Indice

1 La Trasformata di Laplace **2**

1.1 Introduzione . . . 2

1.1.1 Proprietà delle Trasformate di Laplace . . . 5

1.1.2 Trasformata di Laplace di derivate e funzioni periodiche 10

1.2 Antitrasformata di Laplace . . . 17

1.2.1 Proprietà dell'Antitrasformata di Laplace . . . 18

1.3 Scomposizione in Frazioni Parziali . . . 27

1.4 Applicazioni delle trasformate di Laplace . . . 35

2 Trasformate di Fourier **71**

2.1 Introduzione . . . 71

2.2 Serie di Fourier . . . 71

2.2.1 Forma complessa della serie di Fourier . . . 78

2.3 Trasformate finite di Fourier . . . 79

2.3.1 Trasformate finite seno e coseno di Fourier . . . 80

2.4 Risoluzione di equazioni alle derivate parziali . . . 98

Capitolo 1

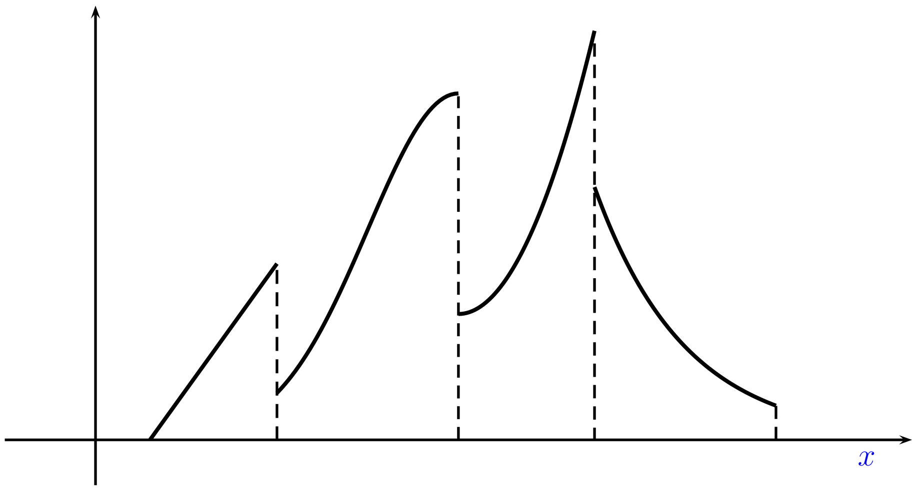
La Trasformata di Laplace

1.1 Introduzione

Le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni alle derivate parziali descrivono in modo molto accurato una grande quantità di fenomeni naturali in diversi campi delle scienze applicate. Uno strumento molto potente per risolvere questi problemi è la trasformata di Laplace che trasforma appunto il problema differenziale in un'espressione algebrica elementare. In questo capitolo sarà descritto appunto tale strumento e la sua applicazione ad alcuni di tali problemi differenziali.

Definizione 1.1.1 *Una funzione $F(t)$ è detta generalmente continua nell'intervallo $[a, b]$ se questo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua ed ammette limite destro e sinistro finiti.*

Un esempio di funzione generalmente continua è illustrata nella seguente figura.



Una funzione generalmente continua può presentare, come unico tipo di discontinuità, dei salti, ovvero punti in cui i limiti destro e sinistro esistono, sono finiti ma diversi. Una funzione generalmente continua nell'intervallo finito $[a, b]$ è sicuramente integrabile.

Definizione 1.1.2 *Una funzione $F(t)$ ha ordine esponenziale α se esistono due costanti $\alpha, M \in \mathbb{R}$, con $M > 0$, tali che per qualche $t_0 \geq 0$ risulta*

$$|F(t)| < Me^{\alpha t}, \qquad \text{per ogni } t \geq t_0.$$

Per esempio la funzione $F(t) = e^{at}$ ha ovviamente ordine esponenziale a, mentre

$$F(t) = t^n, \qquad n > 0$$

ha ordine α, $\alpha > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} + \cdots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \cdots > \frac{\alpha^n t^n}{n!}$$

quindi

$$t^n < \frac{n!}{\alpha^n} e^{\alpha t}$$

Le funzioni trigonometriche $\cos t$, $\sin t$ sono limitate quindi hanno ordine esponenziale 0, mentre $F(t) = e^{-t}$ ha ordine esponenziale -1. La funzione $F(t) = e^{t^3}$ non è di ordine esponenziale. Infatti

$$|e^{-\alpha t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \alpha t}$$

e questa quantità può essere resa maggiore di qualunque quantità assegnata, facendo crescere opportunamente t.

Definizione 1.1.3 *Sia $F(t)$ una funzione definita per $t > 0$. Si dice* Trasformata di Laplace *di $F(t)$, ed è indicata con $L[F(t)]$, la seguente*

$$L[F(t)] = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt, \tag{1.1}$$

con s parametro reale.

La Trasformata di Laplace $L[F(t)]$ *esiste* se l'integrale in (1.1) esiste per qualche valore di s.
Vediamo ora le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Teorema 1.1.1 *Se la funzione $F(t)$ è generalmente continua per $t \in [0, t_0]$ e di ordine esponenziale α per $t > t_0$ allora la trasformata di Laplace*

$$f(s) = L[F(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

esiste per ogni $s > \alpha$.

Dimostrazione. Poichè $t_0 > 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} F(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Poichè $F(t)$ è generalmente continua su $[0, t_0]$ essa è integrabile nello stesso intervallo e dunque il primo integrale a secondo membro esiste ed è un numero finito. Per quanto concerne il secondo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} |F(t)| dt \\
&\leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} M e^{\alpha t} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t} dt \\
&= M \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{(\alpha - s)t} dt = \frac{M}{\alpha - s} \lim_{p \to \infty} \left[e^{(\alpha - s)t} \right]_0^p \\
&= \frac{M}{\alpha - s} \lim_{p \to \infty} \left[e^{(\alpha - s)p} - 1 \right] = \frac{M}{s - \alpha}
\end{aligned}$$

purchè $s > \alpha$ poichè in caso contrario l'integrale diverge. □

1.1.1 Proprietà delle Trasformate di Laplace

Assumiamo che per una assegnata funzione $F(t)$ valgano le ipotesi del teorema 1.1.1 allora per la trasformata di Laplace sono valide le seguenti proprietà.

1. Proprietà di linearità:

$$L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] = c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, s > \alpha.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[c_1F_1(t) + c_2F_2(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(c_1F_1(t) + c_2F_2(t))dt \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st}F_2(t)dt \\ &= c_1L[F_1(t)] + c_2L[F_2(t)]. \ \square \end{aligned}$$

2. I Proprietà di traslazione:
posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[e^{at}F(t)] = f(s-a), \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \ s > \alpha + a.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[e^{at}F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}F(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s-a). \ \square \end{aligned}$$

3. II Proprietà di traslazione:
posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

e

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$$

risulta

$$L[G(t)] = e^{-as} f(s), \qquad s > \alpha.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} G(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st} F(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} F(u) du \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u) du = e^{-sa} f(s). \ \Box \end{aligned}$$

4. Proprietà del cambio di scala:
   posto
   $$L[F(t)] = f(s)$$
   si ha
   $$L[F(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0, \ s > \alpha a.$$
   Dimostrazione.
   $$\begin{aligned} L[F(at)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at) dt = \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{u}{a}} \frac{F(u)}{a} du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}u} F(u) du = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right). \ \Box \end{aligned}$$

Vediamo ora le trasformate di Laplace di alcune funzioni fondamentali.

1. $$L[1] = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[1] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st}dt \\ &= -\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s)e^{-st}dt \\ &= -\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-st}\right]_0^p = \frac{1}{s}, \qquad s > 0; \end{aligned}$$

2.

$$L[t] = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}tdt = \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st}tdt \\ &= -\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s)te^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{p\to+\infty} \int_0^p t\frac{d}{dt}(e^{-st})dt \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{p\to+\infty} \left\{ [te^{-st}]_0^p - \int_0^p e^{-st}dt \right\} \\ &= \lim_{p\to+\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sp}}{s^2} - \frac{pe^{-sp}}{s} \right] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0; \end{aligned}$$

3. per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a. \tag{1.2}$$

Infatti basta osservare che $L[1] = 1/s$ ed applicare la I proprietà di traslazione;

4.

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0;$$

5.
$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0.$$

Queste ultime due trasformate possono essere calcolate utilizzando la definizione di trasformata di Laplace, ma vediamo di trovare un modo alternativo.
Supponendo che la (1.2) sia vera anche per numeri complessi, possiamo scrivere

$$L[e^{\iota at}] = \frac{1}{s-\iota a} = \frac{s+\iota a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + \iota\frac{a}{s^2+a^2}. \tag{1.3}$$

Applicando la proprietà di linearità si ha

$$\begin{aligned} L[e^{\iota at}] &= L[\cos at + \iota \sin at] = L[\cos at] + \iota L[\sin at] \\ &= \frac{s}{s^2+a^2} + \iota\frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

quindi

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

6.
$$L[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|;$$

$$\begin{aligned} L[\sinh at] &= L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}L[e^{at}] - \frac{1}{2}L[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|. \end{aligned}$$

7.
$$L[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|.$$

Analogamente al caso precedente, ricordando che

$$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}.$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione delle altre proprietà della trasformata di Laplace.

Esempio 1.1.1

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

Ricordando che

$$L[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}$$

ed applicando la prima proprietà di traslazione con $a=-1$ *segue che*

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.$$

Teorema 1.1.2 *Se* $L[F(t)] = f(s)$ *allora*

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s), \ \ s>\alpha.$$

Dimostrazione. Poniamo, al solito,

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt.$$

Procediamo per induzione: posto $n=1$, risulta

$$\begin{aligned}\frac{df(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}F(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty}(-t)e^{-st}F(t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-st}(tF(t))dt = -L[tF(t)].\end{aligned}$$

Dunque

$$L[tF(t)] = -f'(s)$$

e la tesi è vera.
Assumiamo vera la tesi per un fissato n

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

e dimostriamola per $n+1$. Infatti

$$\begin{aligned} L\left[t^{n+1}F(t)\right] &= L\left[t\left(t^n F(t)\right)\right] = -\frac{d}{ds}L\left[t^n F(t)\right] \\ &= -\frac{d}{ds}\left(-1\right)^n \frac{d^n}{ds^n}f(s) = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}f(s). \ \square \end{aligned}$$

Esempio 1.1.2 *Un'applicazione del teorema appena dimostrato è la seguente*

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Infatti

$$L[t^n] = L[t^n \cdot 1] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}L[1] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\,\frac{1}{s}$$

da cui si ricava, per induzione, il risultato. Infatti per $n=1$ *risulta*

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

e per $n-1$ *l'ipotesi di induzione è:*

$$L[t^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

Ora applicando il Teorema 1.1.2 risulta

$$\begin{aligned} L[t^n] &= L[t\cdot t^{n-1}] = -\frac{d}{ds}L[t^{n-1}] = -\frac{d}{ds}\frac{(n-1)!}{s^n} \\ &= -(-n)\frac{(n-1)!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

1.1.2 Trasformata di Laplace di derivate e funzioni periodiche

Teorema 1.1.3 *Sia* $F(t)$ *continua in* $0 \le t \le t_0$*, di ordine esponenziale* α *per* $t > t_0$*, ed* $F'(t)$ *generalmente continua in* $0 \le t \le t_0$*. Posto*

$$L[F(t)] = f(s)$$

si ha

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) \qquad s > \alpha.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
L[F'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p e^{-st}F'(t)dt \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left\{\left[e^{-st}F(t)\right]_0^p + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right\} \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left\{e^{-sp}F(p) - F(0) + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right\} \\
&= \lim_{p\to+\infty} e^{-sp}F(p) + \lim_{p\to+\infty}\left(s\int_0^p e^{-st}F(t)dt - F(0)\right).
\end{aligned}$$

Poichè $F(t)$ è di ordine esponenziale α risulta

$$e^{-sp}|F(p)| \le e^{-sp}Me^{\alpha p} = \underbrace{Me^{-(s-\alpha)p} \longrightarrow 0}_{p\to+\infty}$$

in quanto $s > \alpha$ quindi segue la tesi. $\square$

Osservazione 1. Se nelle ipotesi del precedente teorema $F(t)$ non è continua in $t = 0$ ma esiste il

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = F(0^+),$$

allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0^+).$$

Osservazione 2. Se $F(t)$ non è continua in $t = a$, allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) - e^{-as}(F(a^+) - F(a^-))$$

dove $F(a^-)$ ed $F(a^+)$ rappresentano i limiti della funzione a sinistra e a destra della discountinuità rispettivamente.

Teorema 1.1.4 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se $F^{(k)}(t)$ è continua in $0 \le t \le t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$, e $F^{(n)}(t)$ è generalmente continua in $0 \le t \le t_0$, allora*

$$L[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}F^{(j-1)}(0).$$

Dimostrazione. (Per induzione). Per $n = 1$ la tesi è una diretta conseguenza del Teorema 1.1.3. Supponiamo vera la tesi per k

$$L[F^{(k)}(t)] = s^k f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} F^{(j-1)}(0)$$

e dimostriamola per $k + 1$. Infatti

$$\begin{aligned} L[F^{(k+1)}(t)] &= L\left[\frac{d}{dt}F^{(k)}(t)\right] = sL[F^{(k)}(t)] - F^{(k)}(0) \\ &= s\left\{s^k f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} F^{(j-1)}(0)\right\} - F^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j+1} F^{(j-1)}(0) - F^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k+1} s^{k+1-j} F^{(j-1)}(0). \ \square \end{aligned}$$

Teorema 1.1.5 *Sia $F(t)$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, cioè $F(t+T) = F(t)$ per ogni t. Allora*

$$L[F(t)] = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} F(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{T} e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}F(t)dt \qquad (\text{posto } t = u + kT) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{T} e^{-s(u+kT)}F(u+kT)du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} \int_0^{T} e^{-su}F(u)du = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-su}F(u)du}{1-e^{-sT}}. \ \square
\end{aligned}$$

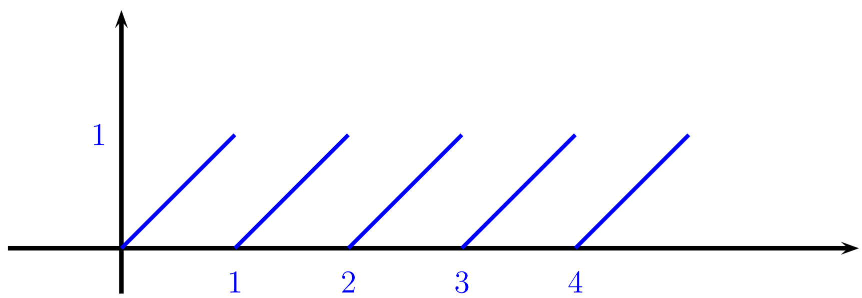
Supponiamo ora di dover calcolare la trasformata di Laplace della funzione parte decimale di t definita come

$$F(t) = t - \lfloor t \rfloor, \qquad t \geq 0,$$

dove

$$\lfloor t \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq t\}$$

è la parte intera inferiore di t. La funzione ha il seguente grafico:



pertanto $F(t)$ è una funzione periodica di periodo $T = 1$.
Indicata con $f(s)$ la sua trasformata di Laplace risulta

$$\begin{aligned}
L[F(t)] &= \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-st} F(t)dt}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 te^{-st} dt \\
&= \frac{1}{1 - e^{-s}} \left\{ \left[-\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} dt \right\} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-s}} \left\{ -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2} \left[e^{-st} \right]_0^1 \right\} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-s}} \left\{ -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \right\} \\
&= \frac{1}{s^2(1 - e^{-s})} \left[1 - e^{-s} - se^{-s} \right].
\end{aligned}$$

Proprietà asintotiche delle trasformate di Laplace

In questo paragrafo elenchiamo i principali teoremi che ilustrano il comportamento delle trasformate di Laplace agli estremi del dominio di definizione (usualmente quando $s = 0$ oppure $s \to \infty$) e l'importante teorema del valore iniziale e del valore finale che invece evidenzia il legame tra il comportamento agli estremi del dominio tra $F(t)$ ed $f(s)$.

Teorema 1.1.6 (Enunciato) *Sia $F(t)$ una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema 1.1.1 allora posto $L[F(t)] = f(s)$ risulta*

$$\lim_{s \to +\infty} f(s) = 0.$$

Teorema 1.1.7 (del Valore Iniziale e del Valore Finale) *Siano $F(t)$ ed $F'(t)$ funzioni continue in $0 \le t \le t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$ Allora se i limiti seguenti esistono si ha*

$$1) \qquad \lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{s \to +\infty} sf(s);$$

$$2) \qquad \lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{s \to 0} sf(s).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di Trasformata di Laplace si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) &= L[F(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt \\ &= \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}F(t)}{s}\right]_0^p + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt \end{aligned}$$

da cui

$$f(s) = \frac{F(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt.$$

Moltiplicando per s e passando al limite per $s \to +\infty$ si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{s\to+\infty} sf(s) &= F(0) + \lim_{s\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt \\ &= F(0) + \int_0^{+\infty} F'(t)\left[\lim_{s\to+\infty} e^{-st}\right]dt = F(0). \end{aligned}$$

Passando invece al limite per $s \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{s\to0} sf(s) &= F(0) + \lim_{s\to0}\int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt \\ &= F(0) + \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(0) = \lim_{t\to+\infty} F(t). \ \square \end{aligned}$$

Trasformata di Laplace di integrali

Teorema 1.1.8 *Sia $L[F(t)] = f(s)$, allora*

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$G(t) = \int_0^t F(u)du.$$

Osserviamo che $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. Passando alla trasformata di Laplace di ambo i membri segue:

$$L[G'(t)] = sL[G(t)] - G(0) = sL[G(t)]$$

ma poichè

$$L[G'(t)] = L[F(t)] = f(s)$$

risulta

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}. \ \square$$

Esempio 1.1.3

$$L\left[\int_0^t \sin 2u du\right] = \frac{L[\sin 2t]}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Divisione per t

Teorema 1.1.9 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t}$$

esiste ed è finito allora

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} f(u)du.$$

Dimostrazione. Sia

$$G(t) = \frac{F(t)}{t}$$

ovvero

$$F(t) = tG(t);$$

passando alle trasformate di Laplace dei due membri ed applicando il teorema 1.1.2 segue

$$L[F(t)] = L[tG(t)] = -\frac{d}{ds}L[G(t)].$$

Posto $g(s) = L[G(t)]$, abbiamo

$$f(s) = -\frac{d}{ds}g(s).$$

Integrando membro a membro tra s e p e utilizzando il teorema 1.1.6 segue:

$$\int_s^p f(u)du = -\int_s^p \frac{d}{du}g(u)du = g(s) - g(p).$$

Da quest'ultima passando al limite per $p \to +\infty$ segue la tesi. $\square$

Applicazione delle trasformate di Laplace al calcolo di integrali

Se $f(s) = L[F(t)]$ allora

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt$$

da cui

$$\lim_{s \to 0} f(s) = f(0) = \lim_{s \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{+\infty} F(t) dt.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} F(t) dt = f(0)$$

(purchè gli integrali in oggetto siano convergenti).

1.2 Antitrasformata di Laplace

Definizione 1.2.1 *Se $\mathcal{N}(t)$ è una funzione di t tale che, per ogni $t > 0$, si ha*

$$\int_0^t \mathcal{N}(u) du = 0$$

allora $\mathcal{N}$ si dice Funzione Nulla.

Esempio 1.2.1 *La funzione:*

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione nulla.

In generale ogni funzione che abbia valore nullo in tutti i punti, eccetto in un insieme numerabile, è una funzione nulla. Evidentemente

$$L[\mathcal{N}(t)] = 0.$$

Definizione 1.2.2 *Se $L[F(t)] = f(s)$ è la trasformata di Laplace di $F(t)$ allora $F(t)$ si dice Antitrasformata di Laplace di $f(s)$ (oppure Trasformata Inversa) e si scrive*

$$F(t) = L^{-1}[f(s)].$$

L^{-1} è detto Operatore Trasformata Inversa di Laplace.

Evidentemente poichè la trasformata di Laplace di una funzione nulla è 0 ne consegue che

$$L[F(t)+\mathcal{N}(t)] = L[F(t)] + L[\mathcal{N}(t)] = L[F(t)]$$

e perciò possiamo concludere che in generale due diverse funzioni possono ammettere la stessa trasformata di Laplace.
Se si escludono le funzioni nulle è però possibile stabilire un risultato di unicità, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 1.2.1 (Teorema di Lerch) *Se una funzione continua $F(t)$ ammette trasformata di Laplace allora questa è unica.* □

Nel seguito assumeremo sempre, salvo esplicita affermazione contraria, che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Lerch.

1.2.1 Proprietà dell'Antitrasformata di Laplace

1. Proprietà di linearità:
   se $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ sono le antitrasformate di Laplace di $f_1(s)$ ed $f_2(s)$, ovvero
   $$F_1(t) = L^{-1}[f_1(s)], \qquad F_2(t) = L^{-1}[f_2(s)],$$
   rispettivamente, allora
   $$L^{-1}[c_1f_1(s)+c_2f_2(s)] \;= c_1L^{-1}[f_1(s)] + c_2L^{-1}[f_2(s)], \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$
   Dimostrazione. Se
   $$L[c_1F_1(t)+c_2F_2(t)] = c_1f_1(s)+c_2f_2(s)$$
   conseguentemente
   $$c_1F_1(t)+c_2F_2(t) = L^{-1}[c_1f_1(s)+c_2f_2(s)];$$
   ma, poichè $F_1(t) = L^{-1}[f_1(s)]$ e $F_2(t) = L^{-1}[f_2(s)]$ segue la tesi. □

2. I Proprietà di traslazione:
   posto
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

si ha

$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t).$$

Dimostrazione. Poichè

$$L[e^{at}F(t)] = f(s-a)$$

allora

$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \ \square$$

In alternativa

$$\begin{aligned} f(s-a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = L[e^{at}F(t)]. \end{aligned}$$

Dunque

$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \ \square$$

3. II Proprietà di traslazione:
   posto

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

   si ha

$$L^{-1}[e^{-as}f(s)] = G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a, \end{cases}$$

   con $a > 0$.
   Dimostrazione. Da

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

si ha

$$\begin{aligned}
e^{-sa}f(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)}F(t)dt \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-su}F(u-a)du \\
&= \int_0^a e^{-st}0\ dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt.\ \square
\end{aligned}$$

4. Proprietà del cambio di scala:

   se

   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

   e $k > 0$ allora

   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right).$$

   Dimostrazione. Per la proprietà del cambio di scala delle trasformate di Laplace si ha:

   $$L[F(at)] = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right).$$

   Posto $k = 1/a$ risulta pertanto

   $$kf(ks) = L\left[F\left(\frac{t}{k}\right)\right],$$

   pertanto

   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right).\ \square$$

5. Antitrasformata di Laplace delle derivate:

   se

   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

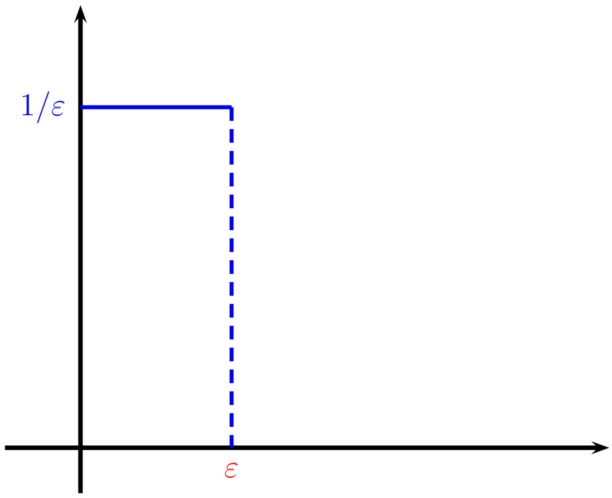
   allora

   $$L^{-1}[f^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n F(t).$$

   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. $\square$

6. Antitrasformata di Laplace di integrali:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} f(u)du\right] = \frac{F(t)}{t}.$$
   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace.

7. Prodotto per s:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   e $F(0) = 0$, allora
   $$L^{-1}[sf(s)] = F'(t).$$
   Se $F(0) \neq 0$ allora
   $$L^{-1}[sf(s) - F(0)] = F'(t),$$
   quindi
   $$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + L^{-1}[F(0)].$$
   Dobbiamo quindi determinare quale funzione ammette come trasformata una costante. Per questo definiamo la seguente funzione:
   $$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$
   dove $\varepsilon > 0$.



È chiaro che per $\varepsilon \to 0$ l'altezza del rettangolo cresce oltre ogni limite mentre la larghezza tende a 0, in modo tale però che l'area del rettangolo sia costantemente uguale a 1, cioè

$$\int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Calcoliamo la trasformata di Laplace di tale funzione.

$$\begin{aligned} L[F_\varepsilon(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F_\varepsilon(t)dt \\ &= \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}. \end{aligned}$$

Quando ε tende a zero, la funzione $F_\varepsilon(t)$ tende ad una funzione, che viene indicata con $\delta(t)$, chiamata delta di Dirac o funzione impulsiva unitaria. La traformata di Laplace della funzione $\delta(t)$ si ottiene calcolando il limite, per ε che tende a zero, della trasformata di $F_\varepsilon(t)$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0} L[F_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon} = 1.$$

Per ottenere l'ultimo passaggio è sufficiente applicare il Teorema di de L'Hopital. In definitiva

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + F(0)\delta(t) \tag{1.4}$$

La funzione $\delta(t)$ gode delle seguenti proprietà:

(i)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

(ii)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t)G(t)dt = G(0)$$

per ogni funzione continua $G(t)$;

(iii)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t-a)G(t)dt = G(a)$$

per ogni funzione continua $G(t)$ e per ogni $a > 0$;

(iv)
$$L[\delta(t-a)] = e^{-as};$$

8. Divisione per s:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t F(u)du.$$
   Dimostrazione. Basta tener conto dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. □

9. Proprietà di Convoluzione:
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   e
   $$L^{-1}[g(s)] = G(t)$$
   allora
   $$L^{-1}[f(s)g(s)] = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G.$$
   $F * G$ è detta Convoluzione di F e G.

   Dimostrazione. La tesi è dimostrata se si prova che
   $$f(s)g(s) = L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right].$$

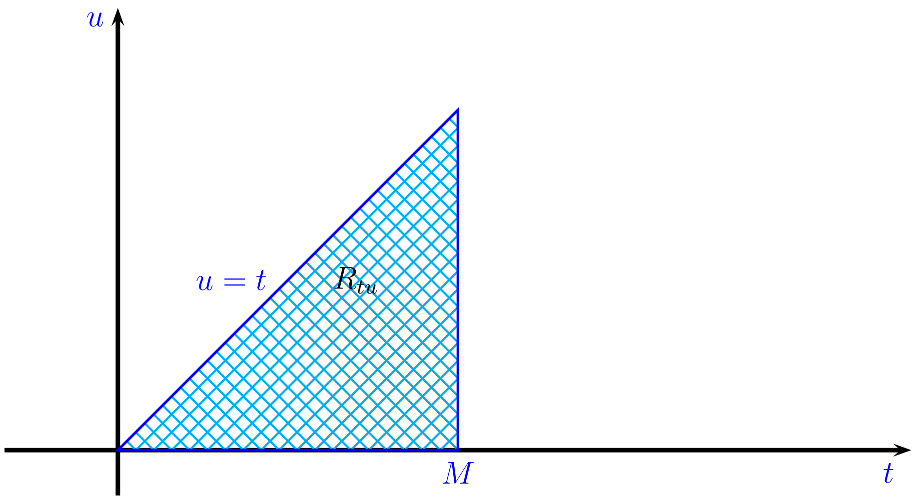
Allora

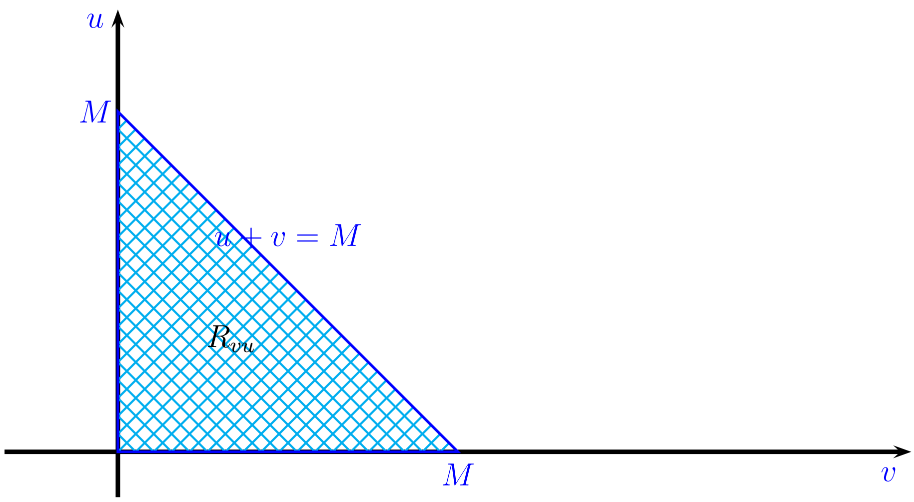
$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty} S_M \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_M &= \int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st}F(u)G(t-u)dudt. \end{aligned}$$

ed R_{tu} è la zona indicata in figura.





Consideriamo ora il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} v = t - u & \qquad t = t(v,u) = v + u \\ u = u & \qquad u = (v,u) = u. \end{cases}$$

Cosicchè la regione R_{tu} è trasformata nella regione R_{vu} in figura. Per un noto teorema sul cambiamento di variabile negli integrali doppi si ha:

$$\begin{aligned} S_M &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)dudt \\ &= \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)J(u,v)dudv. \end{aligned}$$

dove

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial v} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} & \dfrac{\partial u}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

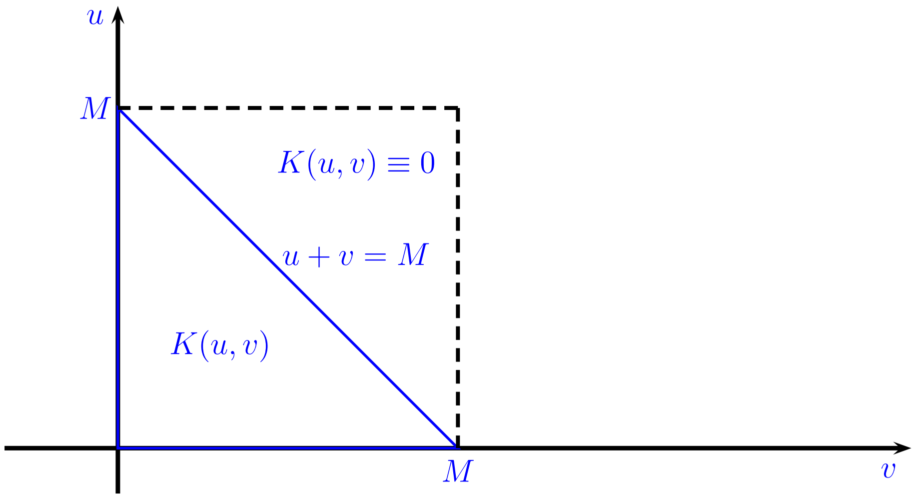
$$S_M = \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

Dunque

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

Definiamo ora la seguente funzione:

$$K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)}F(u)G(v) & u+v \leq M \\ \\ 0 & u+v > M,\ 0 \leq v \leq M. \end{cases}$$



In termini di questa funzione abbiamo

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv.$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{M\to+\infty} S_M &= \lim_{M\to+\infty} \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv \\ &= \lim_{M\to+\infty} \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv \\ &= \lim_{M\to+\infty} \int_{u=0}^{M} e^{-su}F(u)du \int_{v=0}^{M} e^{-sv}G(v)dv \\ &= \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-su}F(u)du \right) \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-sv}G(v)dv \right) = f(s)g(s). \ \square \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa, commutativa e distributiva.

1.3 Scomposizione in Frazioni Parziali

Sia $f(s)$ una funzione razionale a coefficienti reali

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{1.5}$$

tale che il grado del polinomio al denominatore sia maggiore di quello al numeratore. Il problema della **scomposizione in frazioni parziali** (detta anche in **fratti semplici**) consiste nello scrivere $f(s)$ come combinazione lineare di funzioni razionali (dette appunto frazioni parziali) del tipo

$$\frac{1}{s-\alpha_j}, \; \frac{1}{(s-\alpha_j)^2}, \; \dots, \; \frac{1}{(s-\alpha_j)^n}, \; \frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \; \frac{C}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

determinando ovviamente i coefficienti della combinazione. Il motivo di tale necessità sta nel fatto che tali funzioni ammettono tutte un'antitrasformata calcolabile in modo immediato rispetto alla rappresentazione (1.5).

Definizione 1.3.1 *Sia $s = a$ un punto di discontinuità della funzione $f(s)$ (in generale funzione di variabile complessa). Se la funzione $f(s)$ può essere scritta come*

$$f(s) = \frac{\Phi(s)}{(s-a)^n}, \quad \Phi(a) \neq 0 \tag{1.6}$$

dove $\Phi(s)$ è continua in una regione che contiene $s = a$ ed n è un intero positivo, allora $z = a$ viene detto polo di ordine n.

Vedremo che la scomposizione in frazioni parziali dipende dai poli di $f(s)$.

I Caso: La funzione $f(s)$ ammette n poli reali distinti.
Questo significa che il polinomio $Q(s)$ ha grado n ed ammette n radici reali e distinte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$. In questo caso la funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$\boxed{f(s) = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}.} \tag{1.7}$$

Per calcolare i coefficienti $A_1, \dots A_n$ ci sono diversi modi. Supponiamo sia

$$f(s) = \frac{3s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)}.$$

I poli della funzione sono $s = 0, s = \pm 1$, pertanto

$$\frac{3s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}.$$

Si riducono le frazioni al medesimo denominatore e quindi si uguagliano i coefficienti dei numeratori ottenendo un sistema di equazioni algebriche lineari che, risolto, permette di determinare i coefficienti. Quindi

$$\frac{A(s^2-1) + Bs(s+1) + Cs(s-1)}{s(s^2-1)} = \frac{(A+B+C)s^2 + (B-C)s - A}{s(s^2-1)}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si deve risolvere il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} A & +B & +C & = & 3 \\ & B & -C & = & 1 \\ -A & & & = & -1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lrrrr} A & & & = & 1 \\ & B & +C & = & 2 \\ & B & -C & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcr} A & = & 1 \\ B & = & 3/2 \\ C & = & 1/2 \end{array}\right.$$

Appare chiaro che la tecnica appena descritta potrebbe portare alla necessità di risolvere un sistema lineare di dimensioni elevate (proporzionali al numero di poli della funzione razionale) e pertanto **non dovrà essere utilizzata nella risoluzione degli esercizi**. Descriviamo ora un secondo metodo alternativo, più semplice, che evita la risoluzione di sistemi lineari e che viene detto metodo (o tecnica) dei residui.

Volendo calcolare il coefficiente A_k moltiplichiamo la relazione (1.7) per $s - \alpha_k$ ottenendo

$$f(s)(s - \alpha_k) = A_k + \sum_{j \neq k} A_j \frac{s - \alpha_k}{s - \alpha_j}.$$

Calcolando il limite per $s \to \alpha_k$ e considerando che tutti i poli α_j sono distinti si ottiene

$$A_k = \lim_{s \to \alpha_k} f(s)(s - \alpha_k).$$

Il valore A_k prende il nome di residuo della funzione $f(s)$ rispetto al polo α_j. Rappresenta il coefficiente dello sviluppo in frazioni parziali che moltiplica la funzione $(s - \alpha_k)^{-1}$, e solitamente si scrive:

$$A_k = R[f(s), \alpha_k].$$

Considerando l'esempio visto in precedenza

$$f(s) = \frac{3s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}.$$

dove

$$A = \lim_{s\to 0} sf(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s^2 + s - 1}{s^2 - 1} = 1$$

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)f(s) = \lim_{s\to 1} \frac{3s^2 + s - 1}{s(s+1)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \lim_{s\to -1}(s+1)f(s) = \lim_{s\to -1} \frac{3s^2 + s - 1}{s(s-1)} = \frac{1}{2}.$$

Appare opportuno sottolineare che il residuo relativo ad un polo semplice non può essere nullo poichè in tal caso questo il punto sarebbe una singolarità eliminabile e non un polo, infatti sarebbe violata la condizione $\Phi(a) \neq 0$ nella (1.6) della definizione 1.3.1.
II Caso: La funzione $f(s)$ ammette un polo di ordine n.
Sia

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

ed assumiamo che $f(s)$ abbia un solo polo α di ordine n (ovvero $s = \alpha$ è radice del denominatore con molteplicità n). In questo caso $f(s)$ può essere scomposta nel seguente modo

$$\boxed{f(s) = \frac{A_1}{s-\alpha} + \frac{A_2}{(s-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-\alpha)^n}.} \tag{1.8}$$

In questo caso sappiamo solo che A_1 è il residuo del polo α rispetto alla funzione $f(s)$

$$A_1 = R[f(s), \alpha].$$

Moltiplicando per $(s-\alpha)$ si ottiene

$$(s-\alpha)f(s) = A_1 + \frac{A_2}{s-\alpha} + \cdots + \frac{A_n}{(s-\alpha)^{n-1}}$$

da cui segue

$$A_2 = R[(s-\alpha)f(s), \alpha]$$

e, in generale, la proprietà che

$$\boxed{A_k = R\left[(s-\alpha)^{k-1} f(s), \alpha\right],\ k = 1, \ldots, n} \tag{1.9}$$

che, però non fornisce un metodo pratico per calcolare tali costanti. Moltiplicando (1.8) per $(s-\alpha)^n$ si ottiene

$$(s-\alpha)^n f(s) = A_1(s-\alpha)^{n-1} + A_2(s-\alpha)^{n-2} + \cdots + (s-\alpha)A_{n-1} + A_n, \tag{1.10}$$

da cui, calcolando il limite

$$A_n = \lim_{s\to\alpha} \{(s-\alpha)^n f(s)\}.$$

Derivando (1.10) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\{(s-\alpha)^n f(s)\} &= A_1(n-1)(s-\alpha)^{n-2} + (n-2)A_2(s-\alpha)^{n-3} \\ &\quad + \cdots + A_{n-1}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

da cui, calcolando il limite

$$A_{n-1} = \lim_{s\to\alpha} \frac{d}{ds}\{(s-\alpha)^n f(s)\}.$$

Derivando la relazione (1.11) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\{(s-\alpha)^n f(s)\} &= A_1(n-1)(n-2)(s-\alpha)^{n-3} + (n-2)(n-3)A_2(s-\alpha)^{n-4} \\ &\quad + \cdots + 2A_{n-2}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

da cui segue

$$A_{n-2} = \frac{1}{2} \lim_{s\to\alpha} \frac{d^2}{ds^2}\{(s-\alpha)^n f(s)\}$$

e via via fino a calcolare A_1:

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s\to\alpha} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\{(s-\alpha)^n f(s)\}. \tag{1.13}$$

La formula (1.13) fornisce quindi l'espressione generale del residuo di un polo di molteplicità n, quindi insieme alla relazione (1.9) consente di calcolare tutte le costanti A_k, $k = 1, \dots, n$.
Come esempio calcoliamo ora la scomposizione in frazioni parziali della funzione

$$f(s) = \frac{3s^3 - 2s^2 + s + 4}{(s-1)^4}.$$

Si ha

$$f(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{(s-1)^4}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
A = R\left[f(s), 1\right] \quad &= \frac{1}{3!}\lim_{s\to 1}\frac{d^3}{ds^3}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}(9s^2 - 4s + 1) \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}(18s - 4) = \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\ 18 = 3, \\
B = R\left[(s-1)f(s), 1\right] \quad &= \frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}(18s - 4) = 7, \\
C = R\left[(s-1)^2 f(s), 1\right] \quad &= \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) \\
&= \lim_{s\to 1}(9s^2 - 4s + 1) = 6, \\
D = R\left[(s-1)^3 f(s), 1\right] &= \lim_{s\to 1}(3s^3 - 2s^2 + s + 4) = 6.
\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$f(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{7}{(s-1)^2} + \frac{6}{(s-1)^3} + \frac{6}{(s-1)^4}.$$

III Caso: La funzione ammette due poli complessi coniugati.
Il caso dei poli semplici complessi coniugati rientra evidentemente nel caso

più generale già visto per i poli semplici. Tuttavia una scomposizione ad hoc per questo caso può risultare molto utile. Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati. L'estensione poi al caso di più poli semplici complessi coniugati è abbastanza immediata.
Sia
$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$
con $Q(s)$ avente una coppia di zeri semplici in $z_0 = \alpha + \iota\beta$ e $\overline{z}_0 = \alpha - \iota\beta$. Inoltre assumiamo che $P(s)$ e $Q(s)$ siano polinomi a coefficienti reali.
Allora $f(s)$ ammette la seguente scomposizione:

$$\boxed{f(s) = 2A\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - 2B\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}} \tag{1.14}$$

$$\boxed{A = \Re e\left(R[f(s), z_0]\right)} \tag{1.15}$$

e

$$\boxed{B = \Im m\left(R[f(s), z_0]\right)} \tag{1.16}$$

ovvero
$$A + \iota B = R[f(s), z_0].$$

Dalla decomposizione di f per poli semplici possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{R[f(s), z_0]}{s - z_0} + \frac{R[f(s), \overline{z}_0]}{s - \overline{z}_0} = \\ &= \frac{R[f(s), z_0]}{s - z_0} + \frac{\overline{R[f(s), z_0]}}{s - \overline{z}_0}. \end{aligned}$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$R[f(s), \overline{z}_0] = \overline{R[f(s), z_0]}.$$

Supponiamo che il polinomio $Q(s)$ possa essere scritto nella forma

$$Q(s) = (s - z_0)(s - \overline{z}_0),$$

ovvero che il coefficiente del termine di grado massimo sia pari a 1 e calcoliamo il residuo in z_0:

$$\begin{aligned} R[f(s), z_0] &= \lim_{s \to z_0} (s - z_0) f(s) \\ &= \lim_{s \to z_0} \frac{P(s)}{s - \overline{z}_0} = \frac{P(z_0)}{z_0 - \overline{z}_0} \\ &= \frac{P(z_0)}{2\iota \Im m(z_0)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\overline{R[f(s), z_0]} = \frac{\overline{P(z_0)}}{-2\iota \Im m(z_0)}.$$

Infatti se $z, w \in \mathbb{C}$ allora $(z/w)^* = z^*/w^*$. Posto

$$z = \rho e^{\iota\theta}, \qquad w = \delta e^{\iota\phi}$$

risulta

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\delta} e^{\iota(\theta - \phi)} \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{\rho}{\delta} e^{\iota(\phi - \theta)} = \frac{\rho e^{-\iota\theta}}{\delta e^{-\iota\phi}} = \frac{z^*}{w^*}.$$

Calcoliamo ora il residuo in $\overline{z}_0$:

$$\begin{aligned} R[f(s), \overline{z}_0] &= \lim_{s \to \overline{z}_0} (s - \overline{z}_0) f(s) \\ &= \lim_{s \to \overline{z}_0} \frac{P(s)}{s - z_0} = \frac{P(\overline{z}_0)}{\overline{z}_0 - z_0} \\ &= \frac{P(\overline{z}_0)}{-2\iota \Im m(z_0)}. \end{aligned}$$

Poichè $P(s)$ è un polinomio a coefficienti reali allora $P(\overline{z}_0) = \overline{P(z_0)}$ segue la tesi:

$$R[f(s), \overline{z}_0] = \overline{R[f(s), z_0]}.$$

Posto $A = \Re e(R[f(s), z_0])$ e $B = \Im m(R[f(s), z_0])$ abbiamo

$$\begin{aligned}
f(s) &= \frac{A + \iota B}{(s-\alpha) - \iota\beta} + \frac{A - \iota B}{(s-\alpha) + \iota\beta} \\
&= \frac{(A+\iota B)[(s-\alpha)+\iota\beta] + (A-\iota B)[(z-\alpha)-\iota\beta]}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\
&= \frac{A(s-\alpha) + \iota B(s-\alpha) + \iota A\beta - B\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\
&\quad + \frac{A(s-\alpha) - \iota B(s-\alpha) - \iota A\beta - B\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\
&= \frac{2A(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2B\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.
\end{aligned}$$

Esempio 1.3.1 *Scomporre in frazioni parziali con il metodo dei residui la funzione*

$$f(s) = \frac{10s - 22}{s^2 + 4s + 13}.$$

Il denominatore della funzione assegnata presenta due zeri complessi coniugati nei punti

$$s_1 = -2 + 3\iota, \qquad s_2 = -2 - 3\iota.$$

Calcoliamo ora il residuo nel polo s_1:

$$\begin{aligned}
R[f(s), s_1] &= \lim_{s\to s_1}(s-s_1)f(s) = \lim_{s\to -2+3\iota} \frac{10s-22}{s+2+3\iota} \\
&= \left[\frac{10s-22}{s+2+3\iota}\right]_{s=-2+3\iota} = \frac{-20+30\iota-22}{6\iota} \\
&= \frac{-42+30\iota}{6\iota} = 5 + 7\iota.
\end{aligned}$$

Quindi in questo caso risulta:

$$\begin{aligned}
f(s) &= 2A\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - 2B\frac{3}{(s+2)^2+9} \\
&= 10\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - 14\frac{3}{(s+2)^2+9}.
\end{aligned}$$

Abbiamo visto i tre casi separatamente ma, come vedremo in seguito, quando una funzione presenta contemporaneamente poli di natura diversa allora la scomposizione in frazioni parziali è la somma dei contributi derivanti dalla scomposizione rispetto a ciascun polo. Per esempio la funzione

$$f(s) = \frac{5s+1}{s^2(s-1)(s^2+2s+2)}$$

ammette la seguente scomposizione

$$f(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{2D(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{2E}{(s+1)^2+1}.$$

con

$$\begin{aligned} A &= R[f(s),1] \\ B &= R[f(s),0] \\ C &= R[sf(s),0] \\ D+\iota E &= R[f(s),-1+\iota]. \end{aligned}$$

1.4 Applicazioni delle trasformate di Laplace

Applicazione alle equazioni differenziali

Esempio 1.4.1 *Risolvere la seguente equazione differenziale applicando le trasformate di Laplace*

$$\begin{cases} Y''(t) + Y(t) = t \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale.

$$L[Y''(t) + Y(t)] = L[t],$$

posto $y(s) = L[Y(t)]$ risulta

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+1)y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2 = \frac{s^3-2s^2+1}{s^2}$$

e, in definitiva:

$$y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)}.$$

La funzione ammette il polo doppio $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm\iota$, pertanto la scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{2Cs}{s^2 + 1} - \frac{2D}{s^2 + 1}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R[y(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2 + 1} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{(3s^2 - 4s)(s^2 + 1) - 2s(s^3 - 2s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$B = R[sy(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2 + 1} = 1$$

$$C + \iota D = R[y(s), \iota] = \lim_{s \to \iota} \frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^2(s + \iota)} = \frac{-\iota + 3}{-2\iota} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\iota$$

Quindi

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1},$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace si ricava

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1}\right] = t + \cos t - 3\sin t.$$

Esempio 1.4.2 *Risolvere la seguente equazione differenziale del terzo ordine applicando le trasformate di Laplace*

$$Y'''(t) + Y''(t) - 5Y'(t) + 3Y(t) = e^t$$

con condizioni iniziali $Y(0) = Y'(0) = 0,$ *e* $Y''(0) = 1.$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale.

$$L[Y'''(t)] + L[Y''(t)] - 5L[Y'(t)] + 3L[Y(t)] = L[e^t]$$

posto $y(s) = L[Y(t)]$ risulta

$$s^3y(s)-s^2Y(0)-sY'(0)-Y''(0)+s^2y(s)-sY(0)-Y''(0)-5sy(s)+5Y(0)+3y(s) = \frac{1}{s-1}$$

da cui, sostituendo le condizioni iniziali

$$s^3y(s) - 1 + s^2y(s) - 5sy(s) + 3y(s) = \frac{1}{s-1}$$

e, in definitiva:

$$(s^3 + s^2 - 5s + 3)y(s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

Risolvendo l'equazione algebrica si trova l'espressione di $y(s)$:

$$y(s) = \frac{s}{(s-1)(s^3 + s^2 - 5s + 3)}.$$

Il polinomio $s^3 + s^2 - 5s + 3$ ammette come radice sicuramente $s = 1$, pertanto calcolando il quoziente tra tale polinomio ed $s - 1$ si trova la seguente scomposizione

$$s^3 + s^2 - 5s + 3 = (s-1)(s^2 + 2s - 3) = (s-1)^2(s+3).$$

La funzione $y(s)$ ammette il polo triplo $s = 1$ ed il polo semplice $s = -3$, pertanto la sua scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s+3}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R[y(s), 1] = \frac{1}{2} \lim_{s\to 1} \frac{d^2}{ds^2} \frac{s}{s+3} = \frac{1}{2} \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{s+3-s}{(s+3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{3}{(s+3)^2} = \frac{1}{2} \lim_{s\to 1} \left[-\frac{6}{(s+3)^3} \right] = -\frac{6}{128} = -\frac{3}{64} \end{aligned}$$

$$B = R[(s-1)y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{s}{s+3} = \lim_{s\to 1} \frac{3}{(s+3)^2} = \frac{3}{16}$$

$$C = R[(s-1)^2 y(s), 1] = \lim_{s \to 1} \frac{s}{s+3} = \frac{1}{4}.$$

$$D = R[y(s), -3] = \lim_{s \to -3} \frac{s}{(s-1)^3} = \frac{3}{64}.$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{3}{64(s-1)} + \frac{3}{16(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-1)^3} + \frac{3}{64(s+3)}$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace si ricava

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}\left[-\frac{3}{64(s-1)} + \frac{3}{16(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-1)^3} + \frac{3}{64(s+3)}\right] \\ &= -\frac{3}{64}e^t + \frac{3}{16}te^t + \frac{1}{8}t^2e^t + \frac{3}{64}e^{-3t}. \end{aligned}$$

Esempio 1.4.3 *Risolvere la seguente equazione differenziale applicando le trasformate di Laplace*

$$Y''(t) - 2Y'(t) + Y(t) = \sinh t$$

con condizioni iniziali $Y(0) = 1$ *e* $Y'(0) = 2$.

Applicando la trasformata di Laplace

$$L[Y''(t)] - 2L[Y'(t)] + L[Y(t)] = L[\sinh t]$$

e ponendo $y(s) = L[Y(t)]$ segue

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2sy(s) + 2Y(0) + y(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$s^2 y(s) - s - 2 - 2sy(s) + 2 + y(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$(s^2 - 2s + 1)y(s) = s + \frac{1}{s^2-1} = \frac{s^3 - s + 1}{s^2 - 1}$$

$$y(s) = \frac{s^3 - s + 1}{(s-1)^3(s+1)}.$$

La funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}$$

dove

$$A = R[y(s), -1] = \lim_{s \to -1} \frac{s^3 - s + 1}{(s-1)^3} = -\frac{1}{8};$$

$$\begin{aligned} B &= R[y(s), 1] = \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{d^2}{ds^2} \frac{s^3 - s + 1}{s+1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \frac{(3s^2-1)(s+1) - (s^3 - s + 1)}{(s+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \frac{2s^3 + 3s^2 - 2}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{(6s^2+6s)(s+1)^2 - 2(s+1)(2s^3+3s^2-2)}{(s+1)^4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \to 1} \frac{(6s^2+6s)(s+1) - 2(2s^3+3s^2-2)}{(s+1)^3} = \frac{1}{2} \frac{24-6}{8} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)y(s), 1] = \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \frac{s^3 - s + 1}{s+1} = \lim_{s \to 1} \frac{2s^3 + 3s^2 - 2}{(s+1)^2} = \frac{3}{4}.$$

$$D = R[(s-1)^2 y(s), 1] = \lim_{s \to 1} \frac{s^3 - s + 1}{s+1} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{9}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2(s-1)^3},$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace

$$Y(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{9}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t.$$

Esempio 1.4.4 *Risolvere la seguente equazione differenziale applicando le trasformate di Laplace*

$$2Y''(t) - 5Y'(t) + 3Y(t) = F(t)$$

con condizioni iniziali $Y(0) = 1$ *e* $Y'(0) = 0$, *sapendo che* $F(t)$ *è una funzione che ammette* $f(s)$ *come trasformata di Laplace.*

L'equazione differenziale assegnata è di tipo parametrico rispetto alla funzione termine noto, questo significa che la soluzione trovata sarà in funzione di $F(t)$. Applicando la trasformata di Laplace

$$2L[Y''(t)] - 5L[Y'(t)] + 3L[Y(t)] = L[F(t)]$$

e ponendo $y(s) = L[Y(t)]$ segue

$$2s^2 y(s) - 2sY(0) - 2Y'(0) - 5sy(s) + 5Y(0) + 3y(s) = f(s),$$

e, sostituendo le condizioni iniziali

$$2s^2 y(s) - 2s - 5sy(s) + 5 + 3y(s) = f(s),$$

$$(2s^2 - 5s + 3)y(s) = 2s - 5 + f(s).$$

Risolviamo ora l'equazione algebrica, ottenendo

$$y(s) = \frac{2s-5}{2s^2-5s+3} + \frac{f(s)}{2s^2-5s+3}.$$

Poichè non è noto se la funzione $f(s)$ sia razionale, definiamo le seguenti funzioni

$$g(s) = \frac{2s-5}{2s^2-5s+3}, \qquad h(s) = \frac{1}{2s^2-5s+3}$$

e procediamo alla loro scomposizione in frazioni parziali, calcolandone i poli che sono $s = 1$ ed $s = 3/2$, entrambi semplici.

$$g(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3/2}$$

dove

$$A = R[g(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{2s-5}{2(s-3/2)} = 3$$

$$B = R[g(s), 3/2] = \lim_{s\to 3/2} \frac{2s-5}{2(s-1)} = -2$$

pertanto

$$g(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-3/2}.$$

Per quello che riguarda la funzione $h(s)$:

$$h(s) = \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-3/2}$$

dove

$$C = R[h(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{1}{2(s-3/2)} = -1$$

$$D = R[h(s), 3/2] = \lim_{s\to 3/2} \frac{1}{2(s-1)} = 1$$

pertanto

$$h(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3/2}.$$

La funzione $y(s)$ può essere scritta come

$$y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-3/2} - \frac{f(s)}{s-1} + \frac{f(s)}{s-3/2}.$$

Per calcolare l'antitrasformata degli ultimi due addendi della scoposizione di $y(s)$ dobbiamo applicare il teorema di convoluzione, ottenendo infine

$$Y(t) = 3e^t - 2e^{3t/2} - \int_0^t F(u)e^{t-u}dt + \int_0^t F(u)e^{3(t-u)/2}dt.$$

Esempio 1.4.5 *Risolvere il seguente problema ai limiti applicando le trasformate di Laplace:*

$$\begin{cases} Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y(\pi/2) = -1. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto, ma interviene nelle trasformate delle derivate, poniamo arbitrariamente $Y'(0) = k$. Allora

$$L[Y''(t)] + 9L[Y(t)] = L[\cos 2t]$$

$$s^2y(s) - sY(0) - k + 9y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$s^2y(s) + 9y(s) = s + k + \frac{s}{s^2+4} = \frac{s^3+ks^2+5s+4k}{s^2+4}$$

$$y(s) = \frac{s^3+ks^2+5s+4k}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$y(s) = \frac{2As}{s^2+4} - \frac{4B}{s^2+4} + \frac{2Cs}{s^2+9} - \frac{6D}{s^2+9}$$

dove

$$\begin{aligned} A+\iota B &= R[y(s),2\iota] = \lim_{s\to 2\iota}\frac{s^3+ks^2+5s+4k}{(s+2\iota)(s^2+9)} \\ &= \frac{-8\iota-4k+10\iota+4k}{5(4\iota)} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C+\iota D &= R[y(s),3\iota] = \lim_{s\to 3\iota}\frac{s^3+ks^2+5s+k}{(s^2+4)(s+3\iota)} \\ &= \frac{-27\iota-9k+15\iota+4k}{(-5)(6\iota)} = \frac{-5k-12\iota}{-30\iota} = \frac{2}{5}-\frac{k}{6}\iota. \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace $y(s)$ risulta quindi

$$y(s) = \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{5}\,\frac{s}{s^2+9}+\frac{k}{s^2+9}.$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{k}{3}\sin 3t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2) = -1$ segue $k = 12/5$ e quindi la soluzione richiesta è:

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{4}{5}\sin 3t.$$

Esempio 1.4.6 *Risolvere il seguente problema ai limiti applicando le trasformate di Laplace:*

$$\begin{cases} Y''(t)-2Y'(t)+2Y(t) = \cos t \\ \\ Y(0)=0 \qquad Y(\pi/2)=0. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto poniamo arbitrariamente $Y'(0) = k$. Applichiamo la trasformata di Laplace al problema assegnato.

$$L[Y''(t)]-2L[Y'(t)]+2L[Y(t)] = L[\cos t]$$

$$s^2y(s)-sY(0)-k-2sy(s)+2Y(0)+2y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2-2s+2)y(s) = \frac{ks^2+s+k}{s^2+1}$$
$$y(s) = \frac{ks^2+s+k}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}.$$

La funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati $\pm\iota$ e $1\pm\iota$, quindi ha la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{2As}{s^2+1} - \frac{2B}{s^2+1} + \frac{2C(s-1)}{(s-1)^2+1} - \frac{2D}{(s-1)^2+1}$$

dove

$$\begin{aligned} A+\iota B &= R[y(s),\iota] = \lim_{s\to\iota}\frac{ks^2+s+k}{(s+\iota)(s^2-2s+2)} \\ &= \frac{\iota}{(2\iota)(1-2\iota)} = \frac{1}{2(1-2\iota)}\,\frac{1+2\iota}{1+2\iota} = \frac{1}{10}(1+2\iota) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C+\iota D &= R[y(s),1+\iota] = \lim_{s\to 1+\iota}\frac{ks^2+s+k}{(s^2+1)(s-1+\iota)} \\ &= \frac{2\iota k+1+\iota+k}{(1+2\iota)(2\iota)} = \frac{2\iota k+1+\iota+k}{2(-2+\iota)}\,\frac{-2-\iota}{-2-\iota} \\ &= \frac{1}{10}(-4\iota k+2k-2-\iota-2\iota+1-2k+\iota k) \\ &= \frac{1}{10}(-1-5\iota k-3\iota) = -\frac{1}{10}-\frac{1}{10}(5k+3)\iota. \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace $y(s)$ risulta

$$y(s) = \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\,\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{5k+3}{5}\,\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^t\cos t + \frac{5k+3}{5}\;e^t\sin t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2)=0$ segue

$$Y(\pi/2) = -\frac{2}{5} + \frac{5k+3}{5}\;e^{\pi/2} = 0$$

da cui si ricava

$$k = \frac{2 - 3e^{\pi/2}}{5e^{\pi/2}}$$

quindi la soluzione è:

$$Y(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^t \cos t + \frac{2}{5e^{\pi/2}}\, e^t \sin t.$$

Esempio 1.4.7 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}, \qquad Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 6.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 3L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = 4L[t] + 12L[e^{-t}],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$\begin{aligned} s^2 y(s) - 6 - 3sy(s) + 2y(s) &= \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}, \\ y(s)(s^2 - 3s + 2) &= 6 + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} \\ &= \frac{6s^3 + 18s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s^2 - 3s + 2)} \\ &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ha un polo doppio e tre poli semplici quindi ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= R[y(s),0] = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\ 2\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} \\
&= 2\ \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^3-2s^2-s+2} \\
&= 2\ \lim_{s\to 0}\ \frac{(9s^2+18s+2)(s^3-2s^2-s+2)-(3s^3+9s^2+2s+2)(3s^2-4s-1))}{(s^3-2s^2-s+2)^2} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = R[sy(s),0] &= \lim_{s\to 0}\ 2\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = 2 \\
C = R[y(s),-1] &= \lim_{s\to -1}\ 2\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s-1)(s-2)} = 2 \\
D = R[y(s),1] &= \lim_{s\to 1}\ 2\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-2)} = -16 \\
E = R[y(s),2] &= \lim_{s\to 2}\ 2\ \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-1)} = 11.
\end{aligned}$$

Quindi

$$y(s) = \frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{16}{s-1}+\frac{11}{s-2}.$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$Y(t) = 3+2t+2e^{-t}-16e^{t}+11e^{2t}.$$

Esempio 1.4.8 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t)-4Y'(t)+3Y(t) = F(t), \qquad Y(0)=1, \qquad Y'(0)=0,$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace $f(s)$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)]-4L[Y'(t)]+3L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2y(s) - s - 4sy(s) + 4 + 3y(s) = f(s)$$

$$(s^2 - 4s + 3)y(s) = s - 4 + f(s)$$

quindi

$$y(s) = \frac{s-4}{s^2 - 4s + 3} + \frac{f(s)}{s^2 - 4s + 3}.$$

Osserviamo che possiamo trasformare in frazioni parziali il primo addendo a secondo membro, in quanto è indipendente da $F(t)$, per il secondo addendo possiamo scomporre in frazioni parziali la funzione che non dipende da $f(s)$ e per antitrasformare il risultato applichiamo il teorema di convoluzione. Quindi

$$y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} + f(s)\left[\frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-1}\right].$$

Calcoliamo i coefficienti $A, B, C,$ e D:

$$A = \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{1}{2(s-3)} + \frac{3}{2(s-1)} + f(s)\left[\frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s-1)}\right].$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza applicando il teorema di convoluzione

$$\begin{aligned} Y(t) &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + F(t) * e^{3t} + F(t) * e^t \\ &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + \int_0^t F(u) * e^{3(t-u)}du + \int_0^t F(u)e^{t-u}du. \end{aligned}$$

Esempio 1.4.9 *Utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale:*

$$Y''(t) + 4Y(t) = F(t), \qquad Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] + 4L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = L[F(t)]$$

$$s^2y(s) - 1 + 4y(s) = L[F(t)]$$

A questo punto si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione $F(t)$ applicando direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1 - e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

L'equazione algebrica diventa

$$(s^2 + 4)y(s) = 1 + \frac{1 - e^{-s}}{s} = \frac{s + 1 - e^{-s}}{s}.$$

da cui

$$y(s) = \frac{s + 1 - e^{-s}}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 4)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

e scomponiamo in frazioni parziali $g(s)$, che ammette un polo semplice $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm 2\iota$:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2C\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

dove

$$A = R[g(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{4}$$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$ e inoltre

$$B + \iota C = R[g(s), 2\iota] = \lim_{s \to 2\iota} \frac{1}{s(s+2\iota)} = -\frac{1}{8}.$$

In definitiva

$$g(s) = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}$$

e quindi

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{4s} + \frac{se^{-s}}{4(s^2+4)}.$$

L'antitrasformata delle due funzioni dove compare il fattore e^{-s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4s}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

e

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4(s^2+4)}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

La soluzione $Y(t)$ è quindi:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

da cui semplificando ulteriormente:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Esempio 1.4.10 *Risolvere*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 2X(t) - 3Y(t) \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = Y(t) - 2X(t) \\[2ex] X(0) = 8 \qquad Y(0) = 3. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ambo i membri abbiamo:

$$\begin{cases} L\left[\dfrac{dX}{dt}\right] = 2L[X(t)] - 3L[Y(t)] \\[2ex] L\left[\dfrac{dY}{dt}\right] = L[Y(t)] - 2L[X(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - 8 & = 2x(s) - 3y(s) \\[2ex] sy(s) - 3 & = y(s) - 2x(s) \end{cases}$$

dove $x(s)$ e $y(s)$ sono le trasformate di Laplace di $X(t)$ e $Y(t)$ rispettivamente. Equivalentemente

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 3y(s) = 8 \\[2ex] 2x(s) + (s-1)y(s) = 3. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, per esempio con la regola di Cramer, si trova

$$x(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\[2ex] 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\[2ex] 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$x(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-4}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R[x(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{8s-17}{s-4} = 5 \\ B &= R[x(s), 4] = \lim_{s\to 4} \frac{8s-17}{s+1} = 3, \end{aligned}$$

quindi

$$x(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

e la prima componente della soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} X(t) &= L^{-1}[x(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right] \\ &= 5e^{-t} + 3e^{4t}. \end{aligned}$$

Per la funzione $y(s)$ risulta

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s-2) & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-4}$$

dove

$$\begin{aligned} C &= R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{3s-22}{s-4} = 5 \\ D &= R[y(s), 4] = \lim_{s\to 4} \frac{3s-22}{s+1} = -2, \end{aligned}$$

quindi

$$y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

quindi la seconda componente della soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}\right] \\ &= 5e^{-t} - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Esempio 1.4.11 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} X'(t) - Z(t) = e^{-t} \\ Y'(t) + Z'(t) = 1 \\ -X(t) + Y'(t) = 0 \\ X(0) = -2 \qquad Y(0) = Z(0) = 0. \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema ponendo $x(s) = L[X(t)]$, $y(s) = L[Y(t)]$ e $z(s) = L[Z(t)]$:

$$\begin{cases} L[X'(t)] - L[Z(t)] = L[e^{-t}] \\ L[Y'(t)] + L[Z'(t)] = L[1] \\ -L[X(t)] + L[Y'(t)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) - z(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) = \dfrac{1}{s} \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) + 2 - z(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \dfrac{1}{s} \\ sy(s) - x(s) = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo $x(s)$ dalla terza equazione e sostituiamo la sua espressione nelle altre due:

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ s^2y(s) - z(s) = \dfrac{1}{s+1} - 2 = -\dfrac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ z(s) = s^2y(s) + \dfrac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + s^3y(s) + \dfrac{2s^2+s}{s+1} = \dfrac{1}{s}. \end{cases}$$

Ora consideriamo solo la terza equazione.

$$s(s^2+1)y(s) = -\frac{2s^2+s}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s(s+1)}$$

Da cui

$$y(s) = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s^2(s^2+1)(s+1)}$$

quindi i poli di $y(s)$ sono 0 (polo doppio), -1 e $\pm\iota$ pertanto ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2D(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2E\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

dove $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, mentre i coefficienti sono

$$A = R[y(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{1+s-s^2-2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 0$$

$$B = R[sy(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{1+s-s^2-2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 1$$

$$C = R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{1+s-s^2-2s^3}{s^2(s^2+1)} = -\frac{1}{2}$$

mentre

$$\begin{aligned}
D + \iota E &= R[y(s), \iota] = \lim_{s\to\iota} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{s^2(s+\iota)(s+1)} \\
&= \frac{1 + \iota + 1 + 2\iota}{-2\iota(\iota + 1)} \\
&= -\frac{3\iota + 2}{2(\iota - 1)} = \frac{1}{4}(-1 + 5\iota).
\end{aligned}$$

Quindi $D = -1/4$ ed $E = 5/4$, cosicchè risulta

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{5}{2(s^2+1)}$$

la cui antitrasformata di Laplace è

$$Y(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t.$$

Per calcolare $X(t)$ potremmo ripetere un procedimento analogo (lo studente può farlo per esecizio verificando alla fine che il risultato è lo stesso) oppure ricavare $X(t)$ dalla terza equazione del sistema di partenza poichè

$$X(t) = Y'(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{5}{2}\cos t$$

e quindi calcolare $Z(t)$ dalla prima equazione

$$Z(t) = X'(t) - e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t.$$

Esempio 1.4.12 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases}
X'(t) + 2Y(t) = 2X(t) + e^t \\
Y'(t) - X(t) = -Y(t) - e^t \\
X(0) = -1 \qquad Y(0) = 1.
\end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema:

$$\begin{cases} L[X'(t)] + 2L[Y(t)] = 2L[X(t)] + L[e^t] \\ \\ L[Y'(t)] - L[X(t)] = -L[Y(t)] - L[e^t]. \end{cases}$$

Poniamo, come al solito, $x(s) = L[X(t)]$ e $y(s) = L[Y(t)]$:

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) + 2y(s) = 2x(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = -y(s) - \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 2y(s) = -1 + \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{2-s}{s-1} \\ \\ -x(s) + (s+1)y(s) = 1 - \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{s-2}{s-1} \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema lineare usiamo la regola di Cramer. Calcoliamo prima il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s-2)(s+1) + 2 = s^2 - s = s(s-1)$$

quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2-s}{s-1} & 2 \\ \\ \dfrac{s-2}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{s(s-1)} \\ &= \frac{(s+1)(2-s) - 2(s-2)}{s(s-1)^2} = \frac{6-s-s^2}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = R[x(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{6-s-s^2}{(s-1)^2} = 6$$

$$\begin{aligned} B = R[x(s),1] &= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\,\frac{6-s-s^2}{s} \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{(-1-2s)s-(6-s-s^2)}{s^2} = -7 \end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)x(s),1] = \lim_{s\to 1} \frac{6-s-s^2}{s} = 4.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{7}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per $y(s)$:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s-2 & \dfrac{2-s}{s-1} \\ -1 & \dfrac{s-2}{s-1} \end{vmatrix}}{s(s-1)} \\ &= \frac{(s-2)^2+(2-s)}{s(s-1)^2} = \frac{s^2-5s+6}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = R[y(s),0] = \lim_{s\to 0} \frac{s^2-5s+6}{(s-1)^2} = 6$$

$$\begin{aligned} B = R[y(s),1] &= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\frac{s^2-5s+6}{s} \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{(2s-5)s-(s^2-5s+6)}{s^2} = -5 \end{aligned}$$

$$C = R[(s-1)y(s),1] = \lim_{s\to 1} \frac{s^2-5s+6}{s} = 2.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

e la soluzione del sistema di equazioni differenziali è

$$\begin{aligned} X(t) &= 6 - 7e^t + 4te^t \\ Y(t) &= 6 - 5e^t + 2te^t. \end{aligned}$$

Applicazione alle equazioni integrali e integro-differenziali

Un'equazione integrale è un'equazione avente la forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du \tag{1.17}$$

dove $F(t)$ e $K(u,t)$ sono date, a e b sono costanti note o funzioni di t e la funzione $Y(t)$ che compare sotto segno di integrale deve invece essere determinata. La funzione $K(u,t)$ è detta anche nucleo dell'equazione integrale. Se a e b sono delle costanti, l'equazione è detta anche equazione integrale di Fredholm. Se a è una costante, mentre $b = t$, l'equazione è detta equazione integrale di Volterra.
È inoltre possibile trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione integrale.
Un'equazione integrale particolarmente importante è la seguente

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du.$$

Quest'equazione, di tipo convoluzione, può essere scritta nella forma

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t).$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, assumendo che esistano $L[F(t)] = f(s)$ e $L[K(t)] = k(s)$, si ha

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \qquad \text{o} \qquad \boxed{y(s) = \frac{f(s)}{1-k(s)}.}$$

La soluzione può essere trovata applicando l'antitrasformata di Laplace.
Se nell'equazione (1.17) si trova $Y'(t)$ oppure una derivata di ordine superiore allora l'equazione è detta integro-differenziale, la cui risoluzione tuttavia, avviene nello stesso modo.

Esempio 1.4.13 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = \cosh 2t + \int_0^t (t-u)Y(u)du.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo, al solito, $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[\cosh 2t] + L\left[\int_0^t (t-u)Y(u)du\right]$$

Il secondo addendo a secondo membro è proprio il prodotto di convoluzione tra le funzioni $G(t) = t$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate delle funzioni t e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{s}{s^2-4} + \frac{y(s)}{s^2}$$

quindi

$$y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2-4}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2-4)}.$$

I poli di $y(s)$ sono ± 1 e ± 2 pertanto $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A = R[y(s), 1] = \lim_{s\to 1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$B = R[y(s), -1] = \lim_{s\to -1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$C = R[y(s), 2] = \lim_{s\to 2} \frac{s^3}{(s+2)(s^2-1)} = \frac{2}{3}.$$

Si può infine agevolmente verificare che $D = C$ quindi

$$y(s) = -\frac{1}{6(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} + \frac{2}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+2)}.$$

Quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

Esempio 1.4.14 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) = \int_0^t \cos(t-u)Y(u)du$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] = L\left[\int_0^t \cos(t-u)Y(u)du\right]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 = \frac{sy(s)}{s^2+1}$$

$$sy(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = 1$$

$$y(s) = \frac{s^2+1}{s^3}.$$

In questo caso la scomposizione in frazioni parziali è immediata

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

e anche la soluzione si trova semplicemente

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Esempio 1.4.15 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = 1 + te^t + 2\int_0^t Y(u)\cos(t-u)du.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y(t)] = L[1] + L[te^t] + 2L\left[\int_0^t Y(u)\cos(t-u)du\right]$$

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2sy(s)}{s^2+1} \\
y(s) - \frac{2sy(s)}{s^2+1} &= \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} \\
y(s)\left(1 - \frac{2s}{s^2+1}\right) &= \frac{s^2-2s+1+s}{s(s-1)^2} \\
\frac{s^2-2s+1}{s^2+1}y(s) &= \frac{s^2-s+1}{s(s-1)^2} \\
y(s) = \frac{(s^2-s+1)(s^2+1)}{s(s-1)^4} &= \frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{s(s-1)^4}.
\end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette il polo quadruplo $s = 1$ ed il polo semplice $s = 0$, pertanto la sua scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} + \frac{E}{(s-1)^4}$$

dove

$$A = R[y(s), 0] = \lim_{s\to 0} \frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{(s-1)^4} = 1.$$

$$
\begin{aligned}
B &= R[y(s),1] = \frac{1}{3!}\lim_{s\to 1}\frac{d^3}{ds^3}\ \frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{s} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\ \frac{(4s^3-3s^2+4s-1)s-(s^4-s^3+2s^2-s+1)}{s^2} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\ \frac{3s^4-2s^3+2s^2-1}{s^2} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\ \frac{(12s^3-6s^2+4s)s-2(3s^4-2s^3+2s^2-1)}{s^3} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\ \frac{6s^4-2s^3+2}{s^3} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{(24s^3-6s^2)s^3-3s^2(6s^4-2s^3+2)}{s^6} = \frac{18-18}{6} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= R[(s-1)y(s),1] = \frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\ \frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{s} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{6s^4-2s^3+2}{s^3} = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= R[(s-1)^2y(s),1] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\ \frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{s} \\
&= \lim_{s\to 1}\frac{3s^4-2s^3+2s^2-1}{s^2} = 2
\end{aligned}
$$

$$
E = R[(s-1)^3y(s),1] = \lim_{s\to 1}\frac{s^4-s^3+2s^2-s+1}{s} = 1.
$$

Quindi

$$
y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^4},
$$

da cui, applicando l'antitrasformata di Laplace si ricava

$$
Y(t) = 1 + 3te^t + t^2e^t + \frac{1}{3}t^3e^t.
$$

Esempio 1.4.16 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) + 2Y(t) + 2\int_0^t Y(t-u)du = \cos t$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione e poniamo, come al solito, $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] + 2L\left[\int_0^t Y(t-u)du\right] = L[\cos t]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 + 2y(s) + \frac{2}{s}y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{s^2+2s+2}{s}y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+1}$$

da cui si ricava $y(s)$

$$y(s) = \frac{s^3+s^2+s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}.$$

La funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati

$$s_{1/2} = \pm\iota, \qquad s_{3/4} = -1 \pm \iota$$

quindi la scomposizione in frazioni parziali è la seguente

$$y(s) = \frac{2As}{s^2+1} - \frac{2B}{s^2+1} + \frac{2C(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{2D}{(s+1)^2+1}.$$

Calcoliamo i residui

$$\begin{aligned}
A + \iota B &= R[y(s), \iota] = \lim_{s\to\iota} \frac{s^3+s^2+s}{(s+\iota)(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{-\iota - 1 + \iota}{2\iota(-1+2\iota+2)} = \frac{-1}{2\iota(1+2\iota)} \\
&= \frac{1}{2\iota(2-\iota)}\,\frac{2+\iota}{2+\iota} = \frac{1}{10}(2+\iota).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C + \iota D &= R[y(s), -1+\iota] = \lim_{s \to -1+\iota} \frac{s^3+s^2+s}{(s^2+1)(s+1+\iota)} \\
&= \frac{2\iota + 2 - 2\iota - 1 + \iota}{(1-2\iota)2\iota} = \frac{1+\iota}{2(2+\iota)} \frac{2-\iota}{2-\iota} \\
&= \frac{1}{10}(2 - \iota + 2\iota + 1) = \frac{3}{10} + \frac{\iota}{10}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
y(s) = \frac{2}{5} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{5} \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{5} \frac{1}{(s+1)^2+1}.
$$

mentre la soluzione è

$$
Y(t) = \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \frac{3}{5} e^{-t} \cos t - \frac{1}{5} e^{-t} \sin t.
$$

Applicazioni ai circuiti elettrici

Un circuito elettrico, detto di tipo LRC, (vedere Figura 1.1) è formato dai seguenti elementi, collegati in serie con un interruttore:

1. un generatore che fornisce una forza elettromotrice f.e.m. E (misurata in *Volt*);

2. un resistore avente resistenza R (misurata in *Ohm*);

3. un induttore avente induttanza L (misurata in *Henry*);

4. un condensatore avente capacità C (misurata in *Farad*).

Quando si chiude il circuito, una carica Q (misurata in *Coulomb*) si trasferisce alle armature del condensatore. Il flusso di tale carica è definito da

$$
\frac{dQ}{dt} = I
$$

ed è detto *corrente* (misurata in *Ampere* se il tempo è misurato in secondi). Un importante problema da risolvere in questi circuiti è determinare la carica del condensatore e la corrente in funzione del tempo. A tal fine si introduce la caduta di potenziale (o di tensione) attraverso gli elementi del circuito:

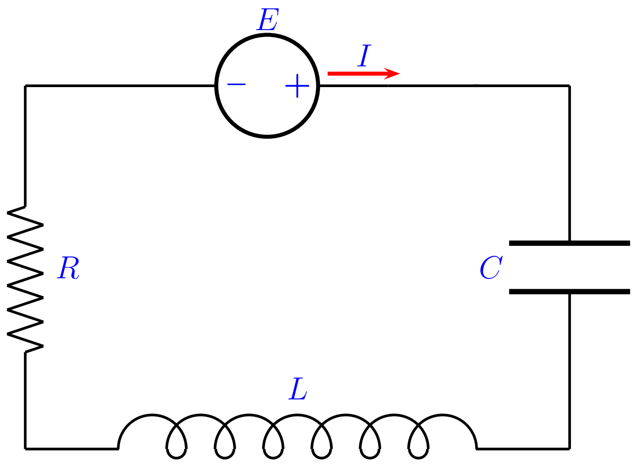


Figura 1.1: Esempio di circuito LRC.

a) caduta di potenziale attraverso un resistore:

$$RI = R\frac{dQ}{dt};$$

b) caduta di potenziale attraverso un induttore:

$$L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2};$$

c) caduta di potenziale attraverso un condensatore:

$$\frac{Q}{C}$$

d) Caduta di potenziale attraverso un generatore:

$$-E.$$

Valgono le seguenti Leggi di Kirchhoff:

1. la somma algebrica delle correnti che fluiscono verso un nodo qualunque (per esempio A nella Figura 1.2) è sempre uguale a zero;

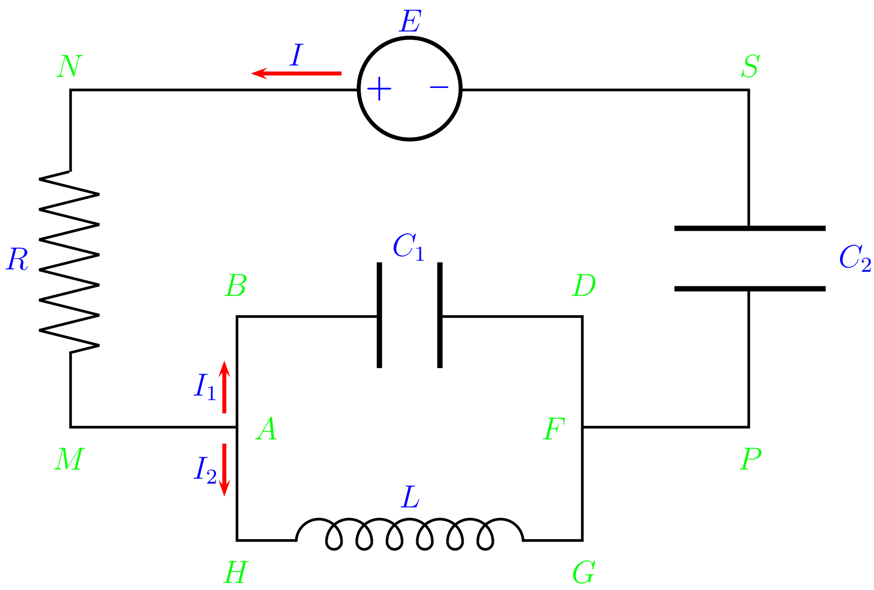


Figura 1.2:

2. la somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un qualsiasi circuito chiuso (per esempio $ABDFGHA$ nella Figura 1.2) è sempre uguale a zero.

Tenendo conto delle relazioni a), b), c) e d) e della seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito in Figura 1.1 risulta:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} - E = 0$$

ovvero

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E.$$

Esempio 1.4.17 *Un induttore L di 2 Henry, un resistore R di 16 Ohm ed un condensatore C di 0.02 Farad sono collegati in serie con una f.e.m. di E Volt, come mostrato in Figura 1.3. Per $t = 0$ la carica del condensatore e la corrente nel circuito sono nulle. Determinare la carica e la corrente in ogni istante $t > 0$ se*

a) $E = 300$ *Volt;*

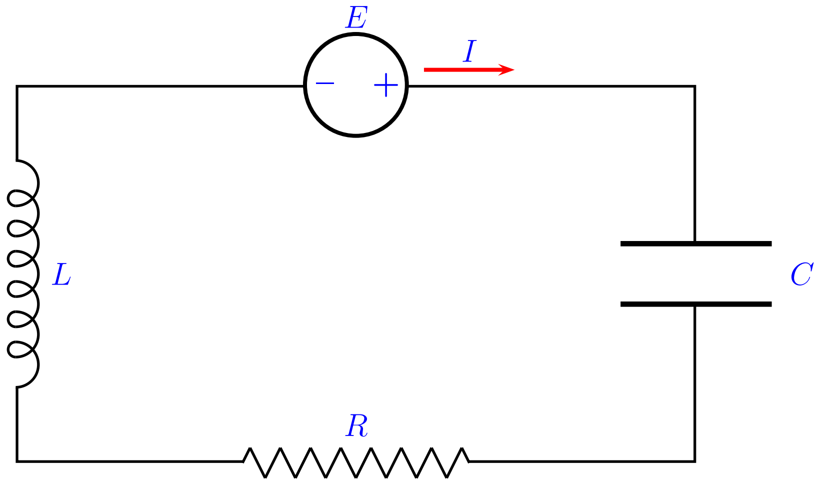


Figura 1.3: Circuito per l'Esempio 1.4.17.

b) $E(t) = 50 \sin 3t$ *Volt.*

Applicando la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere

$$2\frac{dI}{dt} + 16I(t) + \frac{Q(t)}{0.02} = E.$$

ovvero, tenendo conto che $I(t) = dQ/dt$:

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{0.02} = E. \tag{1.18}$$

Le condizioni iniziali sono:

$$Q(0) = 0 \qquad\qquad I(0) = Q'(0) = 0. \tag{1.19}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri di (1.18) segue:

$$2L\left[\frac{d^2Q}{dt^2}\right] + 16L\left[\frac{dQ}{dt}\right] + \frac{1}{0.02}L[Q(t)] = L[E]. \tag{1.20}$$

a) Posto $q(s) = L[Q(t)]$ l'equazione (1.20) si scrive

$$(s^2q(s) - sQ(0) - Q'(0)) + 8(sq(s) - Q(0)) + 25q(s) = \frac{150}{s}.$$

Isolando $q(s)$ e tendendo conto delle condizioni iniziali (1.19) si ha:

$$q(s) = \frac{150}{s(s^2+8s+25)}.$$

I poli della funzione sono $s = 0$ ed $s = -4 \pm 3\iota$ quindi la funzione ammette la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$q(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{6C}{(s+4)^2+9}$$

dove

$$A = R[q(s),0] = \lim_{s\to 0} \frac{150}{s^2+8s+25} = 6$$

e

$$\begin{aligned} B+\iota C &= R[q(s),-4+3\iota] = \lim_{s\to -4+3\iota} \frac{150}{s(s+4+3\iota)} \\ &= \frac{150}{(-4+3\iota)6\iota} = -\frac{25}{3+4\iota}\,\frac{3-4\iota}{3-4\iota} = -3+4\iota, \end{aligned}$$

quindi

$$q(s) = \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{24}{(s+4)^2+9}.$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace risulta

$$\begin{aligned} Q(t) &= 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t \\ I(t) &= Q'(t) = 50e^{-4t}\sin 3t; \end{aligned}$$

b) Se $E(t) = 50\sin 3t$ la (1.20) diventa

$$(s^2+8s+25)q(s) = \frac{150}{s^2+9}$$

per cui

$$q(s) = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

cosicchè la funzione ammette due coppie di poli complessi coniugati $s = \pm 3\iota$ e $s = -4 \pm 3\iota$ pertanto lo sviluppo in frazioni parziali è il seguente

$$q(s) = \frac{2As}{s^2+9} - \frac{6B}{s^2+9} + \frac{2C(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{6D}{(s+4)^2+9}.$$

Calcoliamo le costanti

$$\begin{aligned}
A + \iota B &= R[q(s), 3\iota] = \lim_{s\to 3\iota} \frac{150}{(s+3\iota)(s^2+8s+25)} \\
&= \frac{150}{6\iota(16+24\iota)} \frac{25}{8\iota(2+3\iota)} = \frac{25}{8\iota(-3+2\iota)} \frac{-3-2\iota}{-3-2\iota} \\
&= \frac{25}{104}(-3-2\iota); \\
C + \iota D &= R[q(s), -4+3\iota] = \lim_{s\to -4+3\iota} \frac{150}{(s^2+9)(s-4+3\iota)} \\
&= \frac{150}{6\iota(16-24\iota)} \\
&= \frac{25}{8\iota(2-3\iota)} = \frac{25}{8\iota(3-2\iota)} \frac{3+2\iota}{3+2\iota} \\
&= \frac{25}{104}(-3-2\iota),
\end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
q(s) &= -\frac{75}{52} \frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26} \frac{1}{s^2+9} + \frac{75}{52} \frac{s+4}{(s+4)^2+9} + \\
&\quad -\frac{75}{26} \frac{1}{(s+4)^2+9}.
\end{aligned}$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\cos 3t - \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t \\
&= \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t - 2\sin 3t) \\
I(t) &= Q'(t) = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(\sin 3t + 18\cos 3t).
\end{aligned}$$

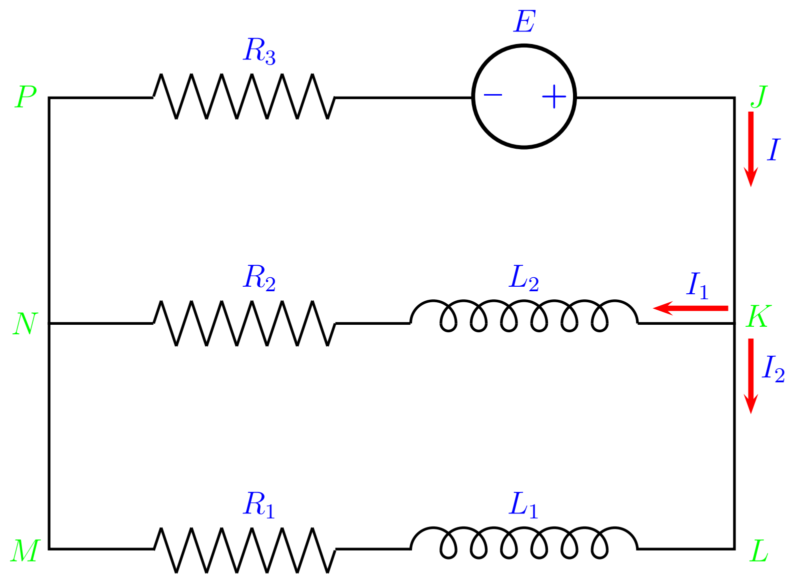


Figura 1.4: Circuito per l'Esempio 1.4.18.

Esempio 1.4.18 *Assegnata la rete in Figura 1.4 determinare la corrente nei vari rami assumendo nulle le correnti iniziali e considerando che:*

$$R_1 = 20\Omega, \qquad R_2 = 10\Omega, \qquad R_3 = 30\Omega$$

e inoltre

$$E = 110V, \qquad L_1 = 4H, \qquad L_2 = 2H.$$

Percorriamo i circuiti chiusi $KLMNK$ e $NPJKN$ in senso orario. Percorrendo questi circuiti consideriamo le cadute di tensione positive quando si va contro corrente. Un aumento di tensione è considerato come una caduta di tensione negativa. Se I è la corrente nel circuito $NPJKN$ questa si divide, nel nodo K, in I_1 e I_2 in modo tale che $I = I_1 + I_2$ (prima legge di Kirchhoff). Applichiamo ora la seconda legge di Kirchhoff ai circuiti $KLMNK$ e

$NPJKN$, ottenendo rispettivamente:

$$\begin{cases} -10I_1(t) - 2\dfrac{dI_1}{dt} + 4\dfrac{dI_2}{dt} + 20I_2(t) = 0 \\ \\ 30I(t) - 110 + 2\dfrac{dI_1}{dt} + 10I_1(t) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -5I_1(t) - \dfrac{dI_1}{dt} + 2\dfrac{dI_2}{dt} + 10I_2(t) = 0 \\ \\ \dfrac{dI_1}{dt} + 20I_1(t) + 15I_2(t) = 55 \end{cases}$$

con condizioni iniziali $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Passando alle trasformate di Laplace segue:

$$\begin{cases} -5i_1(s) - (si_1(s) - i_1(s)(0)) + 2(si_2(s) - I_2(0)) + 10i_2(s) = 0 \\ \\ (si_1(s) - I_1(0)) + 20i_1(s) + 15i_2(s) = \dfrac{55}{s} \end{cases}$$

e, sostituendo le condizioni iniziali,

$$\begin{cases} (s+5)i_1(s) - (2s+10)i_2(s) = 0 \\ \\ (s+20)i_1(s) + 15i_2(s) = \dfrac{55}{s} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} i_1(s) = 2i_2(s) \\ \\ i_2(s) = \dfrac{55}{s(2s+55)}. \end{cases}$$

La funzione $i_2(s)$ ammette come scomposizione in frazioni parziali

$$i_2(s) = \frac{A}{s} + \frac{C}{s - 55/2}$$

dove

$$A = R[i_2(s), 0] = \lim_{s \to 0} \frac{55}{2s+55} = 1$$

$$B = R[i_2(s), -55/2] = \lim_{s \to -55/2} \frac{55}{2s} = -1$$

quindi

$$i_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 55/2}$$

che ammette come antitrasformata di Laplace

$$\begin{aligned} I_2(t) &= 1 - e^{-55t/2} \\ I_1(t) &= 2 - 2e^{-55t/2} \\ I(t) &= I_1(t) + I_2(t) = 3 - 3e^{-55t/2}. \end{aligned}$$

Capitolo 2

Trasformate di Fourier

2.1 Introduzione

La motivazione principale nell'introduzione delle trasformate di Fourier sta nel tentativo di utilizzare uno strumento che consentisse di calcolare, in forma chiusa, le soluzioni di alcune classiche equazioni alle derivate parziali (storicamente dell'equazione del calore). Infatti, a differenza di quello che accade per le equazioni differenziali ordinarie le tecniche analitiche per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali risultano essere scarsamente generalizzabili, ovvero ogni tipo di equazione richiede un particolare metodo. Alla base delle trasformate di Fourier c'è la teoria delle serie di Fourier, una tecnica analitica di rappresentazione delle funzioni di variabile reale alternativa alle serie di Taylor, sicuramente più semplici ma di utilità reale non molto elevata. Lo sviluppo in serie di Fourier, che solo apparentemente sembra applicabile ad una classe molto ristretta di funzioni (quelle periodiche), consente di rappresentare, appunto attraverso opportune trasformazioni, le soluzioni di tali equazioni alle derivate parziali, definite su intervalli limitati. La generalizzazione delle serie consente, attraverso il Teorema Integrale di Fourier, di rappresentare in forma integrale le soluzioni di equazioni alle derivate parziali definite su domini illimitati.

2.2 Serie di Fourier

È ben noto che una buon numero di funzioni sia rappresentabile, in maniera più o meno complicata, in serie di potenze. Comunque questo non è il solo modo per sviluppare in serie funzioni di variabile reale. Un modo alternativo è l'espressione di una funzione come somma di seni e coseni. Tali serie prendono il nome di serie di Fourier. Un punto di forza di tali sviluppi in serie è che esistono anche se le funzioni presentano punti di discontinuità e non sono differenziabili in qualche punto del dominio. Inoltre le funzioni trigonometriche sono facilmente differenziabili ed integrabili. Può meravigliare il fatto che una qualsiasi funzione possa essere sviluppata, in un determinato intervallo, come somma di funzioni pari e dispari, tuttavia consideriamo che se $F(x)$ può essere scritta nel seguente modo:

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x) + F(x) - F(-x)]$$

Posto

$$P(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]; \qquad D(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$$

risulta $F(x) = P(x) + D(x)$ con $P(x)$ funzione pari e $D(x)$ funzione dispari. Per iniziare lo studio delle serie di Fourier introduciamo le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni di variabile reale per poter essere sviluppabili in serie. Tali condizioni sono dette condizioni di Dirichlet e sono sufficienti per la convergenza della serie di Fourier:

1. $F(x)$ è definita per ogni $x \in]c, c + 2l[$;

2. $F(x)$ e $F'(x)$ sono generalmente continue per $x \in]c, c + 2l[$;

3. $F(x + 2l) = F(x)$, cioè $F(x)$ è periodica di periodo $2l$.

Allora in ogni punto di continuità di F si ha

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{2.1}$$

mentre in ogni punto di discontinuità si ha

$$\frac{1}{2}\left(F(x + 0) + F(x - 0)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \tag{2.2}$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x)dx, \tag{2.3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

e

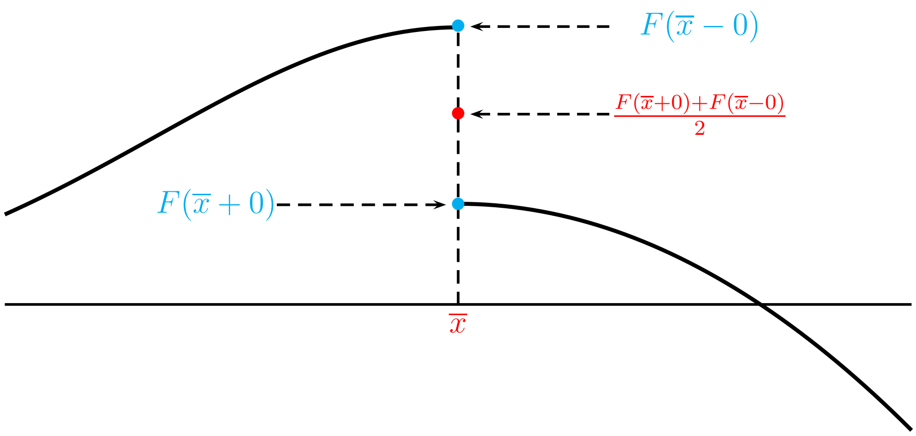
$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

e $F(x+0)$ e $F(x-0)$ indicano rispettivamente i limiti destro e sinistro nella discontinuità. Infatti il limite di $F(x)$ da destra si indica spesso con

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x+0).$$

Analogamente il limite di $F(x)$ da sinistra si indica con

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x-\varepsilon) = F(x-0).$$



La serie (2.1), o (2.2), con i coefficienti definiti da (2.3), (2.4) e (2.5), si chiama serie di Fourier di $F(x)$. In molti casi risulta $c = 0$ oppure $c = -l$. La serie di Fourier converge ad $F(x)$ in ogni punto di continuità della funzione, mentre nei punti di discontinuità la serie converge al valor medio del salto. Nelle pagine seguenti considereremo sempre il caso $c = -l$.
Prima di dimostrare quanto appena affermato consideriamo ora alcuni risultati preliminari che risulteranno molto utili nell'applicazione delle serie e delle trasformate di Fourier.

Lemma 2.2.1 *Se $k \in \mathbb{N}^*$ allora*

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}dx = 0.$$

Dimostrazione. Per $k \in \mathbb{N}^*$ abbiamo

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{l}{k\pi} \int_{-l}^{l} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{k\pi x}{l} \right) dx = -\frac{l}{k\pi} \left[\cos \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^{l} = 0$$

e

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^{l} \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^{l} = 0. \square$$

Lemma 2.2.2 *Risulta, per $m, n \in \mathbb{N}^*$:*

a)

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \\ l & m = n \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$\int_{-l}^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Dimostrazione. a) Richiamiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \tag{2.6}$$

e

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \tag{2.7}$$

Sommando e sottraendo (2.6) a (2.7) seguono rispettivamente

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right] \\ \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Per $m \neq n$ la a) può essere riscritta

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^{l} \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \int_{-l}^{l} \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0$$

per il lemma 2.2.1. Analogamente, sempre per $m \neq n$:

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-l}^{l} \cos\frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \int_{-l}^{l} \cos\frac{(m+n)\pi x}{l} dx\right] = 0.$$

Se $m = n$ allora ricordiamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \left[1 + \cos\frac{2m\pi x}{l}\right] dx = l$$

e analogamente

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \left[1 - \sin\frac{2m\pi x}{l}\right] dx = l.$$

b) Dalle relazioni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{2.8}$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{2.9}$$

segue

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right].$$

Allora per $m \neq n$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \left[\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right] dx$$

e il risultato è una conseguenza del lemma 2.2.1. Se invece $m = n$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \sin\frac{2m\pi x}{l} = 0. \square$$

Teorema 2.2.1 *Se la serie*

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

converge uniformemente a $F(x)$ *nell'intervallo* $(-l,l)$ *allora, per* $n=1,2,\ldots$

α)

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

β)

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

γ)

$$A=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx.$$

Dimostrazione. α) Per ipotesi

$$F(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2.10}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\cos\frac{m\pi x}{l}$ e integrando tra $-l$ ed l si ha:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}F(x)dx=\int_{-l}^{l}\left[A+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\cos\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{2.11}$$

Tenuto conto che, per il lemma 2.2.2,

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ l & m=n\neq 0\end{cases}$$

e

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \qquad m,n=1,2,3,\ldots$$

la relazione (2.11) diventa

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} F(x)dx = A\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$

$$= a_m l \qquad m \neq 0.$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

β) Moltiplicando la relazione (2.11) per $\sin\frac{m\pi x}{l}$, integrando tra $-l$ e l ed applicando le relazioni già viste abbiamo:

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} F(x)dx = A\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$

$$= b_m l \qquad m \neq 0.$$

Quindi

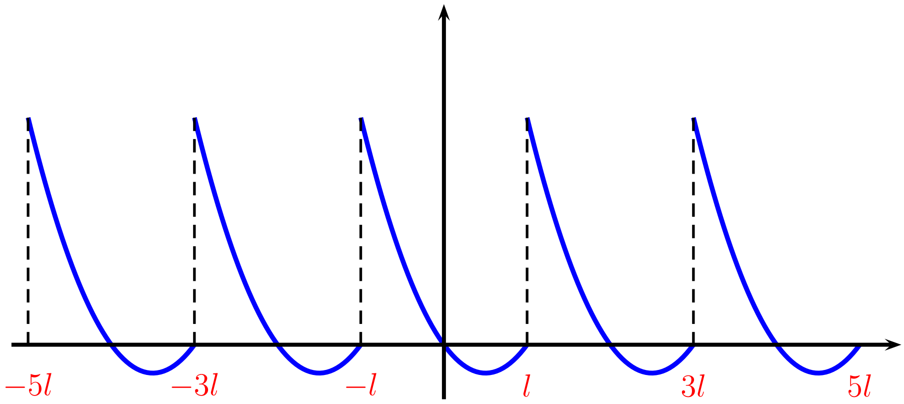
$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

γ) Integriamo ora la relazione (2.10) tra $-l$ ed l, e tenendo conto del lemma 2.2.1 otteniamo

$$\int_{-l}^{l} F(x)dx = 2Al \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)dx = \frac{a_0}{2}. \ \square$$

Osservazione. I risultati ora ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione sono sostituiti da c e $c+2l$. Osserviamo anche esplicitamente che l'ipotesi di convergenza uniforme è intervenuta nell'integrazione termine a termine della serie.

L'ipotesi di periodicità della funzione sembrerebbe essere particolarmente restrittiva, in realtà non è così poichè se una funzione $f(x)$ è definita e continua (o anche generalmente continua) nell'intervallo $[-l, l]$ allora la funzione può essere prolungata periodicamente, riproducendola tale e quale, in tutti gli intervalli di ampiezza $2l$ che si trovano a destra e a sinistra dell'intervallo di definizione.



2.2.1 Forma complessa della serie di Fourier

In forma complessa la serie di Fourier (2.1) e i suoi coefficienti possono essere scritti così:

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\imath n \frac{\pi x}{l}}}$$

dove, ponendo $c = -l$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) e^{-\imath n \frac{\pi x}{l}} dx.}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{-n} e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} + c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (c_{-n} + c_n) \cos \frac{n\pi x}{l} + \iota (c_n - c_{-n}) \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}.
\end{aligned}$$

Risulta evidentemente $c_0 = a_0/2$, mentre

$$\begin{aligned}
c_{-n} + c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) \left[e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} + e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iota (c_n - c_{-n}) &= \frac{\iota}{2l} \int_{-l}^{l} F(x) \left[e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} - e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} \right] dx \\
&= \frac{\iota}{2l} \int_{-l}^{l} F(x)(-2\iota) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, .
\end{aligned}$$

2.3 Trasformate finite di Fourier

Abbiamo visto che, se $F(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $]-l, l[$, allora in ogni punto di continuità di $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota \frac{n\pi x}{l}} \tag{2.12}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)e^{-\iota\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Posto

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} F(x)e^{-\iota\frac{n\pi x}{l}}dx} \tag{2.13}$$

allora $F(x)$ si scrive

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{\iota\frac{n\pi x}{l}}.} \tag{2.14}$$

La (2.13) prende il nome di Trasformata finita di Fourier e spesso viene indicata con $f(n) = \mathcal{F}\{F(x)\}$, mentre $F(x)$ si chiama Antitrasformata finita di Fourier.
Se x non è punto di continuità allora nella (2.12) $F(x)$ va sostituito con $(F(x+0)+F(x-0))/2$.

2.3.1 Trasformate finite seno e coseno di Fourier

Riconsideriamo ora lo sviluppo di Fourier di $F(x)$, $-l < x < l$, nella formulazione (2.1) con i coefficienti dati in α), β) e γ) ovvero

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la funzione $F(x)$ sia dispari. In questo caso $F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$ mentre $F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ è una funzione pari per ogni $n \in \mathbb{N}$. Conseguentemente

$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mentre

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.15}$$

Pertanto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

con b_n definiti da (2.15).
Definiamo ora

$$\boxed{f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = 1, 2, \ldots} \tag{2.16}$$

allora

$$b_n = \frac{2}{l}f_s(n)$$

e perciò si scrive

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l}.} \tag{2.17}$$

La (2.16) prende il nome di Trasformata finita seno di Fourier di $F(x)$ per $0 < x < l$ e viene indicata nel seguente modo

$$f_s(n) = \mathcal{F}_s\{F(x)\}$$

mentre la (2.17) si chiama Antitrasformata finita seno di Fourier di $f_s(n)$ e si scrive

$$F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}.$$

Assumiamo ora che $F(x)$ sia pari. In questo caso la funzione $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$ è una funzione dispari in $]-l, l[$ mentre la funzione $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ è pari in $]-l, l[$, e pertanto $b_n = 0$ per ogni n. Conseguentemente

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} F(x) dx$$

ovvero

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{l} \int_{0}^{l} F(x) dx$$

e

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Posto

$$\boxed{f_c(n) = \int_{0}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots} \tag{2.18}$$

risulta

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{l} f_c(0), \qquad a_n = \frac{2}{l} f_c(n)$$

e di conseguenza

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{l} f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l}.} \tag{2.19}$$

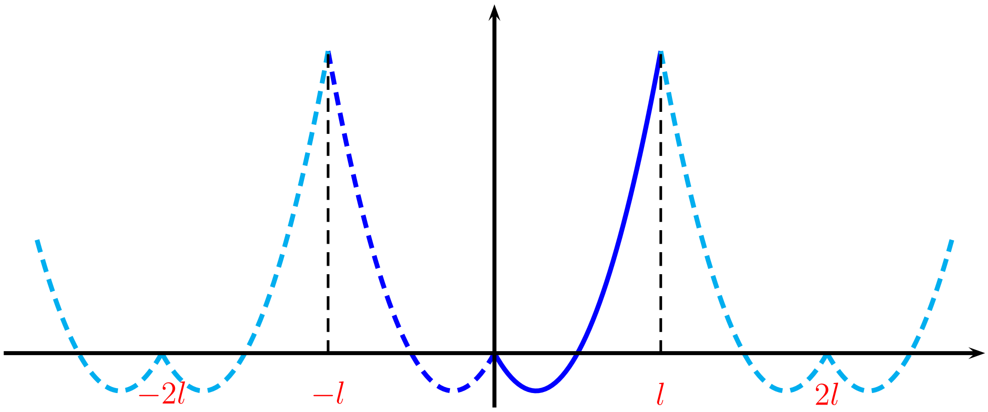
La (2.18) prende il nome di Trasformata finita coseno di Fourier di $F(x)$ per $0 < x < l$ e viene indicata nel seguente modo

$$f_c(n) = \mathcal{F}_c\{F(x)\}$$

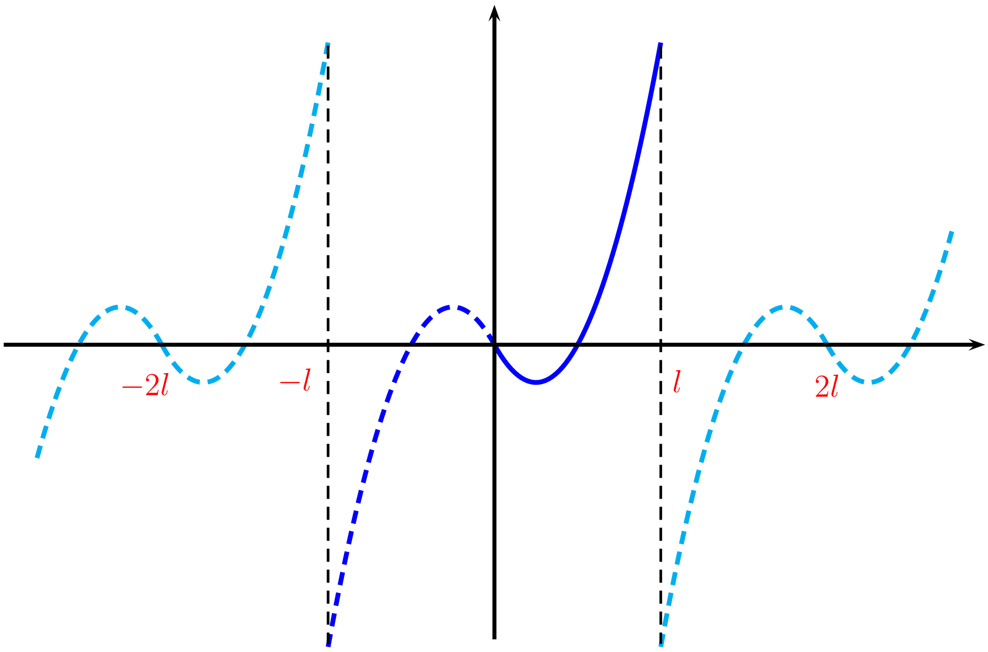
mentre $F(x)$ si dice Antitrasformata finita coseno di Fourier di $f_c(n)$ e si scrive

$$F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}.$$

Anche in questo caso sembrerebbe che l'ipotesi di funzione pari (o dispari) sia eccessivamente restrittiva. In realtà se una funzione è definita ed è continua nell'intervallo $[0, l]$, possiamo calcolare la trasformata coseno del suo prolungamento periodico pari, che si ottiene prima prolungando la funzione nell'intervallo $[-l, 0]$ in modo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e poi prolungando per periodicità come già visto in precedenza. Nel seguente grafico ne è riportato un esempio.



Per calcolare invece la trasformata seno si definisce il prolungamento periodico dispari della funzione, che si ottiene prima prolungando la funzione nell'intervallo $[-l, 0]$ in modo simmetrico rispetto all'origine del riferimento cartesiano e poi prolungando per periodicità come già visto in precedenza. Nel seguente grafico ne è riportato un esempio.

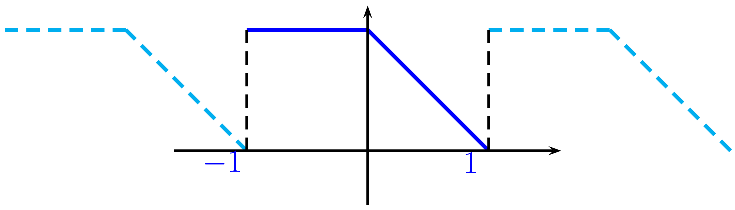


Esempio 2.3.1 *Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

periodica di periodo 2 *indicando i punti in cui la serie non converge ad* $F(x)$.

Tracciamo il grafico della funzione.



Osserviamo innanzitutto che la funzione non è nè pari nè dispari e che la serie sicuramente non converge alla funzione in $x = \pm 1$ e, poichè la funzione ha periodo 2, ovviamente anche per $x = 1 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Calcoliamo ora i coefficienti dello sviluppo in serie, considerando che $l = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-1}^{1} F(x) dx = \frac{3}{2}.$$

Ovviamente anzichè calcolare l'integrale si è valutata l'area del trapezio rettangolo evidenziato dalla funzione.

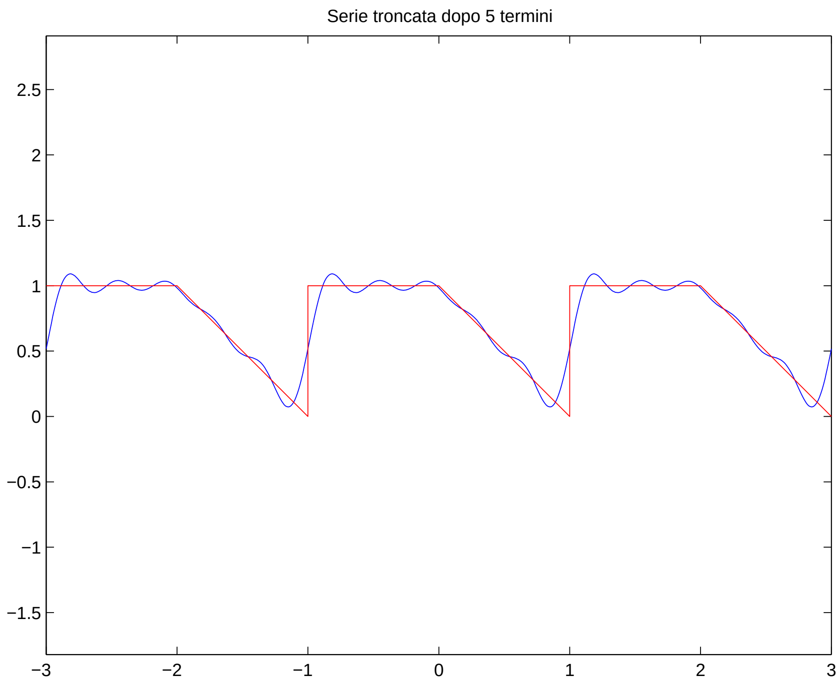
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \int_{-1}^{0}\cos n\pi x\ dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cos n\pi x \\
&= \textstyle\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\ dx - \int_0^1 x\cos n\pi x = -\displaystyle\int_0^1 x\cos n\pi x\ dx \\
&= \left[-\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\ dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[-\cos n\pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}
$$

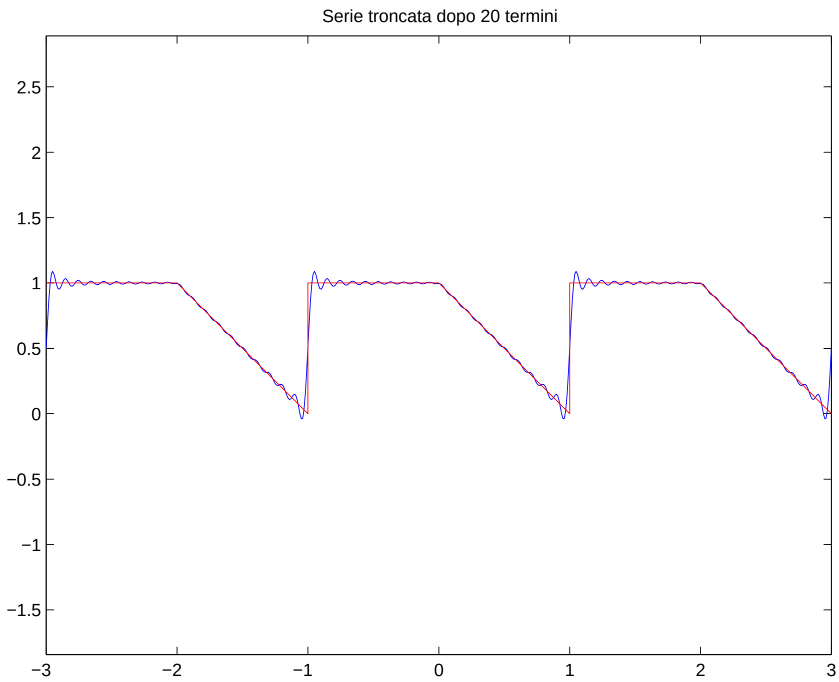
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_{-1}^{0}\sin n\pi x\ dx + \int_{0}^{1}(1-x)\sin n\pi x \\
&= \textstyle\int_{-1}^{1}\sin n\pi x\ dx - \int_0^1 x\sin n\pi x = -\displaystyle\int_0^1 x\sin n\pi x\ dx \\
&= \left[\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\ dx = \frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}
$$

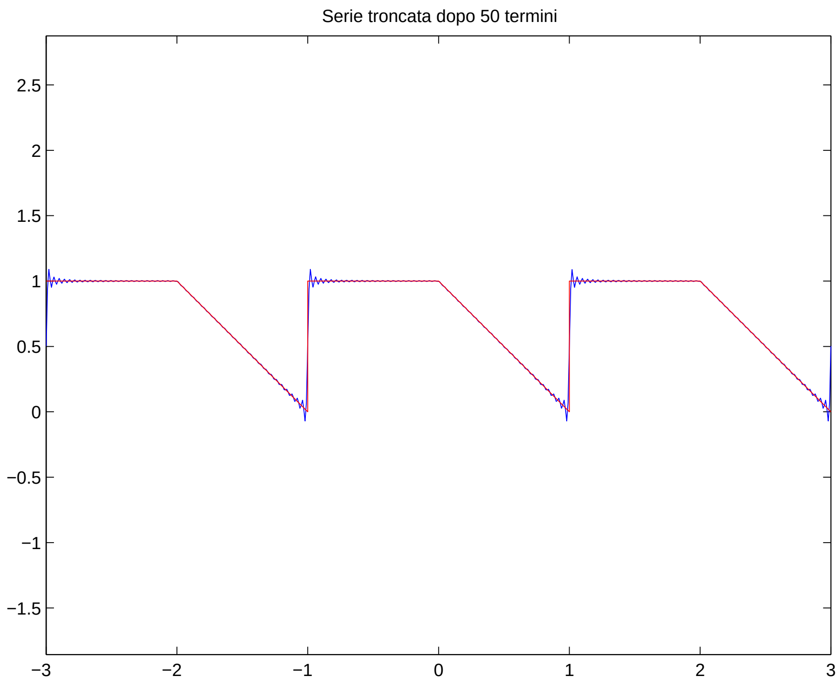
Quindi in definitiva

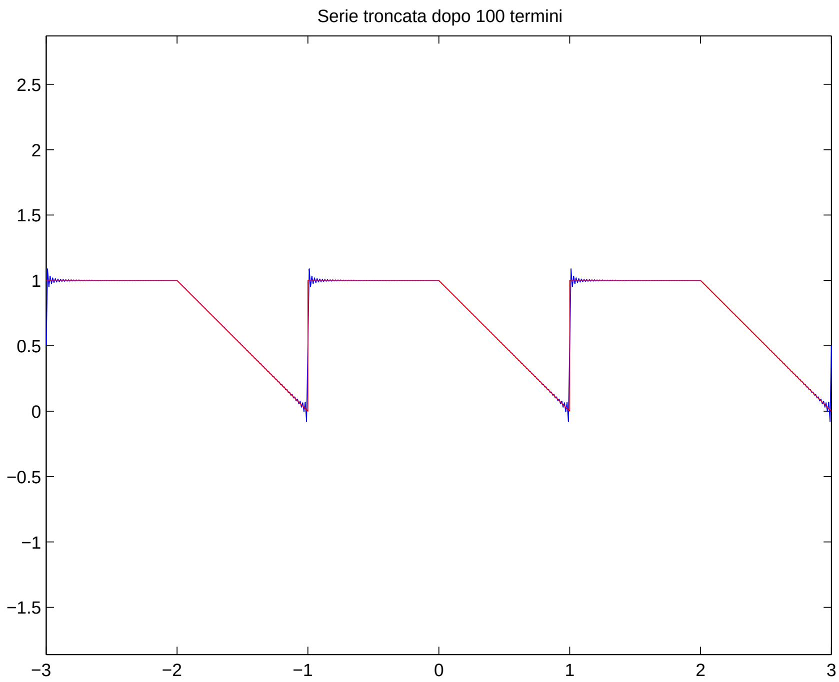
$$
F(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi \sin n\pi x\right].
$$

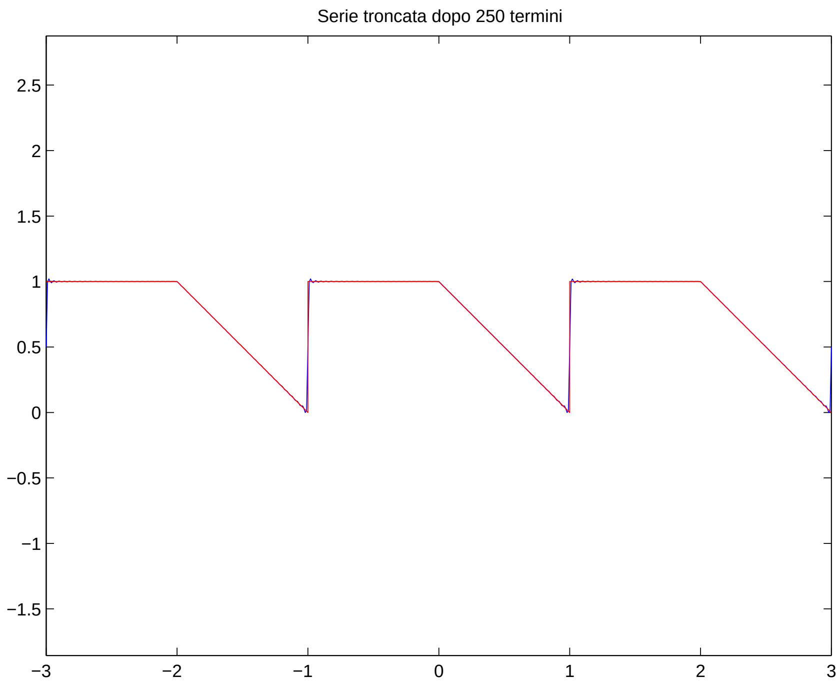
Nelle figure riportate nelle pagine seguenti sono raffigurati i grafici della funzione $F(x)$ e della serie di Fourier troncata per valori crescenti del numero di addendi. Si osserva che se la serie viene troncata si ottengono delle sovraelongazioni del valore della funzione ricostruita nell'intorno del punto di discontinuità: all'aumentare del numero delle componenti della serie il valore di picco di detta sovraelongazione rimane costante, mentre le oscillazioni alle quali tali sovraelongazioni si riferiscono si avvicinano al punto di discontinuità. Questo comportamento prende il nome di fenomeno di Gibbs


Serie troncata dopo 5 termini
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3


Serie troncata dopo 20 termini
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3


Serie troncata dopo 50 termini
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3


Serie troncata dopo 100 termini
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3
−2
−1
0
1
2
3

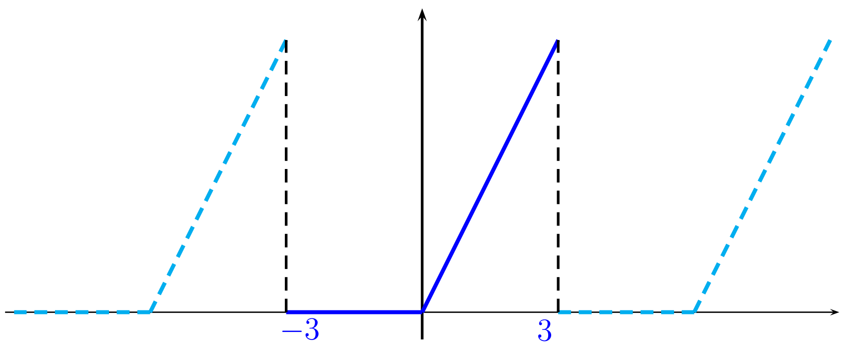


Esempio 2.3.2 *Determinare la serie di Fourier per la funzione*

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 3 \\ \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

di periodo 6.

Tracciamo il grafico della funzione.



Calcoliamo i coefficienti della serie ponendo $l = 3$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{3} F(x)dx\right] = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x\ dx = 6 \\
a_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 2x\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x\frac{3}{n\pi}\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{n\pi x}{3}\right)dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\left[x\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 - \int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right] \\
&= \frac{6}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 = \frac{6}{(n\pi)^2}[\cos n\pi - 1]. \\
b_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\left[\int_0^3 2x\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left[\int_0^3 2x\frac{3}{n\pi}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{n\pi x}{3}\right)dx\right] \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left[\left[x\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3 - \int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{3}dx\right] \\
&= \frac{-2}{n\pi}\left[3\cos n\pi - \frac{3}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\right] \\
&= \frac{-6}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

Quindi in definitiva

$$F(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{3} - \frac{6}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{3}\right].$$

Esempio 2.3.3 *Determinare la serie di Fourier per la funzione*

$$F(x) = |\ |x| - 1\ |$$

con $-3 \leq x \leq 3$, *periodica di periodo* 6.

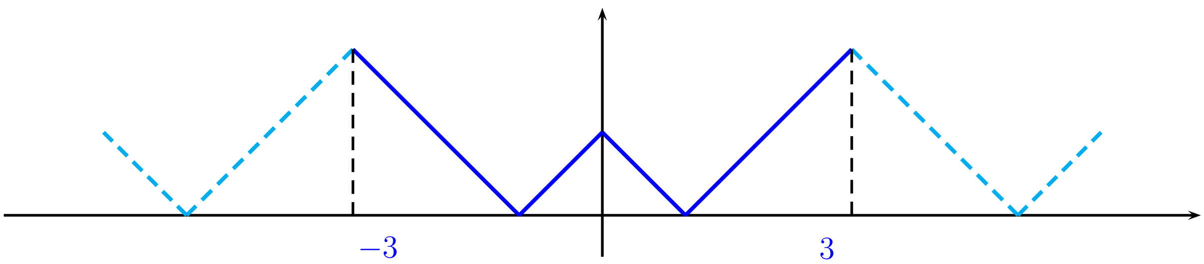
Osserviamo innanzitutto che la funzione $F(x)$ è pari, infatti

$$F(-x) = |\ | - x| - 1\ | = |\ |x| - 1\ | = F(x),$$

quindi tutti i coefficienti b_n sono nulli pertanto la serie di Fourier è una serie di soli coseni. Inoltre

$$F(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico della funzione.



Calcoliamo ora i coefficienti a_n dello sviluppo in serie, considerando che $l = 3$.

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} F(x)dx = \frac{2}{3} \int_{0}^{3} F(x)dx = \frac{5}{3}$$

Anche in questo caso l'integrale della funzione è stato ottenuto calcolando l'area dei due triangoli sottesi dal grafico della funzione $F(x)$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} F(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} F(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_{1}^{3}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx \\
&= \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3}{n\pi}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{3}dx + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{3}{n\pi}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_1^3 - \frac{3}{n\pi}\int_1^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right\} \\
&= \frac{2}{n\pi}\left\{\left[-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_1^3\right\} \\
&= \frac{6}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\frac{n\pi}{3}+\cos(n\pi)-\cos\frac{n\pi}{3}\right] \\
&= \frac{6}{n^2\pi^2}\left[1+\cos(n\pi)-2\cos\frac{n\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

La funzione ammette pertanto il seguente sviluppo in serie di Fourier

$$F(x) = \frac{5}{6} + \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1+\cos(n\pi)-2\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{n\pi x}{3}$$

che converge alla funzione per ogni x.

Esempio 2.3.4 *Determinare*

a) la trasformata finita seno di Fourier

b) la trasformata finita coseno di Fourier

della funzione $F(x) = 2x$, $0 < x < 4$.

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{F(x)\} &= f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \int_0^4 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx \\
&= \left[2x \left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left(\frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 \\
&= -\frac{32}{n\pi} \cos n\pi;
\end{aligned}$$

b) se $n > 0$

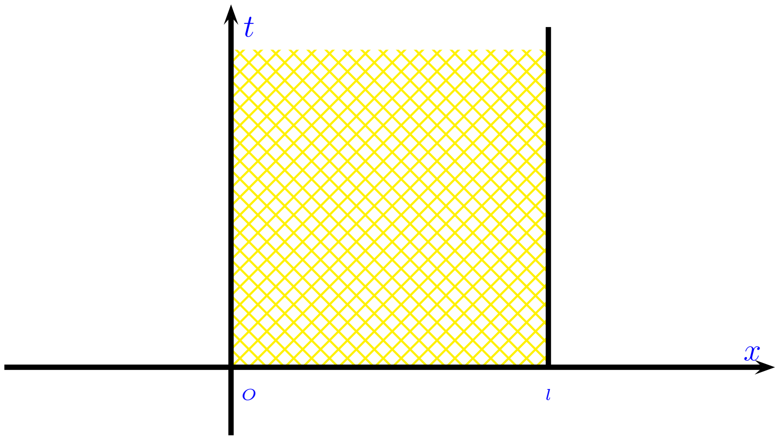
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{F(x)\} &= f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx \\
&= \left[2x \left(\frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 \\
&= 32 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Se $n = 0$

$$f_c(0) = \int_0^4 2x dx = 16.$$

Risoluzione di equazioni alle derivate parziali

Le trasformate seno e coseno di Fourier possono essere applicate anche a funzioni in due variabili $U(x,t)$.
Sia $U(x,t)$ una funzione definita per $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq l$.



In questo caso la trasformata di $U(x,t)$ è una funzione che dipende dalla variabile t e dal parametro n, numero naturale, cosicchè scriveremo

$$u_c(n,t) = \mathcal{F}_c\left\{U(x,t)\right\} = \int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\ dx,$$

oppure

$$u_s(n,t) = \mathcal{F}_s\left\{U(x,t)\right\} = \int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\ dx.$$

In modo analogo valgono le definizioni di antitrasformata finita coseno di Fourier

$$U(x,t) = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{U(x,t)\right\} = \frac{1}{l}u_c(0,t) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_c(n,t)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

e antitrasformata finita seno di Fourier

$$U(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}\left\{U(x,t)\right\} = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_s(n,t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

Infatti una delle principali applicazioni delle trasformate di Fourier è la risoluzione di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Vediamo ora come determinare le trasformate seno e coseno di Fourier per tali derivate. Calcoliamo la trasformata finita seno di Fourier di $\dfrac{\partial U}{\partial x}$.

Per definizione la trasformata finita seno è

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \left[U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\};} \tag{2.20}$$

Invece per la trasformata finita coseno di Fourier di $\frac{\partial U}{\partial x}$, dove $U(x,t)$ è una funzione definita per $0 < x < l$ e $t > 0$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \left[U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l + \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\{U(x,t)) + U(l,t)\cos n\pi - U(0,t).} \tag{2.21}$$

Calcoliamo ora le trasformate della derivata parziale $\frac{\partial U}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\}.$$

Da questi esempi si può inoltre ricavare che

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\}$$

e

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\}.$$

Determiniamo le trasformate finite seno e coseno della funzione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. Sostituendo $\frac{\partial U}{\partial x}$ ad $U(x,t)$ in (2.20) si ha

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$$

e, sostituendo l'espressione (2.21), si ottiene infine

$$\boxed{\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\} + \frac{n\pi}{l}\left[U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\right].} \tag{2.23}$$

Per la trasformata coseno si procede in modo analogo

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} - \left[U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\right]$$

ottenendo

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c\{U(x,t)\} - \left[U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\right].} \tag{2.24}$$

2.4 Risoluzione di equazioni alle derivate parziali

In questo paragrafo le trasformate di Fourier saranno utilizzate per risolvere alcune, semplici, equazioni alle derivate parziali.
Assegnata un'equazione alle derivate parziali per poterla risolvere con le trasformate di Fourier si devono seguire i seguenti passi:
1. Stabilire quale trasformata è necessario applicare (seno o coseno)
2. Applicare la trasformata scelta all'equazione assegnata ottenendo un'**equazione differenziale ordinaria** per $u(n,t)$
3. Risolvere l'equazione differenziale ordinaria (solitamente **omogenea** e a coefficienti costanti)

4. Calcolare l'antitrasformata (seno o coseno) di Fourier di $u(n,t)$. Dovendo risolvere un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti (del primo o del secondo ordine) richiamiamo qui i tre casi che si possono presentare.
I Caso. Equazione del primo ordine:

$$y'(t) = ky(t), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale è

$$y(t) = Ae^{kt}, \qquad \text{dove } A = y(0),$$

quindi la soluzione è

$$y(t) = y(0)e^{kt}.$$

II Caso. Equazione del secondo ordine:

$$y''(t) - k^2 y(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale dipende dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - k^2 = 0.$$

ovvero

$$\lambda = \pm k.$$

Poichè le radici sono reali e distinte la soluzione è

$$y(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt},$$

con $A.B \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo le condizioni assegnate.
III Caso. Equazione del secondo ordine:

$$y''(t) + k^2 y(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale generale dipende dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

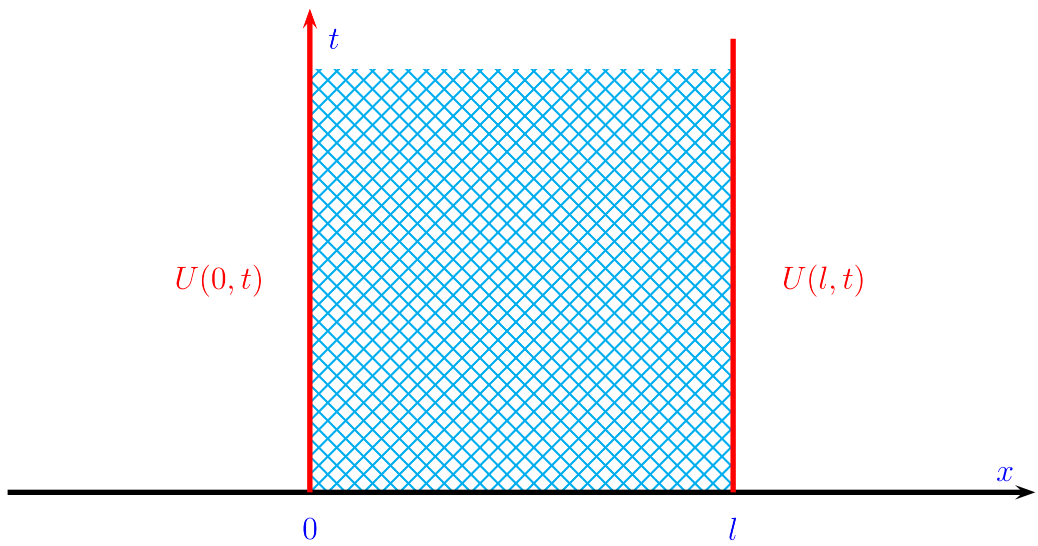
ovvero

$$\lambda = \pm \imath k.$$

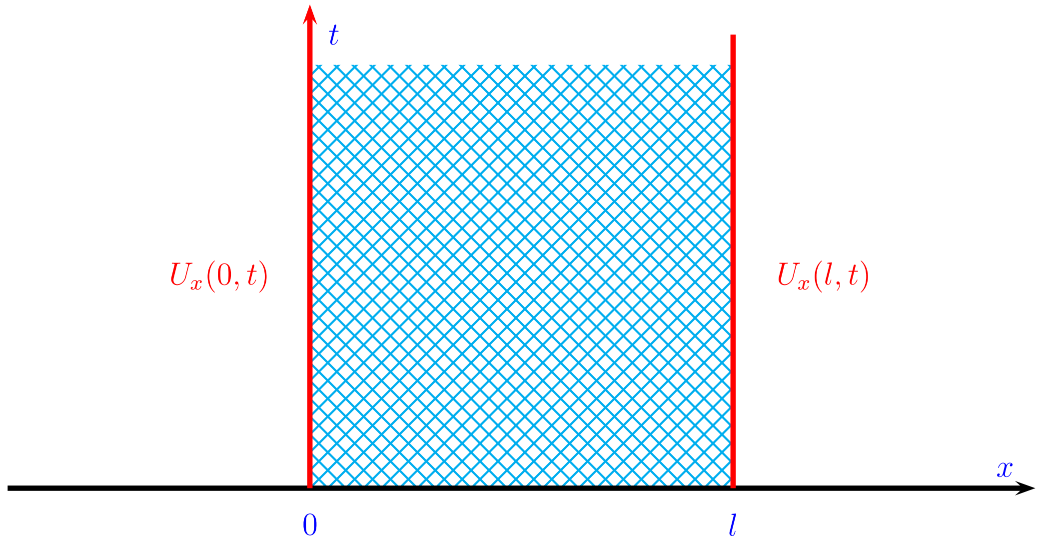
Poichè le radici sono complesse coniugate allora l'integrale generale è una combinazione lineare degli esponenziali complessi $e^{\imath kt}$ e $e^{-\imath kt}$. Tuttavia è possibile rendere reale tale soluzione prenendo un'opportuna combinazione lineare degli esponenziali complessi ed applicando la formula di Eulero, cosicchè la soluzione è

$$y(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt),$$

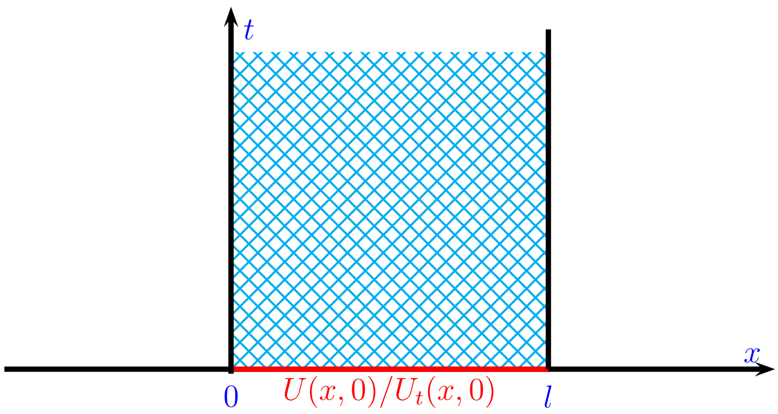
con $A.B \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo le condizioni assegnate.
Per poter risolvere un'equazione alle derivate parziali devono essere assegnate determinate condizioni cui deve essere soggetta la soluzione $U(x,t)$. Esistono due tipi di condizioni.
I Caso. Condizioni al contorno (o al bordo) (cioè sono note $U(0,t)$ e $U(l,t)$).



Oppure sono note le derivate prime rispetto a x $U_x(0,t)$ e $U_x(l,t)$.



II Caso. Condizioni iniziali (è nota $U(x,0)$ e/o $U_t(x,0)$), per $0 \leq x \leq l$.



Per risolvere un'equazione alle derivate parziali devono essere assegnate sia condizioni iniziali che condizioni al contorno (in funzione delle derivate presenti nell'equazione).
Per esempio per l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{l}\text{Primo ordine rispetto a } t\\ \text{Secondo ordine rispetto a } x\end{array}$$

servono 3 condizioni (2 al contorno e 1 iniziale).
Per esempio per l'equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{l}\text{Secondo ordine rispetto a } t\\ \text{Secondo ordine rispetto a } x\end{array}$$

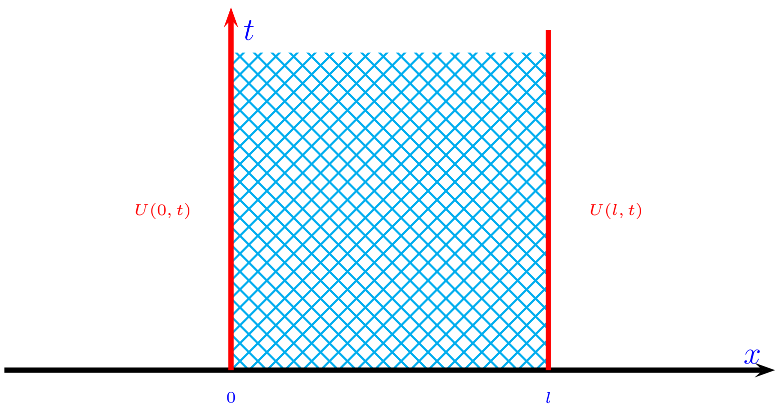
servono 4 condizioni (2 al contorno e 2 iniziali).

La scelta della trasformata da applicare

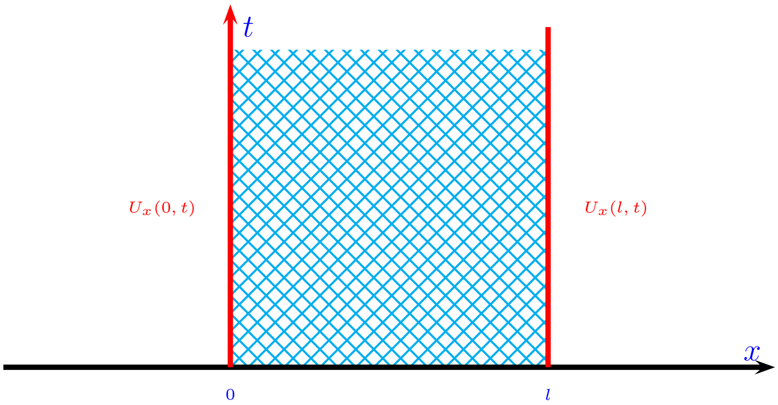
La scelta **dipende esclusivamente dalle condizioni al contorno assegnate dal problema**. Infatti le espressioni delle trasformate per le derivate seconde di $U(x,t)$ rispetto ad x sono;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s(U(x,t)) - \frac{n\pi}{l}\left[U(l,t)\cos n\pi - U(0,t)\right]\\ \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c(U(x,t)) + \left[U_x(l,t)\cos n\pi - U_x(0,t)\right]\end{aligned}$$

La trasformata seno richiede la conoscenza della funzione agli estremi $x = 0$ ed $x = l$ quindi si applica quando queste sono note:



La trasformata coseno richiede la conoscenza della derivata prima della funzione agli estremi $x = 0$ ed $x = l$ quindi si applica quando queste sono note:



Esempio 2.4.1 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno $U(0,t) = U(4,t) = 0$ *e* $U(x,0) = 2x$, *per* $0 < x < 4$ *e* $t > 0$.

Prendendo la trasformata finita seno di ambo i membri dell'equazione assegnata (con $l = 4$), abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e tenendo conto della relazione (2.22)

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \frac{d}{dt}u(n,t).$$

Applicando ora (2.23)

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{16}\mathcal{F}_s\{U(x,t)\} + \frac{n\pi}{4}[U(0,t) - U(4,t)\cos n\pi].$$

In definitiva si deve risolvere l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u(n,t)$$

ottenendo

$$u(n,t) = u(n,0)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

dove

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{2x\} = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi}.$$

Quindi

$$u(n,t) = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-32\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}\sin\frac{n\pi x}{4} \\ &= \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos n\pi}{n}\right)e^{-n^2\pi^2 t/16}\sin\frac{n\pi x}{4}. \end{aligned}$$

Esempio 2.4.2 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x,t)$ *soggetta alle seguenti condizioni iniziali* $U(0,t) = U(6,t) = 0$*, per* $t \geq 0$ *e*

$$U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita seno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(n,t)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con A costante da calcolare. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = A$$

dobbiamo calcolare la trasformata seno della condizione iniziale

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} &= \int_0^6 U(x,0)\sin\frac{n\pi x}{6}dx \\
&= \int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{6}dx \\
&= \frac{6}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{6}\right]_0^3 = \frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n,t) = \frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right]e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x,t) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi}{2}\right]e^{-n^2\pi^2 t/36}\sin\frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 2.4.3 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali: $U(0,t) = U(2,t) = 0$, *per* $t \geq 0$ *e*

$$U_t(x,0) = 0, \qquad U(x,0) = \frac{1}{20}x(2-x)$$

con $0 \leq x \leq 2$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 2$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = 9\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ si deve risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{9n^2\pi^2}{4}u(n,t)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \frac{9n^2\pi^2}{4} = 0$$

che ammette due radici complesse coniugate $\lambda = \pm\imath 3n\pi/2$, cosicchè la soluzione generale è

$$u(n,t) = A\sin\frac{3n\pi t}{2} + B\cos\frac{3n\pi t}{2}$$

con A e B costanti da determinarsi. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{20}x(2-x)\right\}$$

quindi

$$u(n,0) = B = \mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{20}x(2-x)\right\}.$$

Inoltre

$$u'(n,0) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\{U_t(x,0)\} = 0$$

quindi calcolando la derivata prima dell'integrale generale risulta

$$u'(n,t) = A\frac{3}{2}n\pi\cos\frac{3n\pi t}{2} - B\frac{3}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2}$$

e, poichè $u'(n,0) = 0$ deve essere $A = 0$. Calcoliamo quindi la trasformata seno della condizione iniziale $U(x,0)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{U(x,0)) &= \int_0^2 \frac{1}{20}x(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= \frac{1}{10}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{20}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx.
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx &= \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale è:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx &= \left[-\frac{2x^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\
&= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{8}{n^2\pi^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2} \\
&= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 \\
&= \frac{16}{n^3\pi^3}[\cos n\pi - 1] - \frac{8}{n\pi}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

La costante cercata vale pertanto

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{2}{5n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{5n^3\pi^3}[\cos n\pi - 1] + \frac{2}{5n\pi} \\
&= \frac{4}{5n^3\pi^3}[1 - \cos n\pi].
\end{aligned}$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \frac{4}{5n^3\pi^3}[1 - \cos n\pi]\cos\frac{3n\pi t}{2}$$

mentre la soluzione cercata è

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5n^3\pi^3}[1 - \cos n\pi]\cos\frac{3n\pi t}{2}\sin\frac{n\pi 2}{2}.$$

Esempio 2.4.4 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

dove la funzione $U(x,t)$ è soggetta alle condizioni iniziali $U(0,t) = U(1,t) = 0$, per $t \geq 0$ e

$$U(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 3x$$

con $0 \leq x \leq 1$.

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 1$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = -\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t)\}$ e otteniamo che il primo membro è uguale a

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}u(n,t)$$

mentre il secondo diventa

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -n^2\pi^2 u(n,t)$$

cosicchè si deve risolvere ora la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = n^2\pi^2 u(n,t). \tag{2.25}$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione (2.25) è

$$\lambda^2 - n^2\pi^2 = 0$$

che ammette due radici reali distinte $\lambda = \pm n\pi$, cosicchè essa ammette come soluzione generale una combinazione lineare di esponenziali:

$$u(n,t) = Ae^{n\pi t} + Be^{-n\pi t}$$

con A e B costanti da determinarsi utilizzando le altre condizioni iniziali note. Infatti

$$U(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\} = \mathcal{F}_s\{0\} = 0$$

quindi

$$u(n,0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A$$

e la soluzione può essere scritta come

$$u(n,t) = Ae^{n\pi t} - Ae^{-n\pi t}.$$

Inoltre, poichè

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 3x \quad \Rightarrow \quad u'(n,0) = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)\right\} = \mathcal{F}_s\{3x\}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata seno della funzione $3x$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{3x\} &= \int_0^1 3x\sin(n\pi x)dx = 3\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{3}{n\pi}\left[-x\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2}\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1 \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$u'(n,t) = An\pi e^{n\pi t} + An\pi e^{-n\pi t}$$

e

$$u'(n,0) = 2An\pi \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u'(n,0)}{2n\pi}$$

cosicchè

$$A = \frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}.$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}(e^{n\pi t} + e^{-n\pi t})$$

mentre la soluzione cercata è

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n^2\pi^2}(-1)^{n+1}[e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}]\sin(n\pi x) = \\
&= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}[e^{n\pi t} + e^{-n\pi t}]\sin(n\pi x).
\end{aligned}$$

Esempio 2.4.5 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con $U(x,t)$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali: $U_x(0,t) = U_x(6,t) = 0$, per $t \geq 0$ e $U(x,0) = 2x$, per $0 \leq x \leq 6$.

Dobbiamo utilizzare la trasformata finita coseno di Fourier con $l = 6$, quindi applicandola all'equazione alle derivate parziali otteniamo

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Poniamo $u(n,t) = \mathcal{F}_c\{U(x,t)\}$ e otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria omogenea a coefficienti costanti

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(n,t) + U_x(6,t)\cos(n\pi) - U_x(0,t) = -\frac{n^2\pi^2}{36}u(n,t)$$

che ammette come soluzione generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/36}$$

con A costanti da calcolare. Poichè

$$u(n,0) = \mathcal{F}_c\{U(x,0)\} = A$$

dobbiamo calcolare la trasformata coseno della condizione iniziale

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{U(x,0)\} = & \int_0^6 2x\cos\frac{n\pi x}{6}dx = 2\int_0^6 x\cos\frac{n\pi x}{6}dx \\
& = \frac{12}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{6}\right]_0^6 - \frac{12}{n\pi}\int_0^6 \sin\frac{n\pi x}{6}dx \\
& = -\frac{72}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{6}\right]_0^6 = -\frac{72}{n\pi}[\cos(n\pi) - 1]
\end{aligned}$$

mentre se $n = 0$ la trasformata coseno di Fourier vale

$$\int_0^6 2x dx = 36.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi

$$u(n,t) = \frac{72}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi) - 1]e^{-n^2\pi^2 t/36}$$

mentre la soluzione del problema iniziale cercata è

$$U(x,t) = 6 + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi) - 1]e^{-n^2\pi^2 t/36} \cos\frac{n\pi x}{6}.$$

Esempio 2.4.6 *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere il problema ai valori al contorno*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con condizioni iniziali: $U(0,t) = U(4,t) = 0$*, per* $t \geq 0$ *e*

$$U(x,0) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)$$

con $0 \leq x \leq 4$*.*

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata (con $l = 4$), ottenedo

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = 2\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}.$$

Posto $u(n,t) = \mathcal{F}_s\{U(x,t))$ si deve risolvere l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{8}u(n,t)$$

che ammette come integrale generale

$$u(n,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t/8}$$

dove la costante A indica la trasformata seno di Fourier della condizione iniziale

$$u(n,0) = \mathcal{F}_s\{U(x,0)\}.$$

Calcoliamo quindi la trasformata di Fourier di $U(x,0)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\{U(x,0)\} &= \int_0^4 (\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))\sin\frac{n\pi x}{4}dx \\
&= \int_0^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx + \int_0^4 \sin(4\pi x))\sin\frac{n\pi x}{4}dx.
\end{aligned}$$

Consideriamo separatamente i due integrali:

$$\int_0^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^4 \sin(2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \begin{cases} 2 & n=8 \\ \\ 0 & n\neq 8, \end{cases}$$

in cui la prima uguaglianza deriva dal fatto che la funzione integranda è pari, mentre la seconda segue applicando il lemma 2.2.2.

$$\int_0^4 \sin(4\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^4 \sin(4\pi x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx = \begin{cases} 2 & n=16 \\ \\ 0 & n\neq 16. \end{cases}$$

La costante cercata vale pertanto

$$A = \begin{cases} 2 & n=8,16 \\ \\ 0 & n\neq 8,16. \end{cases}$$

In definitiva la trasformata di Fourier $u(n,t)$ è

$$u(n,t) = \begin{cases} 2e^{-8\pi^2 t} & n=8 \\ \\ 2e^{-32\pi^2 t} & n=16 \\ \\ 0 & n\neq 8,16. \end{cases}$$

La soluzione cercata si riduce ad una somma di due soli addendi (quasi tutti i coefficienti della serie di Fourier sono nulli):

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{1}{2}\left(2e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x) + 2e^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x)\right) \\ &= e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x) + e^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x). \end{aligned}$$

Esempio 2.4.7 *Applicare le Trasformate Finite di Fourier per risolvere la seguente equazione alle derivate parziali*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin \pi x$$

con condizioni al contorno $U(0,t) = U(1,t) = 0$, *for* $t \geq 0$, *e condizioni iniziali*

$$U(x,0) = 1, \qquad U_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

Applichiamo la trasformata finita seno all'equazione assegnata

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} + \mathcal{F}_s\left\{\sin \pi x\right\}$$

e poniamo

$$u_n(t) = \mathcal{F}_s\left\{U(x,t)\right\}$$

calcoliamo la trasformata seno della funzione $\sin \pi x$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left\{\sin \pi x\right\} &= \int_0^1 \sin \pi x \sin n\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sin \pi x \sin n\pi x \, \mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Adesso dobbiamo risolvere due equazioni differenziali ordinarie, se $n \neq 1$:

$$u_n''(t) = -n^2\pi^2 u_n(t)$$

mentre se $n = 1$:

$$u_n''(t) = -n^2\pi^2 u_n(t) + \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1''(t) = -\pi^2 u_1(t) + \frac{1}{2}. \tag{2.26}$$

L'integrale generale della prima equazione differenziale è

$$u_n(t) = A\cos n\pi t + B\sin n\pi t.$$

Sostituendo la condizione iniziale

$$u_n(0) = \mathcal{F}_s\left\{U(x,0)\right\}$$

e

$$\frac{d}{dt}u_n(t) = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right\}$$

o, equivalentemente

$$u_n'(0) = 0, \qquad \text{and} \qquad u_n(0) = \mathcal{F}_s\left\{\ 1\ \right\}$$

Calcoliamo la trasformata seno della funzione $F(x) = 1$:

$$\mathcal{F}_s\left\{\ 1\ \right\} = \int_0^1 \sin n\pi x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi x\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

allora

$$\mathcal{F}_s\{\ 1\ \} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \\ \dfrac{2}{n\pi} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se $n = 1$

$$\mathcal{F}_s\{\ 1\ \} = \frac{2}{\pi}$$

allora

$$u_n(0) = A$$

e

$$u_n'(t) = -n\pi A \sin n\pi t + n\pi B \cos n\pi t.$$

Poichè $u_n'(0) = 0$ allora $B = 0$ e

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \\ \dfrac{2}{n\pi} \cos n\pi t & n \text{ odd.} \end{cases}$$

Adesso risolviamo l'equazione (2.26), ovvero l'equazione differenziale per i coefficienti di Fourier per $n = 1$. In questo caso l'integrale generale è

$$u_1(t) = A \cos n\pi t + B \sin n\pi t + C$$

con

$$u_1(0) = \frac{2}{\pi}$$

e, poichè $u_1'(0) = 0$, risulta $B = 0$ e l'integrale diventa

$$u_1(t) = A \cos n\pi t + C$$

con

$$A + C = \frac{2}{\pi}.$$

Adesso imponiamo che la funzione $u_1(t)$ sia soluzione dell'equazione (2.26):

$$-pi^2 A \cos \pi t = (A \cos \pi t + C)\,(-\pi^2) + \frac{1}{2}$$

ottenendo

$$C\pi^2 = \frac{1}{2}$$

e

$$C = \frac{1}{2\pi^2}$$

cosicchè la costante A è

$$A = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2}$$

e la soluzione di (2.26) è

$$u_1(t) = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2\pi^2}\right)\cos \pi t + \frac{1}{2\pi^2}.$$

La soluzione dell'equazione alle derivate parziali è l'antitrasformata finita seno do Fourier di $u_n(t)$:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \left[\left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\right)\cos \pi t + \frac{1}{\pi^2}\right]\sin \pi x + 2\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(t)\sin n\pi x \\ &= \left[\left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\right)\cos \pi t + \frac{1}{\pi^2}\right]\sin \pi x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)\sin((2k+1)\pi x)}{2k+1}. \end{aligned}$$