contiene una possibile minaccia. Infatti potrebbe essere difficile trovare una soluzione ammissibile perchè non ce ne sono, ciò nonostante, trasformando il problema e applicando il metodo del simplesso, questo trova una soluzione apparentemente ottima. Esiste un modo per verificare quando tale situazione si verifica: infatti se il problema originale non ha soluzioni ammissibili, allora la prima fase del metodo del simplesso a due fasi fornisce una soluzione finale in cui almeno una variabile artificiale è in base ed assume un valore maggiore

di zero.

Consideriamo per esempio il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 2x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e scriviamo direttamente il problema artificiale

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + \bar{x}_4 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + \bar{x}_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0. \end{aligned}$$

L'applicazione del metodo del simplesso a due fasi implica la risoluzione dei seguenti problemi:

I Fase

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_5 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + \bar{x}_4 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + \bar{x}_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0; \end{aligned}$$

II Fase

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Le equazioni della prima fase sono:

$$\begin{array}{rcll} (0) & Z & +\bar{x}_4 + \bar{x}_5 & = 0 \\ (1) & x_1 + x_2 - x_3 + \bar{x}_4 & & = 5 \\ (2) & 2x_1 + x_2 & + \bar{x}_5 & = 2 \end{array}$$

Trasformiamo il problema della prima fase in forma canonica eliminando dalla funzione obiettivo i coefficienti delle variabili di base $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_5$. Prima sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (1)

$$\begin{array}{rcll} Z & & +\bar{x}_4 + \bar{x}_5 & = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \bar{x}_4 & & & = -5 \\ \hline Z - x_1 - x_2 + x_3 & & + \bar{x}_5 & = -5. \end{array}$$

Poi sottraiamo dall'equazione (0) l'equazione (2)

$$\begin{array}{rcccccc} Z & -x_1 & -x_2 & +x_3 & +\bar{x}_5 & = & -5 \\ & -2x_1 & -x_2 & & -\bar{x}_5 & = & -2 \\ \hline Z & -3x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -7. \end{array}$$

Applichiamo il metodo del simplesso al problema definito nella prima fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-3	-2	1	0	0	-7
$\bar{x}_4$	(1)	0	1	1	-1	1	0	5
$\bar{x}_5$	(2)	0	2	1	0	0	1	2

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	-4
$\bar{x}_4$	(1)	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	4
x_1	(2)	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	1	0	1	0	2	-3
$\bar{x}_4$	(1)	0	-1	0	-1	1	-1	3
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	2

Il test di ottimalità è verificato quindi il metodo ha trovato (apparentemente) la soluzione per il problema definito nella prima fase, soluzione ottima che è $(0, 2, 0, 3, 0)$. Tuttavia la variabile artificiale $\bar{x}_4$ è rimasta in base e questo vuol dire che il problema di partenza non ammette alcuna soluzione ammissibile e quindi neanche quella ottima.

Variabile artificiale in base con valore nullo

In determinati esercizi può capitare che al termine della prima fase sia presente in base una variabile artificiale che però assume valore zero. Tale situazione è schematizzata nel seguente tableau:

	Eq.	x_1	...	x_j	...	x_n	...	$\bar{x}_h$	...	b_i
Z		$\bar{c}_1$	...	$\bar{c}_j$	...	$\bar{c}_n$	...	0	...	0
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\bar{x}_h$		$\bar{a}_{i1}$	...	$\bar{a}_{ij}$	...	$\bar{a}_{in}$	...	1	...	0
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		0		$\vdots$

Quindi, la riga i del tableau è relativa ad una variabile artificiale in base di valore 0. A questo punto, basta effettuare un'operazione di pivot sulla riga i in corrispondenza di una qualsiasi colonna j tale che $\bar{a}_{ij}$ sia diverso da zero. La variabile artificiale $\bar{x}_h$ lascia la base e il suo posto è preso da x_j . Si noti che si può effettuare l'operazione di pivot anche su un elemento $\bar{a}_{ij} < 0$: sostanzialmente i valori delle variabili non cambiano poichè x_j entra in base assumendo valore 0 e pertanto la soluzione rimane ammissibile. Si passa cioè da una soluzione degenera ad un'altra che rappresenta lo stesso punto nello spazio e quindi la stessa soluzione. Se non dovesse esistere nessun $\bar{a}_{ij} \neq 0$ in corrispondenza della riga i e delle colonne delle variabili decisionali allora questo vuol dire che la riga i della matrice A ed il relativo termine noto sono stati trasformati, con operazioni elementari tra righe, in una riga nulla. Ciò equivale a dire che il vincolo i -esimo del sistema è ridondante e può pertanto essere eliminato. Quindi, nel caso $\bar{a}_{ij} = 0$ per ogni j , si può eliminare la riga i avendo una variabile di base in meno e quindi togliendo $\bar{x}_h$ dalla base senza sostituirla con nessuna altra variabile.

Esempio 3.6.2 *Applicare il metodo del simplesso a due fasi per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Scriviamo quindi il problema nella forma aumentata introducendo una variabile artificiale in ogni vincolo di uguaglianza:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_4 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + \bar{x}_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Scriviamo ora i problemi da risolvere nelle due fasi:

$$\begin{aligned} \text{I Fase} \\ \max \quad & Z = -\bar{x}_4 - \bar{x}_5 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \bar{x}_4 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + \bar{x}_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II Fase} \\ \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso al problema definito nella I fase, considerando che le variabili di base sono $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_5$, e che la BFS iniziale è $(0, 0, 0, 4, 8)$. Le equazioni della I fase sono

$$\begin{array}{llllll} (0) & Z & & & +\bar{x}_4 & +\bar{x}_5 & = & 0 \\ (1) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\bar{x}_4 & = & 4 \\ (2) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\bar{x}_5 & = & 8. \end{array}$$

Poniamo il problema in forma canonica eliminando i coefficienti delle variabili artificiali dalla funzione obiettivo. Per questo sottraiamo dall'equazione (0)

le equazioni (1) e (2), ottenendo le nuove equazioni:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & -3x_1 & -3x_2 & -2x_3 & & & = & -12 \\ (1) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +\bar{x}_4 & & = & 4 \\ (2) & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +\bar{x}_5 & = & 8. \end{array}$$

Scriviamo il tableau della iterazioni del metodo del simplesso applicato alla I fase:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	-3	-3	-2	0	0	-12
$\bar{x}_4$	(1)	0	1	2	3	1	0	4
$\bar{x}_5$	(2)	0	2	1	-1	0	1	8

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	3	7	3	0	0
x_1	(1)	0	1	2	3	1	0	4
$\bar{x}_5$	(2)	0	0	-3	-7	-2	1	0

La BFS trovata a questo punto è $(4, 0, 0, 0, 0)$ con variabili in base x_1 e $\bar{x}_5$. Osserviamo che in realtà questa BFS risulta essere ammissibile anche per il problema di partenza quindi l'unico problema è sostituire la variabile artificiale in base con un'altra qualsiasi. Si sceglie quindi di far entrare in base x_2 anche se il suo coefficiente nell'equazione (2) è negativo.

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	1	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

Abbiamo ottenuto così la BFS ammissibile $(4, 0, 0)$ che era sostanzialmente la stessa trovata al termine della prima iterazione. Per risolvere la seconda fase, al solito, eliminiamo dal tableau le colonne relative alle variabili artificiali e sostituiamo la funzione obiettivo scrivendo la nuova l'equazione (0):

$$(0) \quad Z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

Tableau I Fase con funzione obiettivo II Fase						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	-4	-2	-3	0
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{7}{3}$	0

A questo punto si eliminano i coefficienti delle variabile di base x_1 e x_2 dalla funzione obiettivo e si ottiene il tableau iniziale della II fase:

Iterazione 0						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	0	-5	16
x_1	(1)	0	1	0	$-\frac{5}{3}$	4
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{7}{3}$	0

Iterazione 1						
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	b_i
Z	(0)	1	0	$\frac{15}{7}$	0	16
x_1	(1)	0	1	$\frac{5}{7}$	0	4
x_3	(2)	0	0	$\frac{3}{7}$	1	0

Abbiamo ottenuto la soluzione ottima del problema di massimo $(4, 0, 0)$ con valore della funzione obiettivo $Z = 16$.

Riepiloghiamo a questo punto i possibili scenari che si possono presentare al termine della prima fase:

1. Tutte le variabili artificiali sono fuori dalla base, quindi si procede alla risoluzione della seconda fase;
2. Almeno una variabile artificiale è rimasta in base con valore diverso da zero, in questo caso si conclude che il problema non ammette soluzione in quanto la regione ammissibile è l'insieme vuoto;
3. Una variabile artificiale resta in base con valore nullo, in questo caso si procede ad un'ulteriore iterazione facendo entrare in base un'altra variabile purchè abbia coefficiente diverso da zero nell'equazione associata alla variabile artificiale in base. Subito dopo si passa alla risoluzione della seconda fase.

3.7 Il Metodo del Simplex in Forma Matriciale

Come accennato in uno dei precedenti paragrafi un problema di programmazione lineare può essere descritto in modo più compatto utilizzando matrici ed vettori. Pertanto un modo alternativo per comprendere le operazioni effettuate dal metodo del simplex è quello di tradurle utilizzando, appunto, una notazione matriciale, più compatta e probabilmente più semplice da implementare. Ricordiamo che, nella notazione matriciale, abbiamo introdotto i vettori:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e la matrice dei coefficienti delle disequazioni vincolari

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

in modo tale che il problema possa essere scritto come

$$\begin{aligned} \max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Per ottenere la forma aumentata del problema si introduce il vettore $\mathbf{x}_S$ delle variabili slack,

$$\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

cosicchè i vincoli diventano

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

con

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

dove I è la matrice identità di ordine m e $\mathbf{0}$ è il vettore nullo avente $n + m$ elementi.

3.7.1 Calcolo di una soluzione di base ammissibile

L'approccio generale del metodo del simplesso è quello di ottenere una sequenza di BFS sempre migliori finchè non si raggiunge la soluzione ottima. Una delle caratteristiche principali del metodo del simplesso in forma matriciale riguarda il modo con cui esso risolve il problema di determinare una nuova BFS dopo aver identificato le variabili in base e quelle non in base. Date queste variabili la BFS risultante è la soluzione del sistema di m equazioni

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

in cui le n variabili non di base nel vettore di $n + m$ elementi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix}$$

sono poste uguali a zero. Eliminando tali variabili, ovvero ponendo il loro valore uguale a zero, rimane un sistema di m equazioni in m incognite

$$Bx_B = \mathbf{b} \tag{3.7}$$

dove il vettore

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

è ottenuto da $[\mathbf{x} \ \mathbf{x}_S]$ eliminando le variabili non di base mentre la matrice

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

è ottenuta da $[A, \ I]$ eliminando le colonne corrispondenti alle variabili non di base. Gli elementi di $\mathbf{x}_B$ e le colonne di B possono essere disposti in un ordine differente quando viene applicato il metodo del simplesso.

Il metodo del simplesso introduce in base le variabili per cui B è non singolare, in modo tale che la matrice B^{-1} esista. Risolvere il sistema (3.7) significa sostanzialmente invertire la matrice B e calcolare il vettore

$$B^{-1}B\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$$

da cui segue che la soluzione per le variabili di base è

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}.$$

Indicando con $\mathbf{c}_B$ il vettore i cui elementi sono i coefficienti della funzione obiettivo corrispondenti agli elementi di $\mathbf{x}_B$ allora il valore della funzione obiettivo per la soluzione di base è:

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}.$$

Considerando l'esempio introdotto all'inizio del capitolo possiamo evidenziare, nelle diverse iterazioni, i valori della matrice B e dei vettori $\mathbf{x}_B$.

Inizialmente i vettori sono:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

la matrice delle equazioni:

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iterazione 0:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

e pertanto

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix},$$

poichè

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0.$$

Iterazione 1:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

poichè

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si ha

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30.$$

Iterazione 2:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

poichè

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

si ha

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36.$$

3.7.2 Forma matriciale delle equazioni correnti

L'insieme delle equazioni correnti del metodo del simplesso (cioè il tableau) può essere rappresentato in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ \mathbf{0} & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Ad ogni passo vengono eseguite su questi dati una serie di operazioni algebriche (in particolare il prodotto di un'equazione per una costante e combinazioni lineari tra le equazioni) che possono essere espresse in forma matriciale come il prodotto di una matrice per entrambi i membri dell'equazione appena scritta. Tale matrice è molto simile, come vedremo, alla matrice identità. In modo simbolico questa matrice può essere rappresentata usando le informazioni relative ai termini noti del nuovo sistema di equazioni. Infatti ad ogni iterazione i termini noti sono $Z = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}$ e $\mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b}$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T B^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} \\ B^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Eseguendo le stesse operazioni sui due membri dell'equazione la stessa matrice deve premoltiplicare anche le equazioni a sinistra, quindi poichè

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T B^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ \mathbf{0} & A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T & \mathbf{c}_B^T B^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix}$$

la forma matriciale delle insieme delle equazioni dopo ogni iterazione è

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T & \mathbf{c}_B^T B^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} \\ B^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Per illustrare questa forma matriciale consideriamo nuovamente lo stesso esempio richiamato nel paragrafo precedente. Usando la matrice B^{-1} ed il vettore $\mathbf{c}_B$ calcolati alla fine dell'iterazione 2, si ha:

$$\begin{aligned} B^{-1} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_B^T B^{-1} &= [0 \quad 5 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = [0 \quad 3/2 \quad 1] \\ \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T &= [0 \quad 5 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3 \quad 5] = [0 \quad 0]. \end{aligned}$$

Inoltre, usando i valori

$$\mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b}$$

e

$$Z = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}$$

calcolati alla fine del precedente paragrafo, si ha il seguente insieme di equazioni:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le forme del simplesso viste (forma algebrica, forma tabellare e forma matriciale) prendono esattamente sempre le stesse decisioni (variabile entrante, variabile uscente), l'unica differenza è il modo usato per effettuare i calcoli per poi prendere tali decisioni. La forma matriciale fornisce sicuramente un modo compatto che non richiede la scrittura di una sequenza di equazioni algebriche o di tabelle.

3.7.3 Riassunto della forma matriciale del metodo del simplesso

1. **Inizializzazione:** Si introducono le variabili slack che sono le variabili di base iniziali, quindi si ottengono $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{c}_B$, B e B^{-1} (dove $B = I = B^{-1}$). Andare al passo 3.

2. **Iterazione:**

Passo 1. Determinare la variabile entrante in base: analizzare i coefficienti delle variabili non di base nell'equazione (0) ottenuta durante l'esecuzione del precedente test di ottimalità.

Passo 2. Determinare la variabile uscente dalla base: utilizzare le espressioni $B^{-1}A$ (per i coefficienti delle variabili originali) e B^{-1} (per i coefficienti delle variabili slack) per calcolare i coefficienti della variabile entrante in base in ogni equazione, eccetto l'equazione (0). Usare $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ per calcolare i termini noti di queste equazioni. Usare quindi il criterio del minimo rapporto per determinare la variabile che esce dalla base.

Passo 3. Determinare la nuova BFS: Aggiornare la matrice B sostituendo la colonna della variabile uscente con la corrispondente colonna in $[A \ I]$ della variabile entrante in base. Fare le stesse sostituzioni anche in $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{c}_B$. Calcolare B^{-1} e porre $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$.

3. **Test di ottimalità:** Utilizzare le espressioni $\mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T$ (per i coefficienti delle variabili originali) e $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ (per i coefficienti delle variabili slack) per calcolare i coefficienti delle variabili non in base nell'equazione (0). La BFS corrente è ottima se e solo se tali coefficienti sono non negativi. In questo caso stop. In caso contrario eseguire un'altra iterazione.

Riprendiamo ora l'esempio visto nel paragrafo precedente. Il punto di partenza è

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad [A, \ I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inizializzazione.

La variabili di base iniziali sono le variabili slack, quindi

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}.$$

Test di ottimalità.

I coefficienti delle variabili non di base (x_1 e x_2) sono

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Quindi questi coefficienti negativi indicano che la BFS corrente ($\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$) non è ottimale.

Iterazione 1.

La variabile che entra in base è x_2 poichè -5 è in valore assoluto più grande di -3 . Eseguendo soltanto il prodotto per la parte di interesse della matrice, i coefficienti di x_2 in ogni equazione, eccetto l'equazione (0), risultano

$$B^{-1} A = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 2 \\ * & 2 \end{bmatrix},$$

e i termini noti di queste equazioni sono dati dal valore delle componenti di $\mathbf{x}_B$ del passo di inizializzazione. Quindi il test del minimo rapporto indica come variabile che deve uscire x_4 (poichè risulta $12/2 < 18/2$).

Prendendo i dati dall'esempio del paragrafo precedente si hanno le matrici B e B^{-1} :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed i vettori $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{c}_B$:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi x_2 ha sostituito x_4 in $\mathbf{x}_B$, ha fornito un elemento di $\mathbf{c}_B$ da $[3, 5, 0, 0, 0]$ e una colonna da $[A, I]$ in B .

Test di ottimalità.

Le variabili non di base sono x_1 e x_4 , i loro coefficienti nell'equazione (0) sono:

Per x_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per x_4 :

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 5/2 & * \end{bmatrix}.$$

Poichè x_1 ha coefficiente negativo, la BFS corrente non è ottima, quindi si procede con la prossima iterazione.

Iterazione 2.

La variabile fuori base x_1 con coefficiente negativo nell'equazione (0) è la variabile che entra in base. I coefficienti di x_1 nelle altre equazioni sono:

$$B^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & * \\ 3 & * \end{bmatrix}.$$

Usando il vettore $\mathbf{x}_B$ ottenuto alla fine della precedente iterazione, il test del minimo rapporto indica x_5 come variabile uscente dalla base ($6/3 < 4/1$).

Dall'iterazione 2 del precedente esempio ricaviamo le matrici B e B^{-1} :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ed i vettori $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{c}_B$:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi x_1 ha sostituito x_5 in $\mathbf{x}_B$, ha fornito un elemento di $\mathbf{c}_B$ da $[3, 5, 0, 0, 0]$ e una colonna da $[A, I]$ in B .

Test di ottimalità.

Le variabili non di base sono x_4 e x_5 , i loro coefficienti nell'equazione (0) sono:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poichè nessun coefficiente è negativo la BFS corrente $\mathbf{x}_B = [2, 6, 2, 0, 0]^T$ è ottima.

Esempio 3.7.1 *Applicare il metodo del simplesso in forma matriciale al seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Inizializzazione:

Definiamo la matrice ed il vettore delle equazioni vincolari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice delle equazioni vincolari in forma aumentata

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed il vettore dei costi

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Inizializziamo i vettori delle variabili in base e quelle non in base, ricordando che all'inizio della procedura le prime sono le variabili slack, mentre le altre sono le variabili decisionali del problema assegnato:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice di base iniziale è costituita dalle colonne 4 e 5 di $[A, I]$, quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1},$$

ed il vettore dei costi delle variabili in base

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo il valore delle variabili in base (in questo caso il calcolo è banale):

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo anche valore della funzione obiettivo Z :

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 0.$$

Test di ottimalità:

Calcoliamo il vettore aggiornato dei costi, poichè tutte le variabili decisionali sono fuori base usiamo solo la seguente formula

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poichè almeno un costo è negativo allora la BFS corrente non è soluzione ottima, inoltre il costo negativo più piccolo è -3 , associato alla terza variabile

non in base allora entra in base x_3 .

Iterazione 1:

Per determinare la variabile uscente dobbiamo calcolare gli elementi della terza colonna della matrice $B^{-1}A$ e calcolare i rapporti tra le componenti di $\mathbf{b}$ e gli elementi della suddetta colonna:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & 2 \\ * & * & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 2 \\ * & * & 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow 2/2 \\ \longrightarrow 1/2 \end{array}$$

La variabile uscente è la seconda variabile in base, ovvero x_5 .

Aggiorniamo i vettori delle variabili in base e fuori base:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Aggiorniamo la matrice di base iniziale costituita ora dalle colonne 4 e 3 di $[A, I]$, quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

e calcoliamo la matrice inversa¹ B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Aggiorniamo il vettore $\mathbf{x}_B$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

¹Assegnata la matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ed il valore di Z ;

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = 3/2.$$

Test di ottimalità:

Calcoliamo il vettore aggiornato dei costi relativo a tutte le variabili decisionali:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il vettore aggiornato dei costi relativo alle variabili slack:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Poichè uno dei costi aggiornati è negativo, la BFS corrente non è ottima. Entra in base la variabile x_2 .

Iterazione 2:

Per determinare la variabile uscente dobbiamo calcolare la seconda colonna della matrice $B^{-1}A$:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 2 & * \\ * & 1/2 & * \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow (1/2) = 1/2 \\ \longrightarrow (1/2)/(1/2) = 2 \end{array}.$$

Esce la prima variabile del vettore $\mathbf{x}_B$ ovvero x_4 . Aggiorniamo i vettori delle variabili in base e fuori base:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Aggiorniamo la matrice di base iniziale costituita ora dalle colonne 2 e 3 di $[A, I]$, quindi

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e calcoliamo la matrice inversa B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Aggiorniamo il vettore $\mathbf{x}_B$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

ed il valore di Z ;

$$Z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = 7/4.$$

Test di ottimalità:

Calcoliamo il vettore aggiornato dei costi relativo a tutte le variabili decisionali:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il vettore aggiornato dei costi relativo alle variabili slack:

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Poichè non c'è nessun costo negativo, allora la soluzione trovata è quella ottima.

3.8 Il Metodo del Simplexso Rivisitato

Dalle relazioni descritte per il metodo del simplexso in forma matriciale appare evidente che, ad ogni passo, per determinare tutti gli elementi del tableau del metodo del simplexso, è necessario determinare la matrice B^{-1} , mentre un'altra osservazione è che il calcolo delle quantità necessarie richiede solo prodotti tra vettori. In quest'ultima parte del paragrafo riassumiamo i passi del metodo del simplexso rivisitato e determiniamo le formule per calcolare

in modo efficiente l'inversa della matrice B che, ad ogni passo non varia di molto. Il metodo del simplesso prevede i seguenti passi:

1. **Inizializzazione:** Uguaie al metodo del simplesso originario;

2.1 **Passo 1:** Determinare la variabile entrante come nel metodo del simplesso originario;

2.2 **Passo 2:** Determinare la variabile di base uscente in modo analogo al metodo del simplesso originario ma calcolando solo i valori strettamente necessari, cioè i coefficienti strettamente positivi delle equazioni relativi alla variabile entrante per tutte le equazioni, tranne la (0), ed i relativi termini noti;

2.3 **Passo 3:** Determinare la nuova BFS calcolando B^{-1} e ponendo $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$.

3. **Test di ottimalità:** Analogo al metodo del simplesso originario solo che si devono calcolare i coefficienti dell'equazione (0) relativi alle variabili non in base.

Il calcolo della matrice B^{-1} può essere effettuato evitando la valutazione numerica diretta della matrice inversa ma sfruttando il fatto che la matrice B cambia di poco rispetto all'iterazione precedente, perciò la nuova B^{-1} , che indichiamo con B_{new}^{-1} , può essere determinata cambiando di poco la matrice inversa precedente, che indichiamo con B_{old}^{-1} . Per descrivere meglio tale variazione supponiamo che x_k sia la variabile entrante in base, a_{ik} è il coefficiente di x_k nella i -esima equazione, per $i = 1, \dots, m$, e sia r il numero dell'equazione che contiene la variabile di base uscente.

Il nuovo insieme di equazioni, tranne l'equazione (0), può essere ottenuto dividendo la r -esima equazione per a_{rk} e sottraendo dalla i -esima equazione la r -esima moltiplicata per a_{ik}/a_{rk} . Gli elementi della matrice B_{new}^{-1} sono pertanto

$$(B_{\text{new}}^{-1})_{ij} = \begin{cases} (B_{\text{old}}^{-1})_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} (B_{\text{old}}^{-1})_{rj} & i \neq r \\ \frac{1}{a_{rk}} (B_{\text{old}}^{-1})_{ij} & i = r. \end{cases}$$

Queste formule possono essere scritte anche in forma matriciale:

$$B_{\text{new}}^{-1} = MB_{\text{old}}^{-1}$$

dove M è la matrice identità, eccetto la sua r -esima colonna, uguale al vettore

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix}, \quad \delta_i = \begin{cases} \frac{a_{ik}}{a_{rk}} & i \neq r \\ \frac{1}{a_{rk}} & i = r. \end{cases}$$

Facendo riferimento allo stesso esempio illustrato per il metodo del simplesso in forma matriciale e considerando alcuni passaggi invariati (scelta della variabile entrante/uscente e altre) vediamo cosa cambia considerando il metodo del simplesso rivisitato.

Iterazione 1:

Inizialmente $B^{-1} = I$, la variabile entrante in base è x_2 (quindi $k = 2$), i coefficienti di x_2 nelle equazioni (1), (2) e (3) sono $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$ e $a_{32} = 2$; la variabile uscente dalla base è x_4 e il numero dell'equazione che contiene x_4 è $r = 2$.

Per ottenere la nuova matrice B^{-1}

$$\delta = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} \\ -\frac{a_{32}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} A - \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & * \\ 3 & * \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 5/2 & * \end{bmatrix}$$

e i coefficienti di x_1 e x_4 sono, rispettivamente -3 e $5/2$. Poichè x_1 ha coefficiente negativo la soluzione non è ottima.

Iterazione 2:

Come visto in precedenza per questa iterazione la variabile che entra in base è x_1 (quindi $k = 1$), i coefficienti di x_1 nelle equazioni (1), (2) e (3) sono $a'_{11} = 1$, $a'_{21} = 0$ e $a'_{31} = 3$, la variabile che esce di base è x_5 e il numero dell'equazione che contiene x_5 è $r = 3$. Risulta quindi

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{11}}{a_{31}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{31}} \\ \frac{1}{a_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza la nuova B^{-1} è

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A questo punto non sono necessarie altre iterazioni e la procedura termina.

I vantaggi del metodo del simplesso rivisitato rispetto al metodo del simplesso originario sono diversi: un primo vantaggio è che il numero di operazioni è ridotto. Questo è vero in particolare quando la matrice A presenta moltissimi elementi uguali a zero (cosa che accade in molti problemi che si presentano in pratica). Inoltre la quantità di informazioni da memorizzare ad ogni iterazione è inferiore e consente di controllare meglio gli errori che sono inevitabilmente generati durante le operazioni aritmetiche.

3.9 Esercizi

Esercizio 3.9.1 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 \quad & -x_2 \leq 0 \\ -x_1 \quad & +x_2 \leq 4 \\ 5x_1 \quad & +2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.9.2 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 - x_2 \\ x_1 \quad & +x_2 \leq 6 \\ x_1 \quad & +x_2 \geq 2 \\ x_1 \quad & -x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.9.3 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 - x_2 \\ x_1 \quad & +x_2 \leq 8 \\ x_1 \quad & +x_2 \geq 3 \\ x_1 \quad & -x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.9.4 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 3x_2 \\ -x_1 \quad & +x_2 \leq 3 \\ x_1 \quad & +x_2 \geq 6 \\ 2x_1 \quad & -x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \quad & \geq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.9.5 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3.9.6 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 2x_1 + 4x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3.9.7 *Applicare il metodo grafico per risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ & -x_2 \leq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

(Problema illimitato).

Esercizio 3.9.8 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 10$).

Esercizio 3.9.9 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 32/3$).

Esercizio 3.9.10 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 6$).

Esercizio 3.9.11 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 29/3$).

Esercizio 3.9.12 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ & 3x_1 + 3x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 37/6$).

Esercizio 3.9.13 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 8x_1 + x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = +\infty$).

Esercizio 3.9.14 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 3x_1 + x_3 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 2$).

Esercizio 3.9.15 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ & x_1 + 4x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = +\infty$).

Esercizio 3.9.16 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 10$).

Esercizio 3.9.17 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 12$).

Esercizio 3.9.18 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 3$).

Esercizio 3.9.19 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 8x_1 + x_2 - x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 31/3$).

Esercizio 3.9.20 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 7x_1 - x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_3 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 6$).

Esercizio 3.9.21 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 9$).

Esercizio 3.9.22 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ & -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 12/5$).

Esercizio 3.9.23 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 6$).

Esercizio 3.9.24 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\min \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 52/5$).

Esercizio 3.9.25 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Problema non ammissibile).

Esercizio 3.9.26 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 12$).

Esercizio 3.9.27 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 12$).

Esercizio 3.9.28 Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 3x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 20/3$).

Esercizio 3.9.29 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 54/5$).

Esercizio 3.9.30 *Risolvere il seguente problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

(Soluzione ottima $Z = 13/3$).

Capitolo 4

Teoria della dualità

4.1 Introduzione

La teoria della dualità consente di stabilire un legame tra un problema assegnato, che prende il nome di **primale** ed un altro, detto appunto **duale**. Il vantaggio di tale aspetto risiede innanzitutto nella possibilità di approfondire gli aspetti legati all'interpretazione economica della soluzione di un problema di programmazione lineare e, in subordine, può risultare vantaggioso, dal punto di vista algoritmico, risolvere il problema duale al posto di quello primale, ottenendo comunque la soluzione ottima del problema assegnato. Vediamo innanzitutto un esempio di problema duale.

Esempio 4.1.1 *Consideriamo il seguente esempio di problema della dieta. In un allevamento si usano due tipologie di mangimi, A e B, con costi (per etto) pari a 10 centesimi per il primo e 12 centesimi per il secondo. Cento grammi di mangime devono contenere almeno 10 grammi di carboidrati, 18 grammi di proteine e 8 grammi di grassi. Nella seguente tabella sono riportati i contenuti (misurati in grammi per un etto di mangime) di carboidrati, proteine e grassi per le due tipologie di mangime:*

	Mangime A	Mangime B
Carboidrati	2	2
Proteine	4	2
Grassi	1	3

Obiettivo è quello di determinare la dieta di costo minimo che soddisfi i requisiti minimi in relazione ai contenuti di carboidrati, proteine e grassi.

Una volta definite le seguenti variabili

x_1 = quantità (in etti) di mangime A da somministrare quotidianamente

x_2 = quantità (in etti) di mangime B da somministrare quotidianamente

si ottiene il seguente modello:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

A questo problema è possibile associarne un altro che possiamo indicare come il problema del venditore di integratori alimentari per animali. In questo caso si vuole stabilire il prezzo di vendita degli integratori contenenti carboidrati, proteine e grassi. Ciascuna pillola di integratore fornisce un apporto pari ad un grammo di carboidrati, proteine e grassi. L'obiettivo del venditore di tali pillole è quello di massimizzare il ricavato della vendita fissando opportunamente i prezzi. Tali prezzi devono ovviamente essere competitivi con quelli dei mangimi utilizzati dall'allevamento. Indichiamo con y_1, y_2 e y_3 le seguenti variabili

y_1 = prezzo di vendita di una pillola di carboidrati

y_2 = prezzo di vendita di una pillola di proteine

y_3 = prezzo di vendita di una pillola di grassi.

I prezzi di vendita devono essere ovviamente non negativi.

L'allevatore deve percepire che la dieta a base di pillole di integratori sia conveniente rispetto a quella a base di mangimi, ossia dovrà risultare

$$2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 10$$

cioè il costo dell'equivalente (dal punto di vista nutrizionale) in pillole del mangime di tipo A non deve essere superiore al suo costo. Analogamente per il mangime B:

$$2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 12.$$

La funzione obiettivo indica il ricavo atteso dalla vendita, che in questo caso è

$$W = 10y_1 + 18y_2 + 8y_3$$

considerando quelli che sono i fabbisogni giornalieri di carboidrati, proteine e grassi.

In definitiva il problema viene definito dal seguente modello:

$$\begin{aligned} \max \quad & W = 10y_1 + 18y_2 + 8y_3 \\ & 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 10 \\ & 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 12 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Nell'esempio appena visto è immediato rendersi conto del fatto che, assegnato un problema di programmazione lineare è possibile associare un nuovo problema, avente una relazione con quello iniziale.

4.2 Dualità per problemi di programmazione lineare

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ sono, come abbiamo visto, i dati del problema, ed $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle variabili e Z indica il valore della funzione obiettivo. Supponiamo di voler trovare una maggiorazione per il valore ottimo Z^* (supponendo che esista), cioè un valore U tale che

$$Z^* < U.$$

Osserviamo che, dato un qualunque vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, ciascun vettore $\mathbf{x}$ che sia soluzione ammissibile del problema assegnato (P) soddisfa l'equazione

$$\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b}. \quad (4.1)$$

Inoltre, assumendo che valga la relazione

$$A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c},$$

poichè $\mathbf{x}$ è non negativo vale la disuguaglianza

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq (A^T\mathbf{y})^T \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x}.$$

Dunque, usando l'uguaglianza (4.5), si trova

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq (\mathbf{y}^T A) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (A \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}. \quad (4.2)$$

Ricapitolando, dato un qualunque vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c},$$

ogni vettore $\mathbf{x}$ ammissibile per (P) soddisfa

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

Ne segue che

$$Z^* \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y},$$

dunque il valore $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ è una maggiorazione per il valore ottimo Z^* . Se siamo alla ricerca della migliore maggiorazione (cioè quella minima) che può essere ricavata in questo modo, bisogna determinare il valore ottimo W^* del seguente problema di programmazione lineare

$$(D) \quad \begin{aligned} \min \quad & W = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Quest'ultimo problema è detto il **problema duale** di (P), che è invece chiamato **problema primale**.

Teorema 4.2.1 (Teorema della dualità debole) *Per ogni $\mathbf{x}$ soluzione ammissibile di (P) e per ogni $\mathbf{y}$ soluzione ammissibile di (D) risulta*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

Dimostrazione. Poichè $\mathbf{x} \geq 0$ ed $\mathbf{y}$ è ammissibile per (D) risulta

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq (A^T \mathbf{y})^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x},$$

ricordando che $\mathbf{x}$ è ammissibile per (P) abbiamo

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}. \quad \square$$

Dal Teorema della dualità debole segue il seguente criterio di ottimalità.

Corollario 4.2.1 *Siano $\mathbf{x}^*$ una soluzione ammissibile per (P) e $\mathbf{y}^*$ una soluzione ammissibile per (D). Se*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*,$$

allora $\mathbf{x}^$ e $\mathbf{y}^*$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.*

Dimostrazione. Applicando il Teorema della dualità debole e considerato che $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ sono ammissibili, allora per ogni $\mathbf{x}$ ammissibile per (P), risulta

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$$

da cui segue che $\mathbf{x}^*$ è soluzione ottima per (P).

In modo analogo, considerando una soluzione $\mathbf{y}$ ammissibile per (D), risulta

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*,$$

da cui segue che $\mathbf{y}$ è soluzione ottima per (D). $\square$

Corollario 4.2.2 *Se uno dei due problemi (P) e (D) è illimitato allora l'altro è inammissibile.*

Dimostrazione. Supponiamo che (P) sia illimitato. Se, per assurdo, (D) ammettesse una soluzione ammissibile $\bar{\mathbf{y}}$ allora per il Teorema della dualità debole

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{y}}$$

per ogni $\mathbf{x}$ soluzione ammissibile per (P), e quindi (P) non sarebbe illimitato.

$\square$

Un risultato fondamentale è il seguente.

Teorema 4.2.2 (Teorema della dualità forte) *Se (P) ha una soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ allora (D) ha una soluzione ottima $\mathbf{y}^*$ e risulta*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*.$$

In base ai risultati fin qui presentati se un problema di programmazione lineare ha una soluzione ottima, la migliore maggiorazione che è possibile ottenere con la tecnica del duale è il valore ottimo stesso.

4.3 Dualità, basi ottime e metodo del simplesso

Consideriamo il problema primale (P) ed il suo duale (D). Per questioni di notazione indichiamo con B una base (non necessariamente ammissibile) per il problema (P) e consideriamo la matrice dei vincoli suddivisa in A_B , composta dalle colonne della matrice dei vincoli relative alle base B , e A_N , le restanti colonne relative alle variabili non in base (che non appartengono alla base B). La soluzione di base di (P) associata a B è il vettore $\bar{\mathbf{x}}$ definito da

$$\bar{\mathbf{x}}_N = 0, \quad \bar{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1} \mathbf{b}.$$

Definiamo

$$\bar{\mathbf{y}} = A_B^{-T} \mathbf{c}_B,$$

dove A_B^{-T} è

$$A_B^{-T} = (A_B^{-1})^T = (A_B^T)^{-1}.$$

Notiamo che

$$\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} \mathbf{b} = (A_B^{-T} \mathbf{c}_B)^T \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{y}}.$$

Pertanto, se $\bar{\mathbf{x}}$ è ammissibile per (P) e $\bar{\mathbf{y}}$ è ammissibile per (D), allora, per il Corollario 4.2.1, $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi.

Cerchiamo dunque di capire quando $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sono soluzioni ammissibili per i problemi (P) e (D) rispettivamente. Il vettore $\bar{\mathbf{x}}$ è ammissibile per il problema primale se e solo se

$$\bar{\mathbf{b}} = A_B^{-1} \mathbf{b} \geq 0.$$

Osserviamo che questa condizione è sempre verificata durante l'esecuzione del metodo del simplesso. Il vettore $\bar{\mathbf{y}}$, invece, è ammissibile per il duale se e solo se

$$A^T \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{c},$$

cioè se e solo se

$$A_B^T \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{c}_B \tag{4.3}$$

e

$$A_N^T \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{c}_N. \tag{4.4}$$

Poichè

$$A_B^T \bar{\mathbf{y}} = A_B^T A_B^{-T} \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B,$$

la condizione (4.3) è sempre verificata. Dunque $\bar{\mathbf{y}}$ è ammissibile se e solo se

$$A_N^T A_B^{-T} \mathbf{c}_B \geq \mathbf{c}_N,$$

cioè se e solo se

$$\mathbf{c}_N - A_N^T A_B^{-1} \mathbf{c}_B \leq 0.$$

Si può notare che il primo membro di quest'ultima disequazione è precisamente il vettore dei cosiddetti costi ridotti (cioè i coefficienti delle variabili non in base nella funzione obiettivo) delle variabili non in base relativo alla base B . Pertanto possiamo affermare che $\bar{\mathbf{y}}$ è ammissibile se e solo se

$$\mathbf{c}_N \leq 0.$$

Si noti che questa è esattamente la condizione che si verifica quando il metodo del simplesso termina con una soluzione ottima.

Ricapitolando, $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sono ammissibili per i rispettivi problemi se e solo se $\bar{\mathbf{b}} \geq 0$ e $\bar{\mathbf{c}}_N \leq 0$. Inoltre, come osservato sopra, se $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sono ammissibili allora sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi. Possiamo dunque affermare che, quando il metodo del simplesso termina con una soluzione ottima di base $\bar{\mathbf{x}}$ ed una base B che determina tale soluzione, il vettore

$$\bar{\mathbf{y}} = A_B^{-T} \mathbf{c}_B$$

è una soluzione ottima del problema duale.

Data una base B per il problema (P), B è detta una base ammissibile nel primale se

$$\bar{\mathbf{b}} = A_B^{-1} \mathbf{b} \geq 0,$$

cioè se $\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione ammissibile per il problema primale (P). La base B è detta **una base ammissibile nel duale** se

$$\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - A_N^T A_B^{-T} \mathbf{c}_B \leq 0,$$

cioè se $\bar{\mathbf{y}}$ è ammissibile per il problema duale (D). Quanto visto sopra mostra che se B è una base ammissibile sia nel primale che nel duale, allora i corrispondenti vettori $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi. Per questo motivo, B è detta una **base ottima** se è ammissibile sia nel primale che nel duale.

Dunque, se (P) ha soluzione ottima, allora il metodo del simplesso mantiene una base ammissibile nel primale ad ogni iterazione e termina quando raggiunge una base ammissibile anche nel duale, cioè quando arriva ad una base ottima.

4.4 Altre forme di dualità

Se consideriamo il problema in forma standard

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Cerchiamo anche in questo caso una maggiorazione per il valore ottimo Z^* . Dato un qualunque vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, tale che $\mathbf{y} \geq 0$, ogni vettore $\mathbf{x}$ che sia soluzione ammissibile del problema assegnato (P) soddisfa la disequazione

$$\mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b}. \quad (4.5)$$

Inoltre, se vale la relazione

$$A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c},$$

poichè $\mathbf{x}$ è non negativo vale la disuguaglianza

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x}.$$

Dunque si ottiene

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

Ricapitolando, dato un qualunque vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0$$

ogni vettore $\mathbf{x}$ ammissibile per (P) soddisfa

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

Ne segue che

$$Z^* \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y},$$

dunque il valore $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ è una maggiorazione per il valore ottimo Z^* . La migliore maggiorazione che è possibile trovare è il valore ottimo W^* del seguente problema di programmazione lineare

$$(D) \quad \begin{aligned} \min \quad & W = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ & A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

che è detto **problema duale** di (P).

Il seguente risultato consente di stabilire una relazione di tipo ciclico, tra problema primale e duale.

Teorema 4.4.1 *Il duale del problema duale è il problema primale.*

Dimostrazione. Il problema (D) possiamo scriverlo nel seguente modo equivalente

$$\begin{aligned} \max \quad & -W = -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & -A^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned}$$

il cui problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & -Z = -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & -A\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

che è equivalente al problema (P). $\square$

In quest'ultima parte del paragrafo ricapitoliamo le relazioni tra problema duale e primale che si possono presentare e che sono riassunte nella seguente tabella.

Primale/Duale	(D) Ottimo finito	(D) Illimitato	(D) Inammissibile
(P) Ottimo finito	SI	NO	NO
(P) Illimitato	NO	NO	SI
(P) Inammissibile	NO	SI	SI

La prima riga e la prima colonna della tabella sono una conseguenza del Teorema della dualità debole. Applicando i relativi corollari si ottengono i due casi in cui uno dei problemi è illimitato e l'altro risulta inammissibile e viene esclusa la possibilità che entrambi siano illimitati.

Rinunciando a voler esaminare in modo dettagliato tutti i casi che si presentano nella trasformazione primale-duale, riassumiamo nella seguente tabella le regole di trasformazione primale-duale. La tabella può essere letta sia da sinistra a destra che viceversa.

Primale	Duale
$\max Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\min W = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
Vincolo i -esimo di tipo $\leq$	Variabile $y_i \geq 0$
Vincolo i -esimo di tipo $=$	Variabile y_i libera
Vincolo i -esimo di tipo $\geq$	Variabile $y_i \leq 0$
Variabile $x_i \geq 0$	Vincolo i -esimo di tipo ≥ 0
Variabile x_i libera	Vincolo i -esimo di tipo $=$
Variabile $x_i \leq 0$	Vincolo i -esimo di tipo ≤ 0

Esempio 4.4.1 *Determinare il duale del seguente problema primale:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_2 \geq 0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il problema duale è un problema di minimo, ha 4 variabili decisionali, 3 vincoli dei quali il primo e il terzo sono di uguaglianza (le variabili x_1 e x_3 sono libere), mentre il secondo è di tipo $\geq$. Sulle 4 variabili decisionali abbiamo vincoli di non negatività.

$$\begin{aligned} \min \quad & W = 8y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 6y_4 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 4 \\ & 2y_1 + 4y_3 + y_4 \geq 3 \\ & 3y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Esempio 4.4.2 ((P) e (D) inammissibili) *Consideriamo il seguente problema primale*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 = 1 \\ & -x_1 + x_2 = 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

In base alla tabella vista il problema duale è il seguente

$$\begin{aligned} \min \quad & W = y_1 \\ & -y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \text{ libere}. \end{aligned}$$

Entrambi i problemi risultano chiaramente inammissibili.

Esempio 4.4.3 ((P) illimitato e (D) inammissibile) *Consideriamo il seguente problema primale*

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

In base alla tabella vista il problema duale è il seguente

$$\begin{aligned} \max \quad & W = y_1 + y_2 \\ & -y_2 \leq -1 \\ & y_1 - y_2 \leq 1 \\ & -2y_1 + y_2 \leq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Il problema duale risulta illimitato (si può verificarlo graficamente) e quindi il primale è inammissibile.

4.5 Dualità forte e scarti complementari

Infine, come visto nell'esempio 4.4.2, entrambi i problemi, primale e duale, possono essere inammissibili.

Il seguente risultato, che enunciamo senza dimostrazione, è utile per ricavare la soluzione ottima del duale conoscendo la soluzione ottima del primale.

Teorema 4.5.1 (Teorema degli scarti complementari) *Una soluzione $\mathbf{x}$ ammissibile per (P) e una soluzione $\mathbf{y}$ per (D) sono ottime se e solo se valgono le seguenti condizioni di scarto complementare:*

$$(c_i - A_i^T \mathbf{y})x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.6)$$

$$(\mathbf{a}_j \mathbf{x} - b_j)y_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Nell'enunciato del precedente teorema $\mathbf{a}_j$ è la j -esima riga della matrice A e A_i è la i -esima colonna della matrice A .

Esempio 4.5.1 *Assegnato il problema di programmazione lineare*

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

stabilire, applicando il teorema degli scarti complementari, se $\mathbf{x} = [0, 0, 2, 3/2]$ è soluzione ottima.

Innanzitutto scriviamo il duale del problema assegnato:

$$\begin{aligned} \max \quad & W = 2y_1 + 5y_2 \\ & y_1 + y_2 \leq 3 \\ & -y_1 \leq 4 \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \\ & 2y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La matrice A è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono

$$\mathbf{b}^T = [2 \quad 5]; \quad \mathbf{c}^T = [3 \quad 4 \quad 1 \quad 1]$$

Le equazioni degli scarti complementari sono

$$(\mathbf{a}_j \mathbf{x} - b_j)y_j = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

ovvero

$$\begin{aligned} (3 - y_1 - y_2)x_1 &= 0 \\ (4 + y_1)x_2 &= 0 \\ (1 - y_1 - y_2)x_3 &= 0 \\ (1 - 2y_2)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo la soluzione assegnata si verifica banalmente che le prime due relazioni sono verificate mentre le altre due danno luogo al seguente sistema

$$\begin{cases} 1 - y_1 - y_2 = 0 \\ 1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione $y_1 = y_2 = 1/2$. Sostituendo tali valori nei vincoli del problema duale si scopre che tale soluzione risulta essere ammissibile perciò, applicando il teorema degli scarti complementari la soluzione assegnata è effettivamente soluzione ottima del primale e $\mathbf{y} = [1/2, 1/2]$ è soluzione ottima del duale.

4.5.1 Il metodo del simplesso duale

Come visto in precedenza il metodo del simplesso mantiene, ad ogni iterazione, una base ammissibile nel primale, che però non è ammissibile nel duale (con l'eccezione dell'ultima iterazione, in cui, se il problema ha soluzione ottima, la soluzione primale e quella duale associate alla base corrente sono entrambe ammissibili per i rispettivi problemi). Ad ogni iterazione viene determinata una nuova base ammissibile nel primale tale che il valore della funzione obiettivo della soluzione associata sia maggiore o uguale al valore della soluzione precedente. Si ricordi anche che il metodo del simplesso può essere avviato solo quando è nota una base ammissibile primale, che può essere eventualmente determinata tramite la Fase I se il problema da risolvere si presenta in forma non standard. In certe situazioni è immediatamente disponibile una base ammissibile del duale piuttosto che del primale. In tal caso, invece di applicare la Fase I e poi la Fase II, è possibile utilizzare direttamente il metodo del simplesso duale: tale procedura, partendo da una base ammissibile nel duale (ovvero una base per la quale i costi ridotti siano non positivi), ad ogni iterazione cerca una nuova base ammissibile nel duale la cui soluzione di base associata abbia costo minore o uguale della precedente. L'algoritmo termina quando viene trovata una base che sia ammissibile anche nel primale: per quanto osservato in precedenza, sappiamo infatti che una tale base è ottima. Al termine della procedura avremo dunque una soluzione ottima per il primale e una per il duale.

Ad ogni iterazione del metodo del simplesso il tableau presenta la seguente struttura (in realtà semplificata poichè le colonne della matrice identità possono trovarsi in una qualsiasi posizione della tabella e non necessariamente nelle ultime colonne tranne in quello iniziale):

(0)	± 1	$\bar{c}_1$ $\bar{c}_2$ $\bar{c}_n$	0 0 . . . 0	$\bar{Z}$
(1)	0			$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	Matrice $\bar{A}$	Matrice I	$\bar{b}_i$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
(m)	0			$\bar{b}_m$

Considerate le relazioni che sussistono tra i problemi primale e duale, lo stesso tableau può essere associato ad entrambi i problemi invertendo l'interpretazione delle righe e delle colonne.

Questo significa che gli elementi della colonna dei termini noti sono:

- sia i valori assunti dalle variabili in base nel problema primale
- che i coefficienti della funzione obiettivo del problema duale (ovvero gli elementi dell'equazione (0)).

Inoltre i coefficienti dell'equazione (0) del suddetto tableau sono:

- i coefficienti della funzione obiettivo del problema primale;
- i valori assunti dalle variabili in base nel problema duale.

Quando sia i termini noti $\bar{b}_i$ che i coefficienti $\bar{c}_i$ risultino tutti non negativi allora si è in presenza di una soluzione che è contemporaneamente ammissibile sia per il problema primale che per il problema duale e quindi la soluzione è ottima per entrambi.

Se invece, una volta reso il problema in forma canonica, si osserva che è nota una soluzione ammissibile per il duale ma non per il primale (ovvero tutti i coefficienti dell'equazione (0) sono non negativi e invece qualche termine noto non lo è), allora si può pensare di risolvere il problema applicando il metodo del simplesso ma invertendo le operazioni tra righe e colonne.

Tale metodo prende appunto il nome di **Metodo del simplesso duale**.

Consideriamo ora un problema di programmazione lineare con le seguenti caratteristiche:

1. Non sono presenti vincoli di uguaglianza ma solo di tipo $\geq$ o $\leq$;
2. Il problema viene reso in forma canonica aggiungendo variabili slack o surplus;
3. Nell'equazione (0) tutti i coefficienti sono non negativi.

Dati una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ di rango m e vettori $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, si consideri il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

il cui duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & W = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Sia $B = k_1, k_2, \dots, k_m$ una base ammissibile nel duale. Il problema in forma tableau rispetto a tale base è il seguente:

$$-Z \quad -\bar{\mathbf{c}}_N \mathbf{x}_N = \bar{Z}$$

$$\mathbf{x}_B + \bar{A}_N \mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{x} \geq 0.$$

Poichè B è ammissibile per il duale, $c_j \leq 0$ per ogni $j \in N$, dove N è l'insieme degli indici relativi alle variabili non in base. Ricordiamo che la soluzione duale associata alla base B è

$$\bar{\mathbf{y}} = A_B^{-T} \mathbf{c}_B$$

e che il valore di tale soluzione è

$$\bar{W} = \mathbf{c}_B^T A_B^{-1} \mathbf{b}.$$

La soluzione primale associata alla base B è invece il vettore $\bar{\mathbf{x}}$ definito da

$$\bar{x}_{k_i} = \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\bar{\mathbf{x}}_N = 0.$$

Se $\bar{b}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$, allora $\bar{\mathbf{x}}$ è ammissibile e quindi B è una base ammissibile anche per il primale e dunque è ottima e anche $\bar{\mathbf{x}}$ è una soluzione ottima ed il problema è risolto.

Supponiamo dunque che esista $h \in \{1, \dots, m\}$ tale che $\bar{b}_h < 0$.

Vogliamo far uscire di base la variabile x_{k_h} e dobbiamo selezionare la variabile entrante in modo da ottenere una nuova base ammissibile nel duale. Abbiamo due casi.

Caso 1: $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j \in N$.

Ogni soluzione ammissibile $\mathbf{x}$ per il primale soddisfa l' h -esimo vincolo del primale, cioè

$$x_{i_h} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h.$$

Poichè $\mathbf{x} \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j \in N$, avremo

$$x_{i_h} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j \geq 0$$

e dunque $\bar{b}_h \geq 0$, che contraddice la scelta $\bar{b}_h < 0$.

In tal caso il problema primale non ha soluzioni ammissibili e abbiamo terminato.

Caso 2: Esiste un indice $j \in N$ tale che $\bar{a}_{hj} < 0$.

Vogliamo determinare un indice $k \in N$ tale che la base

$$B' = B \cup \{k\} \setminus \{i_h\}$$

rimanga ammissibile nel duale. È possibile verificare che, scegliendo $k \in N$ tale che

$$\bar{a}_{hk} < 0$$

e

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}} : j \in N, \bar{a}_{hj} < 0 \right\},$$

si ottiene che B' è una base ammissibile per il duale (i calcoli e la verifica di tale proprietà non sono un risultato immediato e quindi qui sono omessi).

Ricapitoliamo di seguito quali sono i passi richiesti dal metodo del simplesso duale.

Passo 1 Verifica di ottimalità:

Se

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

allora la BFS corrente è ottima, quindi STOP altrimenti si va al Passo 2.

Passo 2 Scelta della riga pivot.

Si sceglie la riga h tale che

$$b_h = \min_i \{b_i\} < 0.$$

Per la scelta di h si può applicare la regola di Bland (ovvero la prima riga dall'alto se il minimo è raggiunto su più righe).

Passo 3 Verifica di illimitatezza del duale.

Se

$$a_{hj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

allora il duale è illimitato (e di conseguenza il primale è inammissibile) quindi STOP altrimenti si va al Passo 4.

Passo 4 Scelta della colonna pivot.

Si sceglie la colonna k tale che

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} = \max \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}} : j \in N, \bar{a}_{hj} < 0 \right\}.$$

Poichè i quozienti sono negativi, si determina il più piccolo in valore assoluto.

Nel caso il minimo sia raggiunto in più colonne si sceglie, per convenzione, quella con l'indice più piccolo (sempre applicando la regola di Bland).

Passo 5 Operazione di pivot.

Si esegua l'operazione di pivot su a_{kh} e si torna al Passo 1.

Osservazione. I coefficienti $\bar{c}_i$ sono quelli che sono memorizzati nella prima riga del tableau e che sono tutti positivi in quanto sono l'opposto dei coefficienti delle variabili non in base nella funzione obiettivo (e che sono negativi in virtù dell'ammissibilità della BFS corrente).

Esempio 4.5.2 *Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\min Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto riscriviamo la funzione obiettivo come problema di massimo e introduciamo le variabili surplus:

$$\max -Z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo porre il problema in forma canonica moltiplicando per -1 le equazioni vincolari, pertanto il sistema da risolvere è

$$\begin{array}{llllll} (0) & -Z & +x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ (1) & & -x_1 & & +x_3 & = & -2 \\ (2) & & x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & -3 \end{array}$$

Scriviamo il tableau iniziale:

Iterazione 0							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	-1	1	1	0	0	0
x_3	(1)	0	-1	0	1	0	-2
x_4	(2)	0	1	-2	0	1	-3

È uscita dalla base x_4 che aveva il valore negativo più piccolo, mentre è entrata in base x_2 che presentava l'unico coefficiente negativo nell'equazione (2). Si esegue un'operazione di pivoting sull'elemento -2 e si procede in modo analogo con la successiva iterazione.

Iterazione 1							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	-1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_3	(1)	0	-1	0	1	0	-2
x_2	(2)	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Iterazione 2							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	-1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$
x_1	(1)	0	1	0	-1	0	2
x_2	(2)	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

Non ci sono coefficienti negativi nella colonna dei termini noti quindi abbiamo trovato la soluzione ottima $(2, 5/2, 0, 0)$ in cui

$$Z = 9/2.$$

Esempio 4.5.3 Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto riscriviamo il problema in forma aumentata introducendo le variabili surplus:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo porre il problema in forma canonica moltiplicando per -1 le equazioni vincolari, pertanto il sistema da risolvere è

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & +3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & & = & 0 \\ (1) & & -2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -2 \\ (2) & & -x_1 & -5x_2 & -4x_3 & & +x_5 & = & -3 \end{array}$$

Scriviamo il tableau iniziale:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	3	4	6	0	0	0
x_4	(1)	0	-2	-4	1	1	0	-2
x_5	(2)	0	-1	-5	-4	0	1	-3

È uscita dalla base x_5 che aveva il valore negativo più piccolo, mentre per determinare la variabile entrante si è calcolato il

$$\max \left\{ \frac{3}{-1}, \frac{4}{-5}, \frac{6}{-4} \right\} = -\frac{4}{5}$$

quindi è entrata la variabile x_2 .

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$
x_4	(1)	0	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{21}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	(2)	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Non ci sono coefficienti negativi nella colonna dei termini noti quindi abbiamo trovato la soluzione ottima $(0, 3/5, 0, 2/5, 0)$ in cui

$$Z = -\frac{12}{5}.$$

Esempio 4.5.4 *Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\min Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -2 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Innanzitutto riscriviamo la funzione obiettivo come problema di massimo e introduciamo due variabile slack:

$$\max -Z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{aligned} (0) \quad -Z + x_1 + x_2 &= 0 \\ (1) \quad -x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ (2) \quad 2x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Scriviamo il tableau iniziale:

Iterazione 0							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	-1	1	1	0	0	0
x_3	(1)	0	-1	1	1	0	-2
x_4	(2)	0	2	-1	0	1	1

Iterazione 1							
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
Z	(0)	-1	0	2	1	0	-2
x_1	(1)	0	1	-1	-1	0	2
x_4	(2)	0	0	1	2	1	-3

Il problema è inammissibile poichè nell'ultima colonna è presente un coefficiente negativo ma nella corrispondente riga non c'è alcun elemento negativo.

Esempio 4.5.5 Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:

$$\min Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Innanzitutto riscriviamo la funzione obiettivo come problema di massimo e introduciamo due variabili surplus ed una slack:

$$\max -Z = -\frac{1}{2}x_1 - x_2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Moltiplichiamo per -1 le prime due equazioni vincolari, cosicchè il sistema da risolvere è

$$\begin{array}{rcccccccl}
 (0) & -Z & +\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & & & & = & 0 \\
 (1) & & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & -2 \\
 (2) & & -x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = & -2 \\
 (3) & & & x_2 & & & +x_5 & = & 2
 \end{array}$$

Il tableau iniziale del metodo del simplesso duale è il seguente

Tableau iniziale								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0
x_3	(1)	0	-1	1	1	0	0	-2
x_4	(2)	0	-1	-1	0	1	0	-2
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	2

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
x_1	(1)	0	1	-1	-1	0	0	2
x_4	(2)	0	0	-2	-1	1	0	0
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	2

Non ci sono coefficienti negativi nella colonna dei termini noti quindi abbiamo trovato la soluzione ottima $(2, 0, 0, 0, 2)$ in cui

$$Z = 1.$$

Esempio 4.5.6 Applicare il metodo del sempliceo duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Innanzitutto riscriviamo la funzione obiettivo come problema di massimo e introduciamo le variabili surplus:

$$\max -Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Dobbiamo porre il problema in forma canonica moltiplicando per -1 le equazioni vincolari, pertanto il sistema da risolvere è

$$(0) \quad -Z + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$$

$$(1) \quad -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -6$$

$$(2) \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -5$$

Scriviamo il tableau iniziale:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	3	4	5	0	0	0
x_4	(1)	0	-2	-2	-1	1	0	-6
x_5	(2)	0	-1	-2	-3	0	1	-5
Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-9
x_1	(1)	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
x_5	(2)	0	0	-1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	-1	0	0	1	1	1	-11
x_1	(1)	0	1	0	-2	-1	1	1
x_2	(2)	0	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	2

La soluzione ottima è $(1, 2, 0, 0, 0)$ con valore $Z = 11$.

Osservazione. Come detto in precedenza il metodo del simplesso duale può essere applicato in alternativa al metodo del simplesso a due fasi in alcuni casi specifici, soprattutto quando il problema da risolvere è la minimizzazione di una funzione obiettivo e sono presenti vincoli di tipo $\geq$. L'applicazione sembrerebbe preclusa nel caso fosse presente un vincolo di uguaglianza. In realtà in questo caso si potrebbe sostituire il vincolo di uguaglianza

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i$$

con i seguenti due vincoli

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}x_n \leq b_i$$

equivalenti a quello assegnato ed applicare il metodo del simplesso duale. Appare chiaro però che in questo caso aumenterebbe il numero di variabili del problema e quindi la sua complessità.

Esempio 4.5.7 *Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema di programmazione lineare in forma non standard:*

$$\max Z = -x_1 - x_2$$

$$x_1 + 3x_2 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Innanzitutto riscriviamo il vincolo di uguaglianza sotto forma di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Scriviamo il problema in forma aumentata inserendo due variabili surplus (nel primo e terzo vincolo) ed una variabile slack nel secondo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Per porre il problema in forma canonica moltiplichiamo per -1 la prima e terza equazione, pertanto il sistema da risolvere è

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & +x_1 & +x_2 & & & & = & 0 \\ (1) & & -x_1 & -3x_2 & +x_3 & & & = & -5 \\ (2) & & x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = & 5 \\ (3) & & -3x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & +x_5 & = & -1 \end{array}$$

Scriviamo il tableau iniziale:

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	1	1	0	0	0	0
x_3	(1)	0	-1	-3	1	0	0	-5
x_4	(2)	0	1	3	0	1	0	5
x_5	(3)	0	-3	-2	0	0	1	-1

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$
x_2	(1)	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
x_4	(2)	0	0	0	1	1	0	0
x_5	(3)	0	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$

4.6 Analisi di sensitività e postottimale

I problemi di programmazione lineare sono la formulazione matematica di problemi che si presentano nella vita reale e richiedono un'opportuna sperimentazione per poter definire un modello finale del problema che tenga conto correttamente di tutti i parametri e che fornisca, una volta risolto, la soluzione ottima del caso reale. Durante tale sperimentazione sarà necessario risolvere un problema, valutare i risultati, verificare l'aderenza di questi alla realtà, modificare opportunamente il modello e ripetere lo stesso procedimento finché i risultati sono quelli attesi. Appare chiaro che tale processo richiede la risoluzione di una serie di problemi matematici che spesso hanno dimensioni molto elevate e sono molto simili tra loro. Pertanto risulta molto conveniente valutare, spesso a posteriori, come varia la soluzione di un problema di programmazione lineare al variare di qualche parametro. Le cause che richiedono tale analisi a posteriori possono essere, tra le altre, le seguenti:

1. Debugging del modello (cioè trovare eventuali debolezze o errori nel modello);
2. Validazione del modello (cioè verificare se i risultati sono aderenti alla realtà);
3. Decisioni del management sull'allocazione delle risorse (prezzi ombra);
4. Valutazione delle stime dei parametri del modello.

Un approccio molto utilizzato per affrontare questi problemi è quello della cosiddetta **Riottimizzazione**, che consiste nel dedurre come le variazioni nella

definizione del modello influenzano il risultato ottenuto. Se si risolve il problema di programmazione lineare utilizzando il metodo del simplesso allora si può cercare di dedurre la variazione nella soluzione ottima studiando il tableau finale oppure utilizzando la soluzione ottima del modello precedente come BFS iniziale per quello modificato (purchè risulti ancora ammissibile). Un classico problema di programmazione lineare prevede la risoluzione del problema di massimo

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

che può essere interpretato come la volontà di rendere massimo il profitto Z , in funzione delle quantità x_i (n è il numero di merci che vengono prodotte ed x_i è la quantità prodotta, mentre c_i è il profitto della singola unità di merce prodotta). Ovviamente le quantità prodotte devono essere vincolate alle risorse disponibili. Le risorse sono m e, per ognuna di queste, vale il seguente vincolo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

in cui b_i rappresenta la disponibilità della i -esima risorsa: per esempio se tale risorsa è una fabbrica oppure il reparto di un'azienda allora b_i può essere il tempo che il management aziendale destina affinché questa risorsa produca ed i valori a_{ij} sono il tempo che tale risorsa usa per produrre la j -esima merce. I valori dei parametri appena indicati potrebbero essere soggetti a variazioni poichè potrebbe essere scopo dell'azienda quello di valutare l'opportunità di modificare il loro valore e valutare il conseguente tasso di variazione del profitto.

4.6.1 Analisi di sensitività

Supponiamo assegnato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

e che ammetta soluzione ottima $\mathbf{x}^*$ tale che

$$Z^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B^*$$

dove, al solito, $\mathbf{x}_B$ rappresenta il vettore delle variabili in base e $\mathbf{c}_B$ il vettore dei costi associati alle variabili in base. Ci poniamo due quesiti:

1. Di quanto varia la funzione obiettivo se c_j varia della quantità Δc_j , supponendo che tale variazione lasci invariati gli indici delle variabili in base?

Indichiamo con $\mathbf{e}_j$ il j -esimo versore fondamentale di $\mathbb{R}^n$ e indichiamo con $Z^*(\mathbf{c} + \Delta c_j \mathbf{e}_j)$ il valore della funzione obiettivo in corrispondenza dei nuovi costi. Allora risulta

$$\begin{aligned} Z^*(\mathbf{c} + \Delta c_j \mathbf{e}_j) &= (\mathbf{c} + \Delta c_j \mathbf{e}_j)^T \mathbf{x}_B^* \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_B^* + (\Delta c_j \mathbf{e}_j)^T \mathbf{x}_B^* = \begin{cases} Z^* & \text{se } x_j \text{ non è in base} \\ Z^* + \Delta c_j x_j & \text{se } x_j \text{ è in base.} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi se indichiamo con ΔZ la variazione della funzione obiettivo è data da

$$\Delta Z^* = Z^*(\mathbf{c} + \Delta c_j \mathbf{e}_j) - Z^* = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j \text{ non è in base} \\ \Delta c_j x_j & \text{se } x_j \text{ è in base.} \end{cases}$$

Considerando il problema dal punto di vista economico l'interpretazione è ovvia: se un bene non viene prodotto allora il valore della funzione obiettivo non è influenzata dal suo prezzo.

2. Di quanto varia la funzione obiettivo se b_i varia della quantità Δb_i , supponendo che tale variazione lasci invariati gli indici delle variabili in base?

Affrontiamo questa questione nella prossima sezione, con un esempio.

4.6.2 Prezzi ombra

A questo scopo consideriamo ora il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ & 20x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ & 10x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & \quad \quad x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Risolviamo ora il problema applicando il metodo del simplesso. Introduciamo tre variabili slack (una per ogni vincolo) e risolviamo il problema aumentato:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\
 & 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 50 \\
 & 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\
 & \quad \quad x_2 + x_5 = 4 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	0	0	0	0
x_3	(1)	0	20	3	1	0	0	50
x_4	(2)	0	10	3	0	1	0	30
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	0	0	0	2	8
x_3	(1)	0	20	0	1	0	-3	38
x_4	(2)	0	10	0	0	1	-3	18
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{49}{5}$
x_3	(1)	0	0	0	1	-2	3	2
x_1	(2)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	4

Soluzione ottima, come atteso, in forma aumentata, è:

$$\left(\frac{9}{5}, 4, 2, 0, 0\right)$$

mentre il valore della funzione obiettivo è $Z = 49/5$. Poniamo attenzione ai coefficienti delle variabili slack del tableau finale (evidenziati in rosso) e poniamo

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = \frac{1}{10}, \quad y_3^* = \frac{17}{10},$$

e ricordiamo che ogni variabile slack viene associata ad un determinato vincolo.

Risolviamo ora lo stesso problema, cambiando però il termine noto dell'ultimo vincolo, che diventa 5:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ & 20x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ & 10x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & \quad \quad x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Il nuovo problema aumentato è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ & 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 50 \\ & 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ & \quad \quad x_2 + x_5 = 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Applichiamo ora il metodo del simplesso, evidenziando in blu le parti di tableau che sono cambiate rispetto al problema precedente.

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	-2	0	0	0	0
x_3	(1)	0	20	3	1	0	0	50
x_4	(2)	0	10	3	0	1	0	30
x_5	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-1	0	0	0	2	10
x_3	(1)	0	20	0	1	0	-3	35
x_4	(2)	0	10	0	0	1	-3	15
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{23}{2}$
x_3	(1)	0	0	0	1	-2	3	5
x_1	(2)	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{2}$
x_2	(3)	0	0	1	0	0	1	5

Soluzione ottima, come atteso, in forma aumentata, è:

$$\left(\frac{3}{2}, 5, 5, 0, 0\right)$$

mentre il valore della funzione obiettivo è $Z_1 = 23/2$. Calcoliamo ora la differenza tra i valori delle funzioni obiettivo ottenute nei due problemi:

$$\Delta Z = Z_1 - Z = \frac{23}{2} - \frac{49}{5} = \frac{17}{10} = y_3^*.$$

Il valore y_i^* definito in precedenza viene detto **prezzo ombra** per la risorsa i e misura il valore marginale della risorsa, cioè il tasso di incremento di Z ottenuto aumentando la disponibilità della i -esima risorsa. Il metodo del simplesso identifica il prezzo ombra come il valore del coefficiente della i -esima variabile slack nell'equazione (0) del tableau finale.

L'analisi dei prezzi ombra può essere fatta anche graficamente quando il problema ha solo due variabili decisionali. Dall'analisi del prezzo ombra $y_1^* = 0$ si deduce che un incremento della prima risorsa non cambia la soluzione ottima (infatti questa non soddisfa il primo vincolo in forma di uguaglianza).

4.7 Esercizi

Esercizio 4.7.1 *Scrivere il problema duale dei seguenti problemi di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ & 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 4.7.2 *Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema*

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(Soluzione: $Z = 8$).

Esercizio 4.7.3 *Applicare il metodo del simplesso duale per risolvere il seguente problema*

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(Soluzione: $Z = 24$).

Esercizio 4.7.4 *Considerato il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 8x_1 + 7x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

determinare di quale delle risorse associate a ciascun vincolo conviene incrementare la disponibilità per aumentare maggiormente il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima.

(Soluzione: la prima risorsa).

Esercizio 4.7.5 *Considerato il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

determinare di quale delle risorse associate a ciascun vincolo conviene incrementare la disponibilità per aumentare maggiormente il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima.

(Soluzione: la seconda risorsa).

Esercizio 4.7.6 *Considerato il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

determinare di quale delle risorse associate a ciascun vincolo conviene incrementare la disponibilità per aumentare maggiormente il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima.
(Soluzione: la terza risorsa).

Esercizio 4.7.7 Considerato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

determinare di quale delle risorse associate a ciascun vincolo conviene incrementare la disponibilità per aumentare maggiormente il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima.
(Soluzione: la prima risorsa).

Capitolo 5

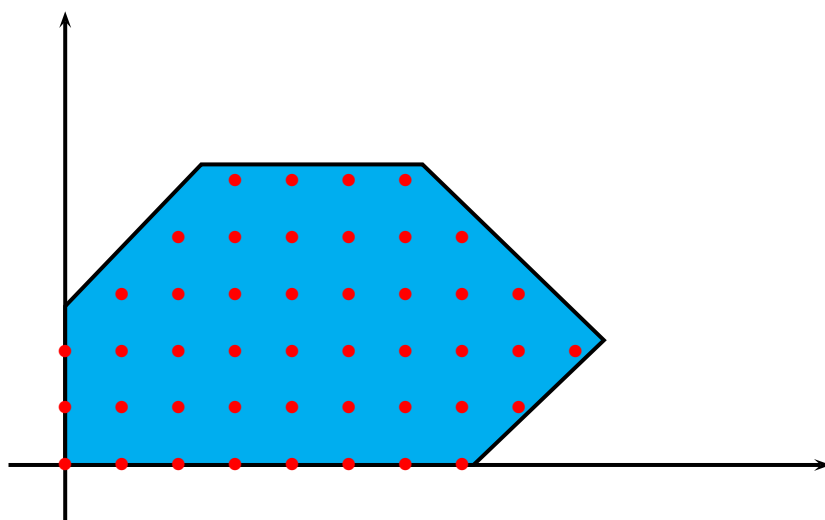
Programmazione Lineare Intera

5.1 Introduzione

Un problema di programmazione lineare intera (in breve PLI) si presenta nella forma

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\text{ variabile intera, per } j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

In questo capitolo affronteremo la risoluzione di problemi di PLI in forma standard considerando che i metodi che saranno descritti possono essere adattati anche a problemi in forma non standard. Nella programmazione intera il maggiore problema che si presenta è che la regione ammissibile è composta da un numero discreto (ovvero finito o infinitamente numerabile) di punti e non forma un insieme compatto. Nella seguente figura viene riportato un esempio di regione ammissibile definita dai vincoli del generico problema (5.1) considerando le variabili decisionali come se fossero reali e all'interno della quale sono evidenziati i punti che rappresentano invece la regione ammissibile (discreta) del problema di programmazione intera.



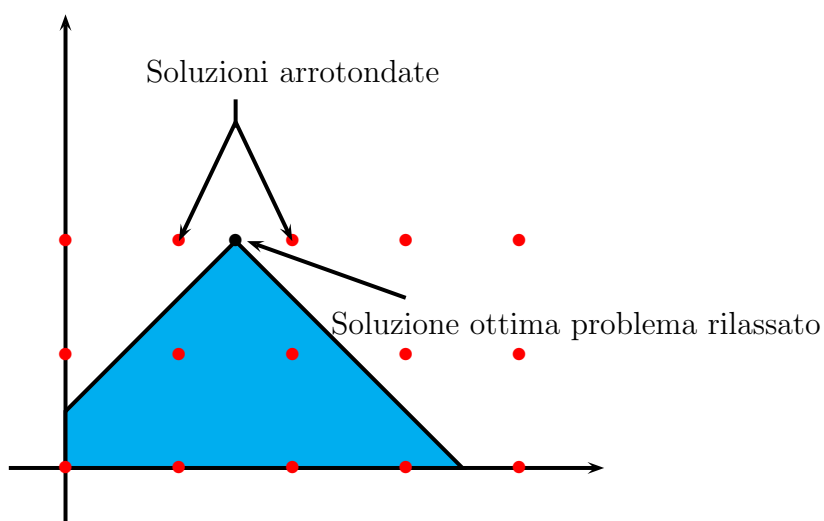
È evidente dalla figura che il problema non può essere risolto con i classici metodi per la programmazione lineare a variabili reali (ad esempio, il metodo del simplesso) in quanto in generale non tutti i vertici hanno coordinate intere e quindi anche il vertice ottimale non è detto che abbia coordinate intere (dipende dalla regione ammissibile e dalla funzione obiettivo).

Poichè i problemi di PLI sono, in generale, più difficili da risolvere rispetto a quelli di programmazione lineare, si potrebbe essere tentati dall'uso di una tecnica di approssimazione che consiste nell'applicare il metodo del simplesso al problema ignorando il vincolo di interezza delle variabili, e approssimando la soluzione, di solito reale, al valore intero più vicino. Un primo problema legato a tale approccio sta nel fatto che tale approssimazione non garantisce che questa sia ancora ammissibile. Consideriamo il seguente esempio.

Esempio 5.1.1

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_2 \\ -x_1 \quad +x_2 & \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \quad \quad +x_2 & \leq \frac{7}{2} \\ x_1, x_2 & \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

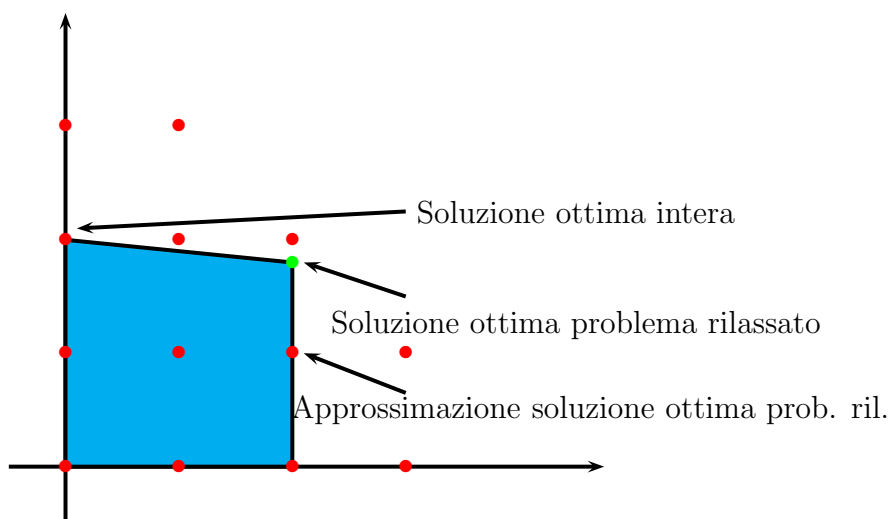
Risolviamo il problema in modo grafico ignorando il vincolo di interezza delle variabili, ottenendo quello che si chiama *problema rilassato*.



Come si vede in figura soluzione ottima del problema è $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 2$. Non è possibile approssimare x_1 ad un valore intero poichè la soluzione non sarebbe ammissibile.

Esempio 5.1.2

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$



In questo caso tralasciando il vincolo di interezza la soluzione ottima è $x_1 = 2$ e $x_2 = 9/5$. Effettuando un'approssimazione si otterrebbe una soluzione ammissibile con $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ con valore $Z = 7$, che, tuttavia, è lontana dalla soluzione del problema di programmazione intera $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$ con $Z = 10$.

Uno dei metodi per risolvere problemi di PLI è il metodo del Branch-and-Bound, che descriveremo nel prossimo paragrafo. Il metodo consente di risolvere il problema suddividendo la regione ammissibile (e quindi l'insieme delle soluzioni) in sottoinsiemi più piccoli e risolvendo il problema in ciascuno di questi. Questa suddivisione viene fatta ricorsivamente, dividendo a loro volta i sottoinsiemi in altri, più piccoli, e riapplicando sempre la stessa procedura. In questo modo viene generato un albero di problemi ognuno dei quali ammette una soluzione ammissibile per il problema rilassato. La procedura termina quando non ci sono più sottoproblemi da risolvere e a questo punto la migliore soluzione intera ottenuta come soluzione ottima del problema di partenza. Altri problemi che rientrano nella programmazione intera sono quelli in cui le variabili decisionali possono assumere solo i valori 0 e 1. In questo caso si parla di **programmazione binaria**. La procedura per risolvere questi problemi sarà descritta nel successivo paragrafo.

5.2 L'algoritmo Branch-and-Bound per Problemi di Programmazione Binaria

I problemi di programmazione binaria sono quelli in cui ogni variabile x_i è associata ad una determinata decisione e pertanto può assumere solo due valori

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se la decisione è sì;} \\ 0 & \text{se la decisione è no.} \end{cases}$$

Tali variabili sono dette **binarie**. Ogni problema di programmazione binaria con n variabili decisionali ha un numero finito di soluzioni, pari a 2^n . Queste potrebbero essere enumerate per trovare quella ottima ma il loro numero, esponenziale, rende tale approccio improponibile dal punto di vista computazionale. Il metodo di Branch-and-Bound costituisce una validissima alternativa a tale procedura. Descriviamo ora le diverse fasi dell'algoritmo:

1. **Branching**, ovvero il modo di scegliere il sottoinsieme di soluzioni da

esplorare;

2. **Bounding**, ovvero il calcolo di un opportuno limite per la soluzione ottima;

3. **Fathoming**, ovvero la cancellazione di sottoinsiemi di soluzioni all'interno ai quali la soluzione ottima non può appartenere.

Branching

Quando si opera con variabili binarie il modo più semplice di procedere è quello di suddividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sottoinsiemi, fissando ad ogni passo il valore di una variabile detta **variabile di branching** (i cui valori possibili sono chiaramente solo 0 e 1). Esistono tecniche piuttosto sofisticate per la scelta della variabile di branching, in alternativa si può seguire l'ordine naturale, per esempio al primo passo si sceglie x_1 , quindi x_2 e così via. I due valori della variabile di branching definiscono due sottoproblemi che vengono risolti in modo approssimato, come sarà descritto nel paragrafo successivo. In questo modo si definisce un vero e proprio albero, detto **albero delle soluzioni**, che si ramifica iterazione dopo iterazione, quando vengono definiti (e risolti) i sottoproblemi definiti attribuendo i valori alle diverse variabili di branching. Nel corso dell'algoritmo alcuni di questi problemi potranno essere tagliati (**fathomed**) mentre altri saranno ulteriormente suddivisi in sottoproblemi.

Bounding

Per ogni sottoproblema si deve ottenere un limite (**bound**) sulla soluzione ammissibile. Un modo classico per ottenere questa informazione è quello di risolvere il problema **rilassato** (anche detto **rilassamento lineare**), che viene ottenuto cancellando (o sostituendo) i vincoli che lo rendono difficile da risolvere.

Per un problema di programmazione binaria si taglia proprio il vincolo $x_j \in \{0, 1\}$ che viene sostituito dai vincoli

$$x_j \leq 1, \quad x_j \geq 0$$

per ogni j . Per risolvere il problema rilassato si può applicare, per esempio, il metodo del simplesso (oppure anche il metodo grafico qualora il numero di variabili decisionali sia uguale a due).

Fathoming

Una volta risolto un problema rilassato un'eventualità è che l'insieme delle sue soluzioni non possa contenere con certezza la soluzione ottima. In questo caso può essere tagliato, cioè non si considerano più i sottoproblemi che esso potrebbe generare in quanto si è certi che essi non porteranno ad una soluzione migliore. Esistono tre criteri per tagliare un sottoproblema.

Un criterio è quello di avere ottenuto una soluzione binaria del rilassamento lineare. Infatti se la soluzione ottima del rilassamento lineare è una soluzione binaria, questa deve essere soluzione ottima anche del problema di programmazione binaria. Se questa soluzione binaria è la migliore soluzione trovata fino all'iterazione attuale allora viene memorizzata come **soluzione incombente** (cioè la migliore soluzione ammissibile trovata finora). Si pone

Z^* = valore di Z per la soluzione incombente.

Quindi il sottoproblema in questione non viene più preso in considerazione. Poichè Z^* è la migliore soluzione trovata finora questo suggerisce un altro criterio per tagliare un sottoproblema. Infatti se il valore ottimo della funzione obiettivo del rilassamento lineare è inferiore a Z^* allora non c'è bisogno di considerare ulteriormente tale sottoproblema.

Un ulteriore criterio per tagliare un sottoproblema è legato al fatto che se il problema rilassato non ha soluzioni ammissibili allora a maggior ragione il problema non rilassato non può averne.

Riepilogando, i **Criteri di Fathoming** sono i seguenti:

Criterio n. 1: il limite è inferiore a Z^* ;

Criterio n. 2: il rilassamento lineare del sottoproblema non ha soluzioni ammissibili;

Criterio n. 3: la soluzione ottima del rilassamento lineare ha componenti binarie.

5.2.1 Sommario dell'algoritmo Branch-and-Bound

Riepiloghiamo i passi del metodo di Branch-and-Bound per un problema di programmazione binaria in cui si deve trovare il massimo della funzione obiettivo.

Inizializzazione:

Porre $Z^* = -\infty$. Applicare il passo di bounding, il passo di fathoming all'intero problema. Se non viene tagliato allora viene classificato come problema

completo e si esegue la prima iterazione.

Singola Iterazione:

Fase 1. Branching: Tra i sottoproblemi rimanenti se ne seleziona uno (non c'è un criterio prestabilito, ma si può scegliere quello generato più di recente oppure quello che ha il bound più grande). Da questo si generano due nuovi sottoproblemi fissando la variabile di branching ai valori 0 e 1.

Fase 2. Bounding: Per ogni sottoproblema si ottiene un limite (bound) risolvendo il suo rilassamento lineare e approssimando per difetto il valore di Z della soluzione ottima risultante al più grande numero intero inferiore ad esso (se Z è reale).

Fase 3. Fathoming: Per ogni nuovo sottoproblema si applicano i 3 criteri di fathoming e si scartano quelli che ne soddisfano uno.

Se uno dei sottoproblemi viene scartato in base al terzo criterio di fathoming allora si deve eventualmente aggiornare il valore della soluzione incombente Z^* .

Test di ottimalità:

Si ferma l'algoritmo quando non rimangono più sottoproblemi da risolvere, la soluzione incombente è ottima, altrimenti eseguire un'altra iterazione.

Il motivo della scelta del sottoproblema creato più di recente è che durante la fase di bounding vengono risolti problemi di programmazione lineare solitamente usando il metodo del simplesso. Piuttosto che eseguire ogni volta il metodo dall'inizio conviene applicare una riottimizzazione che consiste nel modificare il tableau finale del precedente problema tenendo conto delle piccole differenze nel modello ed applicando poche iterazioni del metodo del simplesso.

Esempio 5.2.1 *Applichiamo il metodo Branch-and-Bound al seguente problema di Programmazione Lineare Binaria:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_j \text{ variabile binaria per } j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Il primo passo dell'algoritmo è quello di risolvere il rilassamento lineare del problema completo:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\
 (1) \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10 \\
 (2) \quad & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\
 (3) \quad & x_1 \leq 1 \\
 (4) \quad & x_2 \leq 1 \\
 (5) \quad & x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Applichiamo il metodo del simplesso introducendo 5 variabili slack.

Iterazione 0											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	-9	-5	-6	0	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	6	3	5	1	0	0	0	0	10
x_5	(2)	0	-1	-1	1	0	1	0	0	0	0
x_6	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 1											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	-5	-6	0	0	9	0	0	9
x_4	(1)	0	0	3	5	1	0	-6	0	0	4
x_5	(2)	0	0	-1	1	0	1	1	0	0	1
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 2											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	0	0	$\frac{69}{5}$
x_3	(1)	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$
x_5	(2)	0	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$

Iterazione 3											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{76}{5}$
x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_5	(2)	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$

Soluzione del problema rilassato è $(1, 1, 1/5)$ mentre il valore della funzione obiettivo è $76/5 = 15 + 1/5$ che viene approssimato al valore intero

$$Z = 15.$$

Nessuno dei criteri di fathoming consente di tagliare il problema completo quindi scegliamo x_1 come variabile di branching e definiamo due sottoproblemi, uno in cui fissiamo $x_1 = 0$ e l'altro con $x_1 = 1$:

SOTTOPROBLEMA 1

Fissato $x_1 = 0$

$$\max Z = 5x_2 + 6x_3$$

$$(1) \quad 3x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$(2) \quad -x_2 + x_3 \leq 0$$

$$(3) \quad x_j \text{ variabile binaria per } j = 2, 3;$$

SOTTOPROBLEMA 2

Fissato $x_1 = 1$

$$\max Z = 9 + 5x_2 + 6x_3$$

$$(1) \quad 3x_2 + 5x_3 + 6 \leq 10$$

$$(2) \quad -x_2 + x_3 - 1 \leq 0$$

$$(3) \quad x_j \text{ variabile binaria per } j = 2, 3$$

ovvero

SOTTOPROBLEMA 2

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 \\ (1) \quad & 3x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ (2) \quad & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ (3) \quad & x_j \text{ variabile binaria per } j = 2, 3. \end{aligned}$$

Risolviamo ora il sottoproblema 1 rilassato:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_2 + 6x_3 \\ & 3x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & -x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Applichiamo il metodo del simplesso introducendo 4 variabili slack.

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-5	-6	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	3	5	1	0	0	0	10
x_5	(2)	0	-1	1	0	1	0	0	0
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	1	1

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-11	0	0	6	0	0	0
x_4	(1)	0	8	0	1	-5	0	0	10
x_3	(2)	0	-1	1	0	1	0	0	0
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	1	1	0	-1	0	1	1

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	6	11	0	11
x_4	(1)	0	0	0	1	-5	-8	0	2
x_3	(2)	0	0	1	0	1	1	0	1
x_2	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	0	0	-1	-1	1	0

Soluzione del sottoproblema 1 rilassato è $(0, 1, 1)$ mentre il valore della funzione obiettivo è

$$Z = 11.$$

Poichè la soluzione è binaria allora il sottoproblema viene tagliato in base al terzo criterio di fathoming. Inoltre poniamo $Z^* = 11$ in quanto questa è divenuta la soluzione incumbente (cioè la migliore soluzione ammissibile trovata finora).

Risolviamo ora il sottoproblema 2 rilassato:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 5x_2 + 6x_3 + 9 \\
 & 3x_2 + 5x_3 \leq 4 \\
 & -x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso applicando il metodo del simplesso si devono introdurre 4 variabili slack.

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	-5	-6	0	0	0	0	9
x_4	(1)	0	3	5	1	0	0	0	4
x_5	(2)	0	-1	1	0	1	0	0	1
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	1	1

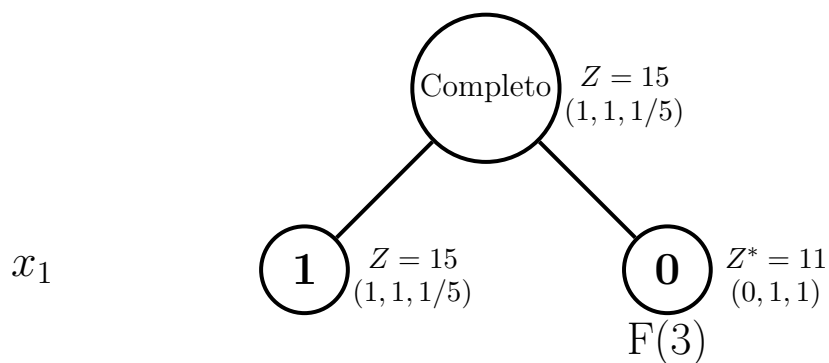
Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	$\frac{69}{5}$
x_3	(1)	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$
x_5	(2)	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_6	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	$\frac{1}{5}$

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
Z	(0)	1	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{76}{5}$
x_3	(1)	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_5	(2)	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	(3)	0	1	0	0	0	1	0	1
x_7	(4)	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$

Soluzione del sottoproblema 1 rilassato è $(1, 1, 1/5)$ mentre il valore della funzione obiettivo è $76/5$ che viene approssimato al valore intero

$$Z = 15.$$

Visualizziamo l'albero delle soluzioni ottenuto finora:



Passiamo ora alla seconda iterazione e scriviamo i sottoproblemi ponendo $x_2 = 1$ e $x_2 = 0$:

SOTTOPROBLEMA 3

Fissato $x_2 = 0$

$$\max Z = 9 + 6x_3$$

$$(1) \quad 5x_3 \leq 4$$

$$(2) \quad x_3 \leq 1$$

$$(3) \quad x_3 \text{ variabile binaria,}$$

SOTTOPROBLEMA 4

Fissato $x_2 = 1$

$$\max Z = 14 + 6x_3$$

$$(1) \quad 3 + 5x_3 \leq 4$$

$$(2) \quad -1 + x_3 \leq 1$$

$$(3) \quad x_3 \text{ variabile binaria,}$$

ovvero

SOTTOPROBLEMA 4

$$\max Z = 14 + 6x_3$$

$$(1) \quad 5x_3 \leq 1$$

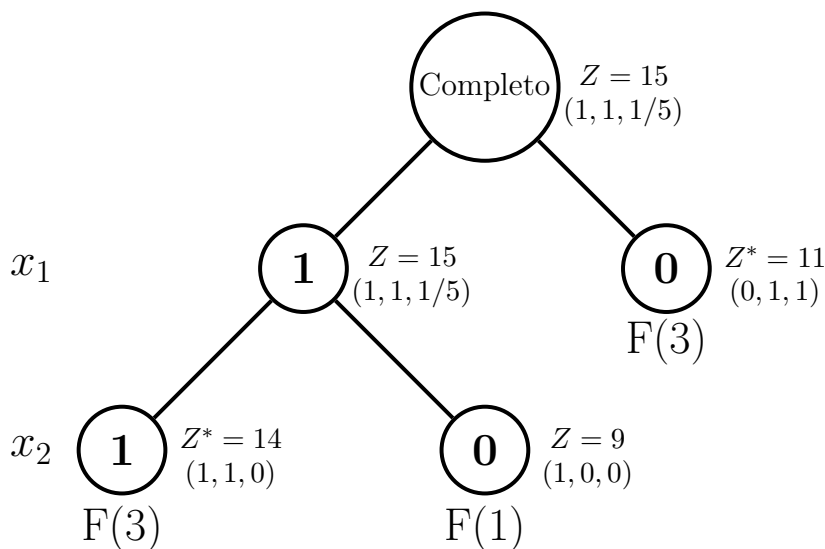
$$(2) \quad x_3 \leq 2$$

$$(3) \quad x_3 \text{ variabile binaria.}$$

In questo caso è superfluo risolvere il rilassamento lineare dei problemi binari perchè le soluzioni sono molto semplici. Infatti $x_3 = 0$ è soluzione del sottoproblema 3, e $Z = 9$ è il relativo valore della funzione obiettivo. Poichè tale valore è inferiore rispetto alla soluzione incombente il sottoproblema viene tagliato applicando il primo criterio di fathoming. La soluzione del sottoproblema 4 è $x_3 = 0$, in cui la funzione obiettivo ammette valore $Z = 14$, che diviene la nuova soluzione incombente

$$Z^* = 14,$$

ed il sottoproblema viene tagliato applicando il terzo criterio di fathoming. Poichè non ci sono ulteriori sottoproblemi da risolvere la soluzione incombente è quella ottima e l'albero delle soluzioni finale è il seguente.



5.3 L'algoritmo Branch-and-Bound per la Programmazione Intera

Consideriamo il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\text{ variabile intera, per } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

L'algoritmo è molto simile al branch-and-bound per variabili binarie nel senso che si utilizza la tecnica del rilassamento lineare per i passi di bounding e fathoming. I cambiamenti sono i seguenti.

Innanzitutto la scelta della variabile di branching non avviene secondo l'ordine naturale poichè ora si considerano solo le variabili che devono assumere valori interi e che invece hanno un valore non intero nella soluzione ottima nel rilassamento dell'attuale sottoproblema. Di solito tra queste variabili viene scelta la prima nell'ordinamento naturale ma potrebbero essere utilizzate anche tecniche più sofisticate.

Il secondo cambiamento riguarda i valori assegnati alla variabile di branching. Poichè tale variabile può assumere valori interi non è possibile definire i due sottoproblemi uguagliandola a 0 o 1, nè si può generare un sottoproblema per ogni possibile valore, allora si definiscono due sottoproblemi specificando due possibili intervalli di valori. In dettaglio, se x_i è la variabile di branching ed x_i^* è il suo valore nella soluzione ottima del rilassamento lineare si definiscono due sottoproblemi aggiungendo il vincolo

$$x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$$

nel primo e

$$x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$$

in cui $\lfloor x_i^* \rfloor$ indica la parte intera del numero reale x_i^* :

$$\lfloor x_i^* \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x_i^*\}.$$

Osserviamo che per problemi di PLI la variabile di branching non scompare dai sottoproblemi definiti, questo vuol dire che la stessa variabile potrebb

essere scelta come variabile di branching in più iterazioni.

Il terzo cambiamento riguarda il passo di bounding. Nel caso di un problema di programmazione lineare intera pura il valore ottimo della funzione obiettivo del rilassamento lineare Z viene approssimato per difetto al fine di ottenere un valore intero. Se alcune variabili possono assumere valori reali tale arrotondamento non è necessario.

La quarta modifica riguarda il terzo criterio di fathoming. Nel caso della programmazione intera mista il criterio deve richiedere che solo le variabili vincolate ad essere intere lo siano effettivamente nella soluzione ottima del rilassamento lineare.

Vediamo quindi di riassumere l'algoritmo di Branch-and-Bound per problemi di programmazione lineare intera mista.

Inizializzazione:

Porre $Z^* = -\infty$. Si applicano le operazioni di bounding e fathoming al problema di partenza. Se il problema non viene tagliato allora si esegue la prima iterazione.

Singola iterazione:

1. Branching: si sceglie uno dei sottoproblemi non tagliati (per esempio quello generato più recentemente). Si sceglie la variabile di branching, cioè la prima variabile intera che nella soluzione ottima del rilassamento lineare non ha valore intero. Se x_j è la variabile di branching ed x_j^* il suo valore non intero allora si generano due nuovi sottoproblemi aggiungendo rispettivamente i vincoli

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \quad \text{e} \quad x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1.$$

2. Bounding: per ogni nuovo sottoproblema si risolve il relativo rilassamento lineare e si usa come bound il valore di Z della soluzione ottima ottenuta.
3. Fathoming: ad ogni nuovo sottoproblema si applicano i seguenti criteri di fathoming tagliando i sottoproblemi che ne soddisfano uno:
 - Criterio 1: il bound risulta minore o uguale rispetto al valore della soluzione incombente Z^* ;
 - Criterio 2: il rilassamento lineare non ha soluzioni ammissibili;
 - Criterio 3: la soluzione ottima per il rilassamento lineare ha valori interi per tutte le variabili vincolate ad assumere valori interi (se questa soluzione è migliore di quella incombente diventa la nuova soluzione

incombente e si riapplica il criterio 1 a tutti i sottoproblemi non ancora tagliati).

Test di ottimalità:

Si ferma l'algoritmo quando non ci sono sottoproblemi da risolvere, allora la soluzione incumbente è quella ottima. Se non c'è alcuna soluzione incumbente allora il problema non ha soluzioni ammissibili, in caso contrario si esegue un'altra iterazione.

Esempio 5.3.1 *Risolvere il seguente problema di PLI:*

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Innanzitutto risolviamo, usando il metodo del simplesso, il rilassamento lineare del problema di partenza che viene ottenuto eliminando il vincolo di interezza delle tre variabili. Introduciamo due variabili slack, x_4 e x_5 , che sono inizialmente le variabili in base.

Iterazione 0								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	-2	-3	-2	0	0	0
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	3
x_5	(2)	0	2	1	0	0	1	5

Iterazione 1								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	4	0	-2	0	3	15
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	3
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	5

Iterazione 2								
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
Z	(0)	1	5	0	0	1	3	18
x_3	(1)	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	5

La soluzione ottenuta $(0, 5, 3/2)$ non è intera, quindi non può essere applicato il terzo criterio di fathoming ed il problema non viene tagliato, inoltre

$$Z = 18$$

diviene il bound per i successivi sottoproblemi pur non essendo soluzione incombente in quanto la soluzione non è intera. Consideriamo ora come variabile di branching x_3 poichè è la prima variabile che nella soluzione del problema rilassato non ha un valore intero e definiamo due sottoproblemi in cui aggiungiamo rispettivamente i seguenti vincoli:

$$x_3 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1$$

e

$$x_3 \geq 2.$$

Scriviamo ora esplicitamente i due sottoproblemi:

SOTTOPROBLEMA 1

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
 & x_1 \quad \quad + 2x_3 \leq 3 \\
 & 2x_1 \quad + x_2 \leq 5 \\
 & \quad \quad \quad x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

e

SOTTOPROBLEMA 2

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
& x_1 \quad \quad + 2x_3 \leq 3 \\
& 2x_1 \quad + x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}, x_3 \geq 2.
\end{aligned}$$

Risolviamo il sottoproblema 1 con il metodo del simplesso introducendo 3 variabili slack.

Iterazione 0									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	-2	-3	-2	0	0	0	0
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	0	3
x_5	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_6	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

Iterazione 1									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	4	0	-2	0	3	0	15
x_4	(1)	0	1	0	2	1	0	0	3
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_6	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

Iterazione 2									
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
Z	(0)	1	4	0	0	0	3	2	17
x_4	(1)	0	1	0	0	1	0	-2	1
x_2	(2)	0	2	1	0	0	1	0	5
x_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	1

La soluzione ottenuta $(0, 5, 1)$ è intera, quindi applicando il terzo criterio di fathoming il problema viene tagliato. Il valore della funzione obiettivo, cioè $Z = 17$, diviene la nuova soluzione incumbente.

$$Z^* = 17.$$

Per risolvere il sottoproblema 2 si deve effettuare il seguente cambio di variabile

$$x'_3 = x_3 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x'_3 + 2, \quad x'_3 \geq 0,$$

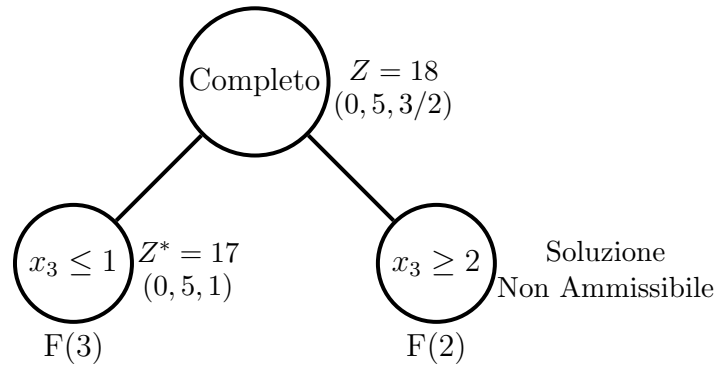
cosicchè il sottoproblema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2(x'_3 + 2) \\ & x_1 \quad \quad \quad + 2(x'_3 + 2) \leq 3 \\ & 2x_1 \quad + x_2 \quad \quad \quad \leq 5 \\ & x_1, x_2, x'_3 \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x'_3 + 4 \\ & x_1 \quad \quad \quad + 2x'_3 \leq -1 \\ & 2x_1 \quad + x_2 \quad \quad \quad \leq 5 \\ & x_1, x_2, x'_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Appare evidente, osservando il primo vincolo, che il problema non ammette soluzioni ammissibili, quindi il sottoproblema può essere tagliato. Possiamo quindi scrivere l'albero dei sottoproblemi:



Osservazione In modo simile si risolvono i problemi di programmazione lineare intera mista in cui solo $k < n$ variabili decisionali (convenzionalmente le prime) sono intere:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 x_j & \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 x_j & \text{ variabile intera, per } j = 1, \dots, k, \quad k < n.
 \end{aligned}$$

5.4 L'algoritmo Branch-and-Cut per la Programmazione Binaria

Si tratta di un metodo, descritto per la prima volta intorno alla metà degli anni Ottanta, per risolvere in modo efficiente problemi di programmazione binaria di grandi dimensioni per i quali l'algoritmo di Branch-and-Bound mostrava una complessità computazionale di ordine esponenziale. Il metodo si può applicare comunque anche a problemi di programmazione binaria mista e intera mista. Ambito ideale di applicazione sono i problemi in cui la matrice A dei vincoli funzionali presenta una struttura sparsa, cioè il numero di elementi diversi da zero non supera il 5%. Consideriamo solo il caso di problemi di programmazione binaria pura. Il metodo utilizza una serie di tecniche combinate insieme: il preprocessing automatico del problema,

la generazione dei piani di taglio e le tecniche di branch-and-bound.

Le tecniche di preprocessamento del problema sono le seguenti:

1. Fissare il valore di alcune variabili: quando una variabile non può assumere un determinato valore poichè sarebbe violato uno dei vincoli indipendentemente dal valore assunto dalle altre variabili allora il suo valore deve essere necessariamente l'altro valore. Per esempio il vincolo

$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

non può essere soddisfatto se $x_1 = 1$ e quindi deve essere necessariamente $x_1 = 0$. Un criterio generale può essere il seguente: una volta identificata la variabile con il più grande coefficiente positivo si verifica se la somma tra tale coefficiente e tutti i coefficienti negativi del vincolo eccede il termine noto, in caso affermativo tale variabile deve essere posta uguale a zero.

2. Eliminare i vincoli ridondanti: se un vincolo funzionale viene soddisfatto dalla soluzione binaria *più difficile* allora è ridondante e può essere eliminato. Per un vincolo di tipo $\leq$ la soluzione binaria più difficile ha variabili uguali a 1 per quelle che hanno coefficienti nonnegativi e le altre sono uguali a 0. Tali valori si invertono se il vincolo è di tipo $\geq$. Per esempio i vincoli

$$3x_1 + 3x_2 \leq 8, \quad 3x_1 - 2x_2 \geq -3$$

sono ridondanti perchè

$$3(1) + 3(1) = 6 \leq 8, \quad 3(0) - 2(1) = -2 \geq -3.$$

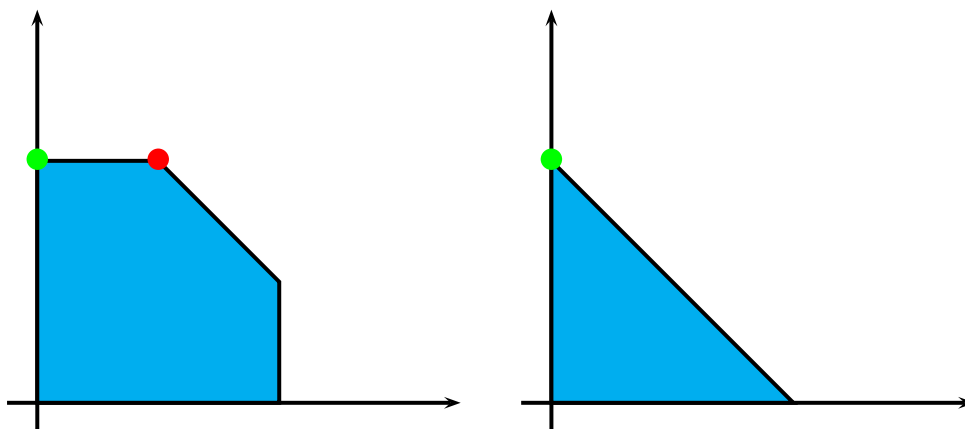
3. Rendere i vincoli più stringenti: in questo caso si cerca di ridurre la regione ammissibile senza tuttavia eliminare soluzioni ammissibili. Consideriamo il seguente semplice problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \text{ variabili binarie.} \end{aligned}$$

Le soluzioni ammissibili sono $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Soluzione ottima del rilassamento lineare è $(1/2, 1)$ mentre la soluzione ottima del problema binario è $(0, 1)$. Se al vincolo assegnato si sostituisce il seguente

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

si ottiene una regione ammissibile ridotta pur senza eliminare alcuna soluzione ammissibile ma con l'effetto che sia il rilassamento lineare che il problema binario hanno la stessa soluzione ottima. Nella seguente figura sono riportate le due regioni di ammissibilità.



La sostituzione di un vincolo con un altro che riduce la regione di ammissibilità è detta **generazione di un piano di taglio**. Un **piano di taglio** (o **taglio**) è appunto un nuovo vincolo funzionale che riduce la regione di ammissibilità senza eliminare alcuna soluzione ammissibile.

I piani di taglio possono essere generati in molti modi, la seguente è una delle possibili procedure.

1. Considerare solo i vincoli funzionali nella forma $\leq$ che hanno coefficienti nonnegativi.
2. Determinare un gruppo di variabili (detto **copertura minima** del vincolo) tali che:
 - (a) il vincolo è violato se ogni variabile del gruppo è uguale a 1 e tutte le altre sono uguali a 0.
 - (b) il vincolo è soddisfatto se il valore di ciascuna di queste variabili viene cambiato da 1 a 0.
3. Se N denota il numero delle variabili del gruppo il piano di taglio risultante ha la forma

$$\text{somma delle variabili del gruppo} \leq N - 1.$$

Per esempio considerando il vincolo

$$5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 \leq 13$$

l'insieme $\{x_1, x_2, x_3\}$ è una copertura minima perchè ponendo il loro valore uguale a 1 (e $x_4 = 0$) risulta

$$5 + 4 + 7 + 0 \geq 13.$$

Tuttavia cambiando il valore di ogni variabile (a turno) da 0 a 1 il vincolo è soddisfatto:

$$5 + 4 + 0 + 0 \leq 13, \quad 5 + 0 + 7 + 0 \leq 13, \quad 0 + 4 + 7 + 0 \leq 13.$$

Per comprendere meglio il significato di copertura minima consideriamo il seguente vincolo:

$$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 9. \quad (5.2)$$

La situazione dei vertici è la seguente:

vertici ammissibili	vertici non ammissibili
(0, 0, 0)	(1, 1, 1)
(0, 0, 1)	(1, 1, 0)
(0, 1, 0)	(1, 0, 1)
(1, 0, 0)	
(0, 1, 1)	

Osserviamo che l'insieme $\{x_1, x_2\}$ rappresenta una copertura minima del vincolo, quindi

$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad (5.3)$$

rappresenta un vincolo da affiancare a (5.2). Inoltre anche l'insieme $\{x_1, x_3\}$ rappresenta una copertura minima del vincolo, quindi un altro vincolo è

$$x_1 + x_3 \leq 1. \quad (5.4)$$

I due vincoli (5.3) e (5.4) sono più stringenti rispetto a (5.2) poichè i vertici ammissibili appartengono alla frontiera di almeno uno dei due, mentre nessuno appartiene alla frontiera del vincolo originario (fa eccezione l'origine che appartiene comunque alla frontiera di tutti i vincoli di nonnegatività), come si evince dalla presente tabella:

Vertici ammissibili	Appartenenza ai Vincoli	
	$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_3 \leq 1$
(0, 0, 0)	no	no
(0, 0, 1)	no	si
(0, 1, 0)	si	no
(1, 0, 0)	si	si
(0, 1, 1)	si	si

Per illustrare meglio l'efficacia di tale tecnica consideriamo il seguente esempio di programmazione lineare binaria:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\
 & 3x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 9 \\
 & x_j \text{ variabile binaria per } j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Risolviamo il rilassamento lineare del problema completo:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 (1) \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\
 (2) \quad & 3x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 9 \\
 (3) \quad & x_1 \leq 1 \\
 (4) \quad & x_2 \leq 1 \\
 (5) \quad & x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Applichiamo il metodo del simpleso introducendo 5 variabili slack.

Iterazione 0											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	-6	-5	-4	0	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	2	3	4	1	0	0	0	0	6
x_5	(2)	0	3	1	6	0	1	0	0	0	9
x_6	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 1											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	-5	-4	0	0	6	0	0	6
x_4	(1)	0	0	3	4	1	0	-2	0	0	4
x_5	(2)	0	0	1	6	0	1	-3	0	0	6
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 2											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	0	-4	0	0	6	5	0	11
x_4	(1)	0	0	0	4	1	0	-2	-3	0	1
x_5	(2)	0	0	0	6	0	1	-3	-1	0	5
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 3											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	0	0	1	0	4	2	0	12
x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
x_5	(2)	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{7}{2}$
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{3}{4}$

Soluzione del problema rilassato è dunque il vettore $(1, 1, 1/4)$, con valore della funzione obiettivo $Z = 12$. È ovvio che non potendo tagliare il problema completo poichè tale soluzione non soddisfa alcun criterio di fathoming, è necessario scegliere la variabile di branching (x_1 seguendo l'ordine naturale oppure x_3 in modo più oculato), definire due sottoproblemi e risolverli. Consideriamo invece la possibilità di risolvere il problema completo sostituendo ai due vincoli quelli definiti dalle rispettive coperture minime. È facile osservare che il primo vincolo ammette come unica copertura minima l'insieme $\{x_2, x_3\}$, che definisce il vincolo

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

mentre il secondo vincolo ammette come unica copertura minima l'insieme $\{x_1, x_2, x_3\}$, che definisce il vincolo

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2.$$

Consideriamo quindi il seguente problema

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_j \text{ variabile binaria per } j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Risolviamo il rilassamento lineare del problema completo:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 (1) \quad & \quad \quad x_2 \quad + x_3 \leq 1 \\
 (2) \quad & x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \leq 2 \\
 (3) \quad & x_1 \quad \quad \quad \leq 1 \\
 (4) \quad & \quad \quad x_2 \quad \quad \leq 1 \\
 (5) \quad & \quad \quad \quad x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Applichiamo il metodo del simplesso introducendo 5 variabili slack.

Iterazione 0											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	-6	-5	-4	0	0	0	0	0	0
x_4	(1)	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
x_5	(2)	0	1	1	1	0	1	0	0	0	2
x_6	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 1											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	-5	-4	0	0	6	0	0	6
x_4	(1)	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
x_5	(2)	0	0	1	1	0	1	-1	0	0	1
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Iterazione 2											
Var. base	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
Z	(0)	1	0	0	1	5	0	6	0	0	11
x_2	(1)	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
x_5	(2)	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
x_1	(3)	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_7	(4)	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0
x_8	(5)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Soluzione ottima del problema rilassato è dunque $(1, 1, 0)$, con $Z = 11$, che risulta essere soluzione ottima anche del problema binario iniziale. L'uso dei vincoli definiti dalle coperture minime consente di ridurre la regione ammissibile eliminando quei vertici che sono ammissibili per il problema rilassato ma non per quello binario. In tal modo aumenta la probabilità che la soluzione del rilassamento lineare coincida con quella del problema binario.

5.5 Esercizi

Esercizio 5.5.1 *Applicare il metodo del simplesso per risolvere il rilassamento lineare del seguente problema di programmazione lineare binaria determinando un limite per Z :*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2 & \in \{0, 1\}.\end{aligned}$$

(Soluzione $Z = 3$).

Esercizio 5.5.2 *Applicare il metodo del simplesso per risolvere il rilassamento lineare del seguente problema di programmazione lineare binaria determinando un limite per Z :*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2 & \in \{0, 1\}.\end{aligned}$$

(Soluzione $Z = 4$).

Esercizio 5.5.3 *Applicare il metodo del simplesso per risolvere il rilassamento lineare del seguente problema di programmazione lineare binaria determinando un limite per Z :*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 5x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 4x_2 & \leq 5 \\ 3x_1 + 6x_2 & \leq 5 \\ x_1, x_2 & \in \{0, 1\}.\end{aligned}$$

(Soluzione $Z = 6$).

Esercizio 5.5.4 *Applicare il metodo del simplesso per risolvere il rilassamento lineare del seguente problema di programmazione lineare binaria determinando un limite per Z :*

$$\begin{aligned}\max \quad & Z = 6x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 & \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 4 \\ x_1, x_2 & \in \{0, 1\}.\end{aligned}$$

(Soluzione $Z = 6$).

Esercizio 5.5.5 Sia assegnato il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Determinare un limite per Z applicando il metodo del simplesso per risolvere il relativo rilassamento lineare ed individuare la prima variabile di branching. (Soluzione $Z = 16$ e x_1 prima variabile di branching).

Esercizio 5.5.6 Sia assegnato il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Determinare un limite per Z applicando il metodo del simplesso per risolvere il relativo rilassamento lineare ed individuare la prima variabile di branching. (Soluzione $Z = 18$ e x_1 prima variabile di branching).

Esercizio 5.5.7 Sia assegnato il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ & 5x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 6 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Determinare un limite per Z applicando il metodo del simplesso per risolvere il relativo rilassamento lineare ed individuare la prima variabile di branching. (Soluzione $Z = 9$ e x_2 prima variabile di branching).

Esercizio 5.5.8 Sia assegnato il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Determinare un limite per Z applicando il metodo del simplesso per risolvere il relativo rilassamento lineare ed individuare la prima variabile di branching. (Soluzione $Z = 24$ e x_1 prima variabile di branching).

Esercizio 5.5.9 Siano $x_i, i = 1, \dots, 5$, cinque variabili binarie. Si consideri il seguente vincolo

$$3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 \leq 15$$

e si identifichino quali, tra i seguenti insiemi, costituiscono una copertura minima:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_3, x_4\}.$$

Esercizio 5.5.10 Siano $x_i, i = 1, \dots, 5$, tutte variabili binarie. Si consideri il seguente vincolo

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6x_5 \leq 8$$

e si identifichino quali, tra i seguenti insiemi, costituiscono una copertura minima:

$$\begin{array}{cccc} \{x_1, x_2, x_3\}, & \{x_3, x_4, x_5\}, & \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, & \{x_1, x_3, x_5\}, \\ \{x_2, x_3\}, & \{x_2, x_4\}, & \{x_1, x_3\}, & \{x_3, x_5\}. \end{array}$$

Esercizio 5.5.11 Si consideri il seguente vincolo in cui tutte le variabili decisionali sono binarie:

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 10.$$

Determinare tutte le coperture minime di tale vincolo.

Esercizio 5.5.12 Siano $x_i, i = 1, \dots, 3$, tre variabili binarie. Si consideri il seguente vincolo

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 8.$$

Si identifichino tutte le coperture minime ed i vincoli che queste definiscono.

Esercizio 5.5.13 Si consideri il seguente vincolo in cui tutte le variabili decisionali sono binarie:

$$4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 10.$$

Scrivere i vincoli definiti dalle coperture minime di tale vincolo.