Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Marzo 2006

Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 2 a scelta.

1. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente:
$$y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n - 4hf_{n+3} = 0.$$

2. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
sia ortogonale.

3. Descrivere brevemente l'applicazione del metodo di Newton alla risoluzione di sistemi non lineari.

4. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f\left(t_n, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 - K_2\right]\right) \\ K_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 2K_2\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 5K_2\right]\right). \end{cases}$$

5. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:
$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

6. Siano Q_1 e Q_2 due matrici ortogonali di ordine n, dire se le seguenti matrici di ordine $2n$ sono ortogonali:
$$A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} O & Q_1 \\ Q_2 & O \end{bmatrix},$$
essendo O la matrice nulla di ordine n.

7. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Aprile 2006

Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 2 a scelta.

1. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

2. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

3. Definire il concetto e le condizioni di Zero-stabilità di un metodo multistep lineare.

4. Dimostrare che un metodo lineare multistep avente i due polinomi caratteristici uguali, cioè tale che $\sigma(z) = \rho(z)$, non può essere convergente.

5. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

6. Descrivere in breve il procedimento per calcolare la fattorizzazione QR di una matrice rettangolare A.

7. Scrivere le formule esplicite del metodo Runge-Kutta definito dal seguente tableau di Butcher:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\[6pt]
\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} & \dfrac{11+\sqrt{5}}{120} & \dfrac{25-\sqrt{5}}{120} & \dfrac{25-13\sqrt{5}}{120} & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{120} \\[6pt]
\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} & \dfrac{11-\sqrt{5}}{120} & \dfrac{25+13\sqrt{5}}{120} & \dfrac{25+\sqrt{5}}{120} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{120} \\[6pt]
1 & \dfrac{1}{12} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{12} \\[6pt]
\hline
 & \dfrac{1}{12} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{12}
\end{array}
$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Maggio 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b}\in\mathbb{R}^m.$$

2. Siano Q_1 e Q_2 due matrici ortogonali di ordine n, verificare se le seguenti matrici di ordine $2n$ sono ortogonali:
$$A = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2 \\ Q_2^T & Q_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ O & O \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} O & I \\ Q_1Q_2 & O \end{bmatrix},$$
con O la matrice nulla e I matrice identità di ordine n.

3. Sia $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta\in\mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
sia ortogonale.

4. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente:
$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n - \frac{h}{8}\left[19f_{n+2} + 5f_n\right] = 0.$$
Il metodo appena scritto è implicito o esplicito?

5. Dimostrare la condizione di convergenza del metodo delle approssimazioni successive per sistemi di equazioni non lineari.

6. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{24}\left[5K_1 + 8K_2 - K_3\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right]\right). \end{cases}$$

7. Spiegare se è possibile dedurre la proprietà di zero-stabilità dei metodi Runge-Kutta senza alcuna condizione.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Luglio 2006

Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 2 a scelta.

1. Scrivere esplicitamente il valore delle componenti del vettore $\mathbf{u}$ e degli elementi della matrice
$$P = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
tali che
$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$
essendo $\mathbf{x}$ il vettore
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

2. Descrivere in modo algoritmico il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

3. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:
$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

4. Scrivere la generica espressione di un metodo Runge-Kutta esplicito e di uno implicito a 4 stadi.

5. Scrivere il metodo di Eulero esplicito sotto forma di Metodo Runge-Kutta.

6. Descrivere brevemente il procedimento per il calcolo della fattorizzazione QR di una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$.

7. Spiegare perchè non è possibile definire un metodo multistep lineare a $k-$passi i cui polinomi caratteristici sono legati dalla seguente relazione:
$$\rho(z) = \sigma'(z).$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2006

Rispondere ai primi 3 quesiti e ad altri 2 a scelta.

1. Definire il concetto e le condizioni di zero stabilità di un metodo multistep lineare.

2. Descrivere brevemente l'applicazione del metodo di Newton alla risoluzione di sistemi non lineari.

3. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
sia ortogonale.

4. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f\left(t_n, y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 - 2K_2 + K_3\right]\right) \\ K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 + \frac{5}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_3\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right]\right). \end{cases}$$
Spiegare in modo intuitivo perchè i metodi Runge-Kutta sono zero stabili.

5. Scrivere un esempio non banale di matrice ortogonale di ordine 3.

6. Applicando un metodo multistep lineare convergente ad un'equazione differenziale ordinaria si ha la garanzia di avere una soluzione numerica sufficientemente vicina a quella teorica per qualsiasi valore di h?

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2006

Rispondere a 4 quesiti a scelta.

1. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

2. Calcolare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:
$$y_{n+3} - y_{n+2} - \frac{h}{12}\left(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n\right) = 0.$$

3. Scrivere l'espressione del metodo di Newton applicato al sistema non lineare
$$\begin{array}{l} 3y^2 + z^3 + \sin(y^2 z) = 0 \\ y - z + \cos(yz^2) = 0. \end{array}$$

4. Dimostrare che un metodo lineare multistep avente i due polinomi caratteristici uguali, cioè tale che $\sigma(z) = \rho(z)$, non può essere convergente.

5. Descrivere, in termini algoritmici, la differenza tra un metodo Runge-Kutta implicito ed uno esplicito.

6. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
sia ortogonale.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2006

Rispondere a 4 quesiti a scelta.

1. Si consideri la classe di metodi multistep lineari
$$y_{n+2} - y_n - h\left(\alpha f_{n+2} + \beta f_{n+1} + \alpha f_n\right) = 0.$$
Determinare i valori di β (in funzione di α) che rendono tali metodi convergenti.

2. Descrivere brevemente l'applicazione del metodo di Newton alla risoluzione di sistemi non lineari.

3. Descrivere brevemente il procedimento per il calcolo della fattorizzazione QR di una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$.

4. Scrivere esplicitamente il valore delle componenti del vettore $\mathbf{u}$ e degli elementi della matrice
$$P = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
tali che
$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$
essendo $\mathbf{x}$ il vettore
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T.$$

5. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f\left(t_n, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 - K_2\right]\right) \\ K_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 2K_2\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 5K_2\right]\right). \end{cases}$$

6. Definire il concetto di zero stabilità di un metodo multistep lineare e spiegare il motivo per cui, affinchè sia soddisfatta, il polinomio $\rho(z)$ deve soddisfare il criterio delle radici.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Novembre 2006

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Calcolare l'ordine del seguente metodo multistep:

$$y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n - 4hf_{n+3} = 0.$$

2. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

sia ortogonale.

3. Descrivere brevemente l'applicazione del metodo di Newton alla risoluzione di sistemi non lineari.

4. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

5. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n - \frac{h}{8}\left[19f_{n+2} + 5f_n\right] = 0.$$

Il metodo appena scritto è implicito o esplicito?

6. Spiegare perchè non è possibile definire un metodo multistep lineare a $k-$passi i cui polinomi caratteristici sono legati dalla seguente relazione:

$$\rho(z) = \sigma'(z).$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Febbraio 2007

Rispondere a 4 quesiti a scelta.

1. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:
$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

2. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:
$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n - h\frac{2}{3} f_{n+2} = 0.$$
Il metodo in questione è esplicito o implicito? Motivare la risposta.

3. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

4. Siano Q_1 e Q_2 due matrici ortogonali di ordine n, verificare se le seguenti matrici di ordine $2n$ sono ortogonali:
$$A = \begin{bmatrix} I & I \\ O & Q_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O & Q_1 \\ Q_2 & O \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} O & I \\ Q_1 Q_2 & O \end{bmatrix},$$
considerando che I e O sono, rispettivamente, la matrice identità e la matrice nulla di ordine n.

5. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{24}\left[5K_1 + 8K_2 - K_3\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \dfrac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right]\right). \end{cases}$$

6. Definire il concetto e le condizioni di Zero-stabilità di un metodo multistep lineare.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Febbraio 2007

Rispondere a 4 quesiti a scelta.

1. Descrivere il problema dell'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati.

2. Si consideri la classe di metodi multistep lineari definita dalla formula

$$y_{n+2} + \alpha y_{n+1} + \beta y_n = h\gamma f_n.$$

Caratterizzare l'insieme dei metodi convergenti appartenenti a tale classe.

3. Descrivere brevemente l'applicazione del metodo di Newton alla risoluzione di sistemi non lineari e descrivere come applicare il metodo per risolvere il seguente sistema non lineare:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\sin xy) + y \\ y &= x^2 \cos y - \sin x^2 \end{aligned}$$

4. Determinare le componenti del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, risulti

$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$

con

$$P = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T, \qquad \beta = \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$

ed $\mathbf{e}_1$ il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

5. Scrivere l'espressione generica di un metodo Runge-Kutta esplicito e di uno implicito entrambi a 4 stadi.

6. Sia Q una matrice ortogonale di ordine n, dire quale tra le seguenti affermazioni è vera motivando la risposta:
(a) il calcolo della matrice inversa è molto complicato;
(b) se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ allora $\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2$;
(c) il determinante di Q può essere uguale a zero.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Maggio 2007

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta.

1. Determinare l'ordine e la costante dell'errore del seguente metodo multistep convergente:

$$y_{n+2} - y_n - \frac{h}{3}\left[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\right] = 0.$$

2. Dimostrare che i quadrati dei valori singolari di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono gli autovalori delle matrici $A^T A$ e AA^T.

3. Spiegare brevemente come è possibile usare le matrici di Givens per calcolare la fattorizzazione QR di una matrice.

4. Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi non lineari. In quale caso il metodo non è applicabile?

5. Considerato il seguente metodo multistep implicito ($\beta_k \neq 0$)

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$

spiegare in quale modo si può calcolare l'approssimazione y_{n+k}.

6. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

7. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni

$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$

sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Maggio 2007

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta.

1. Verificare se il seguente metodo multistep è convergente:

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n - \frac{6}{11}hf_{n+3} = 0.$$

2. Scrivere l'array di Butcher relativo al seguente metodo Runge-Kutta:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right] \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{24}\left[5K_1 + 8K_2 - K_3\right]\right) \\ K_3 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{6}\left[K_1 + 4K_2 + K_3\right]\right). \end{cases}$$

3. Spiegare la differenza tra metodi Runge-Kutta impliciti ed espliciti. Cosa vuol dire che i metodi Runge-Kutta sono metodi ad un passo?

4. Determinare le componenti del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, risulti

$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$

con

$$P = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T, \qquad \beta = \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$

ed $\mathbf{e}_1$ il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

5. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

6. Ricavare l'espressione dei coefficienti della retta di regressione.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Luglio 2007

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

   Il metodo in questione è esplicito o implicito? Motivare la risposta.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore

$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$

   abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Descrivere come si presenta la decomposizione SVD compatta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{20 \times 10}$ di rango 5.

4. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

5. Definire il concetto di zero stabilità di un metodo multistep lineare e spiegare il motivo per cui, affinchè sia soddisfatta, il polinomio $\rho(z)$ deve soddisfare il criterio delle radici.

6. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2007

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Siano Q_1 e Q_2 due matrici ortogonali di ordine n, verificare se le seguenti matrici di ordine $2n$ sono ortogonali:

$$A = \begin{bmatrix} Q_1^T & Q_2 \\ Q_2^T & Q_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ O & O \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} O & I \\ Q_1 Q_2 & O \end{bmatrix},$$

   con O la matrice nulla e I matrice identità di ordine n.

2. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

   sia ortogonale.

3. Descrivere brevemente il metodo delle approssimazioni successive per sistemi di equazioni non lineari spiegando da cosa dipende la convergenza.

4. Spiegare se è possibile dedurre la proprietà di zero-stabilità dei metodi Runge-Kutta senza alcuna condizione.

5. Definire il concetto di assoluta stabilità.

6. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:

$$y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n - \frac{6}{11} h f_{n+3} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2007

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Ricavare l'espressione dei coefficienti della retta di regressione.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Definire brevemente il concetto di assoluta stabilità di un metodo numerico per equazioni differenziali ordinarie.

4. Descrivere come si presenta la decomposizione SVD compatta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{150\times 50}$ di rango $k \in \mathbb{N}$. Trovare il valore massimo di k per il quale la memorizzazione di tale fattorizzazione risulta più conveniente rispetto alla memorizzazione della matrice A.

5. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

6. Considerato il seguente metodo multistep implicito ($\beta_k \neq 0$)
$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$
spiegare in quale modo si può calcolare l'approssimazione y_{n+k}.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2007

Rispondere a 5 quesiti a scelta.

1. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
sia ortogonale.

2. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente
$$y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n = \frac{6h}{11} f_{n+3}.$$

3. Spiegare la differenza tra metodi Runge-Kutta impliciti ed espliciti. Cosa vuol dire che i metodi Runge-Kutta sono metodi ad un passo?

4. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni
$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$
sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze
$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

5. Spiegare come si trova la regione di assoluta stabilità del metodo del midpoint esplicito.

6. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spiegare la relazione che lega i valori singolari di A e gli autovalori della matrice $A^T A$ (oppure della matrice AA^T).

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Novembre 2007

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi esplicito tale che:
   1) Il primo polinomio caratteristico ammette come radici 1 e 1/4;
   2) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
   abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Descrivere come si presenta la decomposizione SVD compatta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{35\times 15}$ di rango 8. Qual è il minimo numero di locazioni di memoria necessarie per memorizzare le matrici di tale fattorizzazione?

4. Descrivere i metodi di Newton e di Newton modificato per la risoluzione di sistemi non lineari.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Febbraio 2008

1. Descrivere come si presenta la decomposizione SVD compatta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{25\times 15}$ di rango 9. Qual è il minimo numero di locazioni di memoria necessarie per memorizzare le matrici di tale fattorizzazione?

2. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n > m$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Definire il concetto di assoluta stabilità. Spiegare come si trova la regione di assoluta stabilità del seguente metodo multistep:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}.$$

4. Descrivere brevemente il metodo delle approssimazioni successive per sistemi di equazioni non lineari.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Febbraio 2008

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi esplicito tale che:
   1) Il primo polinomio caratteristico ammette come radici 1 e 1/3;
   2) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la matrice
$$H = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
   sia ortogonale.

3. Elencare le principali proprietà della matrici ortogonali.

4. Considerato il seguente metodo multistep implicito ($\beta_k \neq 0$)
$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$
   spiegare in quale modo si può calcolare l'approssimazione y_{n+k}.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Aprile 2008

1. Ricavare l'ordine e la costante dell'errore del seguente metodo multistep lineare convergente:

$$y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n - \frac{6}{11} h f_{n+3} = 0.$$

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore

$$\mathbf{y} = G_{p,q} \mathbf{x}$$

abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Spiegare perchè per i coefficenti dei metodi multistep lineari si pone $\alpha_k = 1$ e inoltre devono essere tali che

$$|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0.$$

4. Scrivere la definizione ed alcune proprietà delle matrici ortogonali.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Maggio 2008

1. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n - \frac{h}{8}\left[19f_{n+2} + 5f_n\right] = 0.$$

   Il metodo appena scritto è implicito o esplicito?

2. Determinare le componenti del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, risulti

$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$

   con

$$P = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{u}^T, \qquad \beta = \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$

   ed $\mathbf{e}_1$ il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

3. Descrivere brevemente gli aspetti algoritmici del metodo di Newton per la risoluzione di sistemi non lineari. In quale caso il metodo non è applicabile?

4. Scrivere la definizione di pseudoinversa di Moore-Penrose.

5. (Quesito alternativo al precedente). Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni

$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$

   sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Maggio 2008

1. Considerato il seguente metodo multistep implicito ($\beta_k \neq 0$)

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$

   spiegare in quale modo si può calcolare numericamente l'approssimazione y_{n+k}.

2. Spiegare il legame che c'è tra valori singolari e vettori singolari destri e sinistri.

3. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n - h \frac{2}{3} f_{n+2} = 0.$$

4. Ricavare l'espressione dei coefficienti della retta di regressione.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Luglio 2008

1. Determinare l'ordine e la costante dell'errore del seguente metodo multistep convergente:

$$y_{n+2} - y_n - \frac{h}{3}\left[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\right] = 0.$$

2. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

3. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

4. Definire il concetto di zero stabilità di un metodo multistep lineare e spiegare il motivo per cui, affinchè sia soddisfatta, il polinomio $\rho(z)$ deve soddisfare il criterio delle radici.

5. Definire la decomposizione ai valori singolari per una matrice quadrata.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2008

1. Scrivere la definizione di pseudoinversa di Moore-Penrose.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Ricavare l'espressione dei coefficienti della retta di regressione.

4. Applicando un metodo multistep lineare convergente ad un'equazione differenziale ordinaria si ha la garanzia di avere una soluzione numerica sufficientemente vicina a quella teorica per qualsiasi valore di h?

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2008

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi esplicito tale che:
   1) Il primo polinomio caratteristico ammette come radici 1 e 1/6;
   2) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Scrivere la definizione di pseudoinversa di Moore-Penrose.

3. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
   abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

4. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni
$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$
   sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze
$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2008

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi implicito tale che:
   1) $z = 0$ è radice doppia del polinomio $\sigma(z)$;
   2) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n > m$, per risolvere il seguente problema:
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Determinare le componenti del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, risulti
$$P\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1$$
con
$$P = I - \beta\mathbf{u}\mathbf{u}^T, \qquad \beta = \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$
ed $\mathbf{e}_1$ il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

4. Spiegare i concetti di convergenza e zero-stabilità di un metodo multistep lineare.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Novembre 2008

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi implicito tale che:
   1) Il primo polinomio caratteristico ammette come radice 1/3;
   2) $\sigma(0) = 0$;
   3) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Scrivere la definizione e le principali proprietà della pseudoinversa di Moore-Penrose.

3. Spiegare come si può utilizzare la fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, per risolvere il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

4. Considerato il seguente metodo multistep implicito ($\beta_k \neq 0$)

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} = 0.$$

   spiegare con quale metodo si può calcolare numericamente l'approssimazione y_{n+k} e sotto quale condizione risulta sicuramente convergente.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Febbraio 2009

1. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

2. Scrivere la definizione di ordine di un metodo multistep lineare. Perchè l'ordine di un metodo convergente deve essere almeno uguale a 1?

3. Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi non lineari. In quale caso il metodo non è applicabile?

4. Calcolare i coefficienti del metodo multistep lineare implicito a due passi tale che:
1) $\rho(0) = 0$;
2) $\beta_0 = -1/12$;
3) $\sigma'(0) = 2/3$.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Febbraio 2009

1. Scrivere le definizioni di errore locale di troncamento, consistenza e zero stabilità di un metodo multistep lineare.

2. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

3. Descrivere il Metodo di Newton Modificato per la risoluzione dei sistemi non lineari e spiegare perchè richiede un numero di operazioni inferiore rispetto al Metodo di Newton classico.

4. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Aprile 2009

Rispondere a quattro dei seguenti 5 quesiti:

1. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq p < q \leq n$, il vettore
$$\mathbf{y} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$, una matrice di rango $k < n$. Se
$$A = U\Sigma V^T$$
è la decomposizione ai valori singolari di A, come si può scrivere A come somma di matrici di rango 1?

4. Calcolare i coefficienti del metodo multistep lineare esplicito a tre passi convergente tale che:
1) $z = 0$ è radice doppia del polinomio $\rho(z)$;
2) $\beta_0 = 5/12$;
3) $\beta_2 = 23/12$.

5. Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi non lineari. In quale caso il metodo non è applicabile?

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Maggio 2009

Rispondere a quattro dei seguenti 5 quesiti:

1. Ricavare l'espressione dei coefficienti della retta di regressione.

2. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni

$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$

sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

3. Descrivere il fenomeno della cancellazione di cifre significative.

4. Scrivere la definizione di Matrice di Hyperlink e spiegare come si applica il metodo delle potenze per il calcolo del PageRank di un insieme di pagine web.

5. Spiegare come si utilizza la decomposizione ai valori singolari per risolvere il problema dei minimi quadrati.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Luglio 2009

1. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare convergente:

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

2. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

3. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

4. Scrivere la definizione e le principali proprietà della decomposizione ai valori singolari di una matrice reale $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Calcolare la SVD della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2009

1. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se δ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\delta) = \rho'(\delta) = 0$), allora la successione

$$y_n = n\delta^n$$

è soluzione dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

2. Spiegare perchè una matrice di Hyperlink ammette come autovalore 1.

3. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $1 \le p < q \le m$, il vettore

$$\mathbf{z} = G_{p,q}\mathbf{x}$$

abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

4. Verificare che il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n).$$

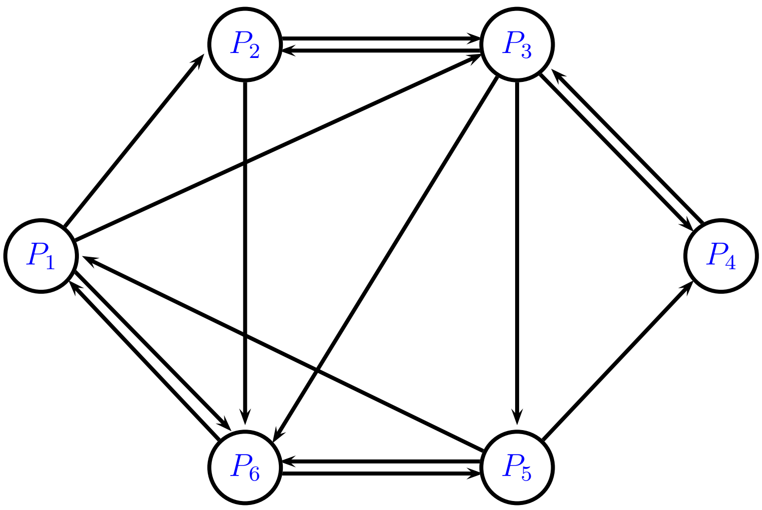
Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2009

1. Scrivere l'espressione del metodo multistep lineare a due passi esplicito tale che:
   1) Il primo polinomio caratteristico ammette come radice 1/6;
   2) Il metodo è convergente e ha almeno ordine 2.

2. Scrivere la definzione ed elencare le principali proprietà della matrici ortogonali. Spiegare perchè una matrice ortogonale deve avere necessariamente determinante, in modulo, uguale a 1.

3. Spiegare perchè, considerando le soluzioni numeriche ottenute applicando metodi multistep lineari di ordine p e q, con $p < q$, con un passo h sufficientemente piccolo, si prevede che quella ottenuta con il metodo di ordine superiore sia più precisa.

4. Scrivere la matrice di Hyperlink associata al seguente insieme di connessioni tra pagine web:



Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2009

1. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

2. Definire la decomposizione ai valori singolari di una matrice reale A quadrata di ordine n. Spiegare perchè vale la seguente proprietà:

$$|\det A| = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n.$$

3. Scrivere le ipotesi stotto le quali il metodo delle potenze risulta sicuramente convergente. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

4. Verificare se il seguente metodo multistep lineare è convergente

$$y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6h}{11}f_{n+3}.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Novembre 2009

1. Scrivere la definizione di Matrice di Hyperlink e spiegare come si applica il metodo delle potenze per il calcolo del PageRank di un insieme di pagine web.

2. Calcolare i coefficienti del metodo multistep lineare esplicito a tre passi convergente tale che:
   1) $z = 0$ è radice doppia del polinomio $\rho(z)$;
   2) $\beta_0 = 5/12$;
   3) $\beta_2 = 23/12$.

3. Scrivere le definizioni di errore locale di troncamento, consistenza e zero stabilità di un metodo multistep lineare.

4. Spiegare solo in cosa consiste la differenza nell'applicazione delle matrici di Householder e di Givens per calcolare la fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Febbraio 2010

1. Verificare che il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n).$$

2. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

3. Scrivere la definizione e le principali proprietà della decomposizione ai valori singolari di una matrice reale $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Spiegare quali potrebbero essere i fattori della SVD compatta del vettore colonna $\mathbf{x}$ avente n componenti.

4. Scrivere la definizione di ordine di un metodo multistep lineare e spiegare perchè l'ordine di un metodo convergente deve essere almeno uguale a 1.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Febbraio 2010

1. Scrivere la definizione di Matrice di Hyperlink e spiegare come si applica il metodo delle potenze per il calcolo del PageRank di un insieme di pagine web.

2. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $1 \leq p < q \leq m$, il vettore
$$\mathbf{z} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

3. Ricavare l'ordine del seguente metodo multistep lineare convergente:
$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n - h\frac{2}{3}f_{n+2} = 0.$$

4. Scrivere la defínzione ed elencare le principali proprietà della matrici ortogonali. Spiegare perchè una matrice ortogonale deve avere necessariamente determinante, in modulo, uguale a 1.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Maggio 2010

1. Spiegare solo in cosa consiste la differenza nell'applicazione delle matrici di Householder e di Givens per calcolare la fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Determinare l'ordine e la costante dell'errore del seguente metodo multistep convergente:
$$y_{n+2} - y_n - \frac{h}{3}\left[f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n\right] = 0.$$

3. Definire il concetto di zero stabilità di un metodo multistep lineare e spiegare il motivo per cui, affinchè sia soddisfatta, il polinomio $\rho(z)$ deve soddisfare il criterio delle radici.

4. Spiegare come si può utilizzare la decomposizione ai valori singolari della matrice rettangolare A per risolvere il problema lineare ai minimi quadrati.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Luglio 2010

1. Descrivere il metodo delle potenze e motivarne la convergenza. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

2. Scrivere la definizione di pseudo-inversa di Moore-Penrose e spiegare come può essere utilizzata per rappresentare la soluzione di un sistema lineare ai minimi quadrati.

3. Scrivere l'espressione della famiglia di metodi multistep lineari a due passi espliciti convergenti e con almeno ordine 2.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Luglio 2010

1. Scrivere la definizione di Matrice di Hyperlink e spiegare come si applica il metodo delle potenze per il calcolo del PageRank di un insieme di pagine web.

2. Determinare l'ordine e la costante dell'errore del seguente metodo multistep convergente:

$$y_{n+3} - y_{n+2} - \frac{h}{12}(23 f_{n+2} - 16 f_{n+1} + 5 f_n) = 0.$$

3. Spiegare come si può utilizzare la decomposizione ai valori singolari della matrice rettangolare A per risolvere il problema lineare ai minimi quadrati.

4. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se δ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\delta) = \rho'(\delta) = 0$), allora la successione

$$y_n = n\delta^n$$

è soluzione dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
I Appello di Settembre 2010

1. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

2. Scrivere la definizione e le principali proprietà della decomposizione ai valori singolari di una matrice reale $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Spiegare quali potrebbero essere i fattori della SVD compatta del vettore colonna $\mathbf{x}$ avente n componenti.

3. Calcolare l'ordine del seguente metodo multistep lineare:
$$y_{n+3} - y_{n+2} - \frac{h}{12}\left(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n\right) = 0.$$

4. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $1 \le p < q \le m$, il vettore
$$\mathbf{z} = G_{p,q}\mathbf{x}$$
abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
II Appello di Settembre 2010

1. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ determinare il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$H\mathbf{x} = k\mathbf{e}_1, \qquad H = I - \frac{2}{\|\mathbf{u}\|_2^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

2. Scrivere la definizione di pseudo-inversa di Moore-Penrose e spiegare come può essere utilizzata per rappresentare la soluzione di un sistema lineare ai minimi quadrati.

3. Verificare che il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n).$$

4. Definire la SVD troncata e specificare quale problema di migliore approssimazione essa risolve.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Dicembre 2010

1. Spiegare perchè una matrice di Hyperlink ammette come autovalore 1.

2. Dimostrare che, posto $\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$, se θ è una radice doppia del polinomio $\rho(z)$ (cioè $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), allora le successioni

$$y_n = \theta^n, \qquad y_n = n\theta^n$$

sono soluzioni dell'equazione lineare alle differenze

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0.$$

3. Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$, una matrice di rango $k < n$. Se

$$A = U\Sigma V^T$$

è la decomposizione ai valori singolari di A, come si può scrivere A come somma di matrici di rango 1?

4. Calcolare i coefficienti del metodo multistep lineare esplicito a tre passi convergente tale che:
1) $z = 0$ è radice doppia del polinomio $\rho(z)$;
2) $\beta_0 = 5/12$;
3) $\beta_2 = 23/12$.

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Febbraio 2011

1. Verificare che il seguente metodo multistep lineare è convergente:

$$y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n).$$

2. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

3. Determinare i valori delle costanti $c, s \in \mathbb{R}$ in modo tale che, considerato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e la matrice di Givens $G_{p,q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $1 \le p < q \le m$, il vettore

$$\mathbf{z} = G_{p,q}\mathbf{x}$$

abbia la $q-$esima componente uguale a zero.

4. Definire la decomposizione ai valori singolari di una matrice reale A quadrata di ordine n. Spiegare perchè vale la seguente proprietà:

$$|\det A| = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n.$$

Esame Scritto di Calcolo Numerico II
(Laurea di Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni)
Appello di Aprile 2011

1. Motivare brevemente la convergenza del metodo delle potenze. Spiegare perchè l'autovalore dominante di una matrice reale non può essere un numero complesso.

2. Scrivere la definizione e le principali proprietà della decomposizione ai valori singolari di una matrice reale $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Spiegare quali potrebbero essere i fattori della SVD compatta del vettore colonna $\mathbf{x}$ avente n componenti.

3. Scrivere l'espressione della famiglia di metodi multistep lineari a due passi espliciti convergenti e con almeno ordine 2.