

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Dicembre 2005**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(q_3, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_2$	$a$	$(yes, a, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$q_0$	$a$	$(q_2, a, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_3$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_3$	$b$	$(yes, b, -)$
$q_1$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_3$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$

- Scrivere le configurazioni relative all'input  $x = abbaa$ ;
  - Calcolare l'output  $M(abbaa)$ ;
  - Descrivere il sottoinsieme delle stringhe riconosciuto da  $M$ ;
  - Stimare il costo computazionale di  $M$  in funzione della lunghezza della stringa di input.
2. Classificare i seguenti problemi in base alla classe di complessità di appartenenza:
- Ricerca di un elemento in una lista ordinata di  $n$  elementi;
  - Prodotto tra due matrici quadrate di ordine  $n$ ;
  - Somma tra due matrici quadrate di ordine  $n$ ;

- Prodotto scalare tra due vettori di lunghezza  $n$ , scegliendo tra le seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 f(n) = \mathcal{O}(n^4) & f(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n) \\
 f(n) = \mathcal{O}(n) & f(n) = \mathcal{O}(n^2 \log_2 n) \\
 f(n) = \mathcal{O}(n^3) & f(n) = \mathcal{O}(2^n) \\
 f(n) = \mathcal{O}(n^2) & f(n) = \mathcal{O}(\log_2 n)
 \end{array}$$

- Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore.
- Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ . Sia  $(q, w, u)$  una configurazione di  $M$  e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da  $M$ ?

- Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

e dire se sono vere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{l}
 n^2 = \mathcal{O}(n \log_2 n), \\
 2^n = \mathcal{O}(c^n), \quad c > 2, \\
 n^2 + n = \mathcal{O}(n^2).
 \end{array}$$

- Spiegare cosa vuol dire calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.
- Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.
- Spiegare, eventualmente con l'uso di alcuni esempi, la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Gennaio 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base di una RAM e interpretare il seguente programma RAM:

1	READ	3
2	STORE	3
3	READ	2
4	STORE	2
5	READ	1
6	STORE	1
7	ADD	2
8	ADD	3
9	HALT	

2. Definire il Problema della Raggiungibilità di un grafo.
3. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
4. Definire il concetto e fornire qualche esempio di istanza di un problema e di dimensione di un'istanza.
5. Definire in modo formale una macchina di Turing e l'output di una macchina di Turing.
6. Definire la configurazione di una RAM.
7. Definire con esempi una classe di complessità.
8. Dimostrare il legame che esiste tra il progresso tecnologico e gli algoritmi con tempo polinomiale ed esponenziale. Dire se esiste tale legame anche per la risorsa spazio.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Febbraio 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_0$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_1$	0	$(q_0, 0, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(s, \sqcup, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(s, \sqcup, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
- Calcolare l'output  $M(01110)$ ;
- Determinare la configurazione  $(q, x, y)$  tale che:

$$(q_0, 01 \sqcup 0 \sqcup 1, 010101111 \sqcup) \xrightarrow{M^6} (q, x, y).$$

2. Definire una macchina RAM.
3. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

4. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
5. Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

e fornire un esempio di due funzioni  $g(n)$  ed  $f(n)$  che soddisfino tale proprietà.

6. Definire la classe NP.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Marzo 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_1, a, \rightarrow)$	$q_1$	$c$	$(s, c, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$c$	$(s, c, \rightarrow)$	$q_2$	$a$	$(q_1, a, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_2$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$c$	$(yes, c, -)$
$q_1$	$a$	$(q_1, a, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$q_1$	$b$	$(q_2, b, \rightarrow)$			

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Calcolare  $M(abcab)$  e  $M(bcaa)$ ;
  - In base al risultato del punto precedente descrivere l'insieme delle stringhe riconosciute da  $M$ .
2. Descrivere il Problema Decisionale del Commesso Viaggiatore.
  3. Definire la classe NP.
  4. Spiegare, anche con l'uso di alcuni esempi, la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.
  5. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

6. Definire il Problema della Raggiungibilità di un grafo.

7. Definire la configurazione di una RAM.

8. Spiegare cosa vuol dire

$$\begin{aligned}f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\f(n) &= \Theta(g(n)) \\f(n) &= \Omega(g(n)).\end{aligned}$$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Aprile 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base, la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ . Sia  $(q, w, u)$  una configurazione di  $M$  e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da  $M$ ?

3. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

4. Spiegare la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.
5. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
6. Definire i possibili output di una macchina di Turing.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Maggio 2006**

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire la configurazione di una macchina RAM. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere la configurazione della macchina al termine della loro esecuzione, considerati come registri di input (3, 4, 0):

1	READ	1
2	JZERO	14
3	STORE	1
4	READ	2
5	JZERO	13
6	ADD	1
7	STORE	1
8	READ	3
9	JZERO	13
10	ADD	1
11	STORE	1
12	JUMP	14
13	LOAD	1
14	HALT	

2. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ . Sia  $(q, w, u)$  una configurazione di  $M$  e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da  $M$ ?

3. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

4. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

5. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
6. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Luglio 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Considerare la macchina di Turing definita dalla seguente funzione di transizione.

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_1$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(no, b, -)$
$q_0$	$a$	$(no, a, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

- Definire l'insieme dei possibili stati.
  - Definire l'alfabeto della macchina.
  - Calcolare  $M(aaba)$  e  $M(abab)$ .
  - Scrivere l'insieme delle stringhe riconosciute da  $M$ .
2. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi aventi costo computazionale
$$f_A(n) = kn^2 + 3n, \quad f_B(n) = k^2n\sqrt{n} + 20n$$
con  $k$  costante positiva. Determinare il valore di  $n$  che rende il costo computazionale di  $B$  inferiore rispetto a quello di  $A$ .
  3. Definire le caratteristiche degli algoritmi appartenenti alla classe NP.
  4. Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore e le relative problematiche dal punto di vista computazionale.
  5. Definire i possibili output di una macchina di Turing.
  6. Spiegare perchè il problema di trovare il vertice con il massimo in-degree (o out-degree) di un grafo orientato appartiene alla classe P. (*Suggerimento*: un possibile algoritmo deve avere complessità  $\mathcal{O}(n^2)$ .)
  7. Definire la configurazione di una RAM.
  8. Elencare i criteri da considerare nella valutazione della complessità di un algoritmo.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Luglio 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Definire le istruzioni base, la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned}f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\f(n) &= \Theta(g(n)) \\f(n) &= \Omega(g(n)).\end{aligned}$$

3. Disegnare un grafo diretto con almeno 6 vertici e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto. Indicare i vertici con il massimo grado di ingresso e di uscita.
4. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = n^3.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

5. Descrivere un algoritmo per risolvere il Problema della Raggiungibilità di un grafo.
6. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Settembre 2006**

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire una macchina di Turing multinastro ed in particolare descrivere come deve essere definita la funzione di transizione.
2. Spiegare le motivazioni (almeno due) che, nella valutazione di un algoritmo, spingono a privilegiare la risorsa tempo alla risorsa spazio.
3. Spiegare come varia, in funzione del progresso tecnologico, lo studio della complessità degli algoritmi. Quale classe di problemi trae maggiori vantaggi da esso e perchè?
4. Descrivere la sintassi delle istruzioni di salto di una macchina RAM.
5. Calcolare (in modo approssimato) la complessità computazionale del calcolo della seguente formula:

$$S_n := \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i f_k$$

sapendo che il costo per calcolare  $f_k$  è  $\mathcal{O}(2^k)$ .

6. Si consideri la macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ , dove

$$K = \{s, q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

e si completi la seguente tabella della funzione di transizione  $\delta$  in modo tale che  $M$  riconosca le stringhe del tipo  $a \underbrace{b \dots b}_k a$ , con  $k \geq 0$ .

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$		$q_0$	$b$	
$s$	$b$		$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_1$	$a$	$(no, a, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	
$q_0$	$a$		$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Settembre 2006**

Rispondere a 5 quesiti a scelta:

1. Definire la configurazione e la complessità di una macchina RAM.
2. Definire le classi di complessità con particolare riferimento alle classi P ed NP.
3. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ . Sia  $(q, w, u)$  una configurazione di  $M$  e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da  $M$ ?

4. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.
5. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n, \quad f_B(n) = \log_2^2 n.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

6. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\ f(n) &= \Theta(g(n)) \\ f(n) &= \Omega(g(n)). \end{aligned}$$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_0$	$a$	$(s, a, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$	$q_0$	$b$	$(q_0, b, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_0$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$			

- Scrivere i passi relativi all'input  $x = ababa$  e calcolare l'output  $M(ababa)$ ;
  - Scrivere i passi relativi all'input  $x = baab$  e calcolare l'output  $M(baab)$ ;
  - Descrivere il sottoinsieme delle stringhe riconosciuto da  $M$ .
2. Siano  $A, B, C, D$  ed  $E$  cinque algoritmi per risolvere il problema  $P$ , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^3$	$n^4$
B	$2n^3$	$n^3$
C	$2^n$	$n^2$
D	$2^n$	$n \log_2 n^2$
E	$2^n$	$n \log_2 n$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

3. Perché la funzione complessità in tempo di un algoritmo in funzione della dimensione  $n$  del problema deve essere monotona crescente?
4. Dimostrare il legame che esiste tra il progresso tecnologico e gli algoritmi con tempo polinomiale ed esponenziale. Dire se esiste tale legame anche per la risorsa spazio.
5. Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che

$$(\kappa, R) \xrightarrow{\Pi, I} (\kappa', R').$$

Spiegare in quali circostanze risulta  $R = R'$ .

6. Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore e le relative problematiche dal punto di vista computazionale.
7. Enunciare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Novembre 2006**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q, q_0\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$0$	$(s, 0, \rightarrow)$	$q$	$1$	$(no, 1, -)$
$s$	$1$	$(s, 1, \rightarrow)$	$q$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$s$	$\sqcup$	$(q, \sqcup, \leftarrow)$	$q_0$	$0$	$(yes, 0, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_0$	$1$	$(no, 1, -)$
$q$	$0$	$(q_0, 0, \leftarrow)$	$q_0$	$\triangleright$	$(yes, \triangleright, -)$

- Calcolare  $M(100)$  e  $M(1010)$ ;
  - Se la stringa in input  $x$  è la rappresentazione binaria di un numero intero quali numeri sono riconosciuti da  $M$ ?
2. Spiegare la differenza che c'è tra le seguenti istruzioni di una RAM:

$$\begin{array}{ll} \text{ADD} & j \\ \text{ADD} & = j \\ \text{ADD} & \uparrow j \end{array}$$

con  $j$  numero intero, e spiegare come cambia la configurazione della macchina dopo che è stata eseguita ciascuna di esse.

3. Definire la configurazione di una macchina di Turing.

4. Siano A,B,C e D quattro algoritmi che risolvono il problema  $\Pi$ . Siano  $f_A(n)$ ,  $f_B(n)$ ,  $f_C(n)$  ed  $f_D(n)$  le relative funzioni di complessità in tempo. Sapendo che:
- $f_B(n) = \Theta(f_A(n))$ ;
  - l'algoritmo C è più efficiente di A (cioè  $f_C(n) \leq f_A(n)$ );
  - l'algoritmo B è più efficiente di D (cioè  $f_B(n) \leq f_D(n)$ );
  - $f_D(n) = \mathcal{O}(n^4)$ ;
- stabilire quale algoritmo è più efficiente e se  $\Pi \in P$ .
5. Definire il concetto di classe di complessità.
6. Tracciare il grafo definito dalla seguente matrice di adiacenza.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di un grafo diretto? Trovare un percorso Hamiltoniano (se esiste).

7. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Febbraio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(no, 1, -)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(yes, 0, -)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_1$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(q_3, \sqcup, \leftarrow)$
$q_0$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(yes, 1, -)$
$q_0$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$	$q_3$	0	$(no, 0, -)$

- Scrivere i passi relativi alla computazioni per le stringhe di input  $x = 01100$  e  $x = 1000$ ;
  - Calcolare i relativi output  $M(01100)$  e  $M(1000)$ .
2. Un problema a costo logaritmico appartiene alla classe P? Motivare la risposta.
  3. Definire una macchina di Turing multinastro.
  4. Sia  $G = (V, A)$  un grafo diretto con:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

e

$$A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_3)\},$$

scrivere la matrice di adiacenza di  $G$  e rappresentarlo graficamente.

- Enunciare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.
- Siano  $A, B, C, D$  ed  $E$  cinque algoritmi per risolvere il problema  $P$ , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^3$	$n^4$
B	$n^4$	$n^3$
C	$2^n$	$3 \log_2 n$
D	$3^n$	$2 \log_2 n$
E	$4^n$	$\log_2 n$

Si scriva quali sono, rispettivamente, il più ed il meno efficiente, valutando complessivamente le due funzioni di complessità.

- Definire la configurazione di una macchina RAM e come si valuta la sua complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Febbraio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_1$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(yes, b, -)$
$q_0$	$a$	$(yes, a, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$

- Scrivere i passi e calcolare l'output  $M(ababbab)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe che non contengono il simbolo } a \}$ ;  
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe che hanno almeno due caratteri consecutivi uguali} \}$ ;  
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe che non hanno caratteri consecutivi uguali} \}$ .
2. Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che il passaggio da  $C$  a  $C'$  avvenga dopo l'esecuzione di un'unica istruzione. Spiegare in quali circostanze risulta  $\kappa' \neq \kappa + 1$ .
3. Descrivere il Problema del Commesso Viaggiatore e le relative problematiche dal punto di vista computazionale.
4. Spiegare come varia, in funzione del progresso tecnologico, lo studio della complessità degli algoritmi. Quale classe di problemi trae maggiori vantaggi da esso e perchè?

5. Spiegare il concetto di classe NP-hard.
6. Spiegare la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.
7. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$\begin{aligned}f(n) &= \mathcal{O}(g(n)) \\f(n) &= \Theta(g(n)) \\f(n) &= \Omega(g(n)).\end{aligned}$$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Maggio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0, q_1\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_1$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(no, b, -)$
$q_0$	$a$	$(no, a, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

- Scrivere i passi e calcolare l'output  $M(ababab)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe che contengono solo il simbolo } a \}$ ;  
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe che hanno almeno due caratteri consecutivi uguali } \}$ ;  
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe che non hanno caratteri consecutivi uguali } \}$ .
2. Definire in modo formale una macchina di Turing e tutti i possibili valori dell'output.
  3. Dimostrare il legame che esiste tra il progresso tecnologico e gli algoritmi con tempo polinomiale ed esponenziale.
  4. Scrivere la sintassi delle istruzioni di una RAM che effettuano operazioni aritmetiche.

5. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad f(n) = \Theta(g(n)) \quad f(n) = \Omega(g(n)).$$

6. Spiegare il concetto di algoritmo non deterministico.

7. Spiegare la cosiddetta Tesi del Calcolo Sequenziale.



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Maggio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ , definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(no, b, -)$	$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_1$	$a$	$(no, a, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$q_0$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Calcolare l'output  $M(aabbb)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe del tipo } \underbrace{a \dots a}_k \underbrace{b \dots b}_m, \text{ con } k, m \geq 1 \};$   
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe del tipo } \underbrace{a \dots a}_k \underbrace{b \dots b}_m, \text{ con } k, m \geq 0 \};$   
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe del tipo } \underbrace{ab}_k, \text{ con } k, m \geq 0, \}.$
2. Spiegare la cosiddetta Tesi del Calcolo Sequenziale.
  3. Definire una macchina di Turing multinastro.
  4. Definire la configurazione di una RAM.
  5. Definire il concetto e fornire qualche esempio di istanza di un problema e di dimensione di un'istanza. Come si interpreta tale concetto nel caso di una macchina di Turing?
  6. Definire la classe NP.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Luglio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ , definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$0$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$1$	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	$1$	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(h, 0, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_1$	$0$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$1$	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$q_0$	$0$	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(h, 1, \rightarrow)$

- Verificare con un esempio che la stringa di output coincide con quella di input cui viene aggiunto il simbolo "1" all'inizio (cioè  $M(x) = "1x"$ );
  - Specificare dove si trova la testina al termine della computazione;
  - Come si dovrebbe modificare la funzione di transizione per aggiungere il simbolo "0" all'inizio della stringa?
2. Definire il concetto e fornire qualche esempio di istanza di un problema e di dimensione di un'istanza. Come si interpreta tale concetto nel caso di una macchina di Turing?
  3. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.
  4. Spiegare il concetto di classe NP-hard.
  5. Definire come si valuta la complessità in spazio di una macchina di Turing.
  6. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2(\sqrt{n}), \quad f_B(n) = n^{\frac{3}{2}}.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo, determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Luglio 2007**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_1$	$a$	$(q_1, a, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(q_3, \sqcup, \leftarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$a$	$(yes, a, -)$
$q_0$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_2$	$b$	$(no, b, -)$
$q_0$	$b$	$(q_0, b, \rightarrow)$	$q_3$	$a$	$(no, a, -)$
$q_0$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$	$q_3$	$b$	$(yes, b, -)$

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Calcolare  $M(abbbb)$  e  $M(bbaab)$ ;
  - Determinare l'insieme delle stringhe riconosciute da  $M$ .
  - L'insieme delle stringhe composte da un singolo carattere è riconosciuto da  $M$ ?
2. Spiegare il significato di "Worst Case Analysis" e perchè si deve calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.
  3. Spiegare perchè  $P \subset NP$ .
  4. Scrivere l'insieme delle istruzioni base di una RAM.
  5. Disegnare un grafo diretto e identificare in esso un cammino diretto, un cammino diretto chiuso e un percorso (path) diretto.
  6. Definire la configurazione di una RAM.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Settembre 2007**

Rispondere ai primi due quesiti e ad altri 3 a scelta:

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

dove

$$K = \{s, q_0\}, \quad \Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$0$	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_0$	$0$	$(s, 0, \rightarrow)$
$s$	$1$	$(s, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$1$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$			

- Verificare con due esempi non banali che  $M$  riconosce solo le stringhe che hanno un numero pari di caratteri uguali a "0".
  - Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
    - (a) La stringa vuota non è riconosciuta da  $M$ .
    - (b) La posizione finale della testina è la cella contenente l'ultimo carattere della stringa di input.
    - (c) La stringa di input  $x$  non viene modificata durante la computazione.
    - (d) La macchina si trova nello stato  $q_0$  quando la testina ha incontrato un numero dispari di caratteri uguali a "0".
2. Sia  $M$  una macchina di Turing tale che

$$(q, \triangleright 100, 00111\sqcup) \xrightarrow{M^2} (t, \triangleright 10010, 111\sqcup).$$

Determinare il possibile valore che potrebbe assumere la funzione di transizione  $\delta(q, 0)$ .

3. Definire la configurazione di una RAM.

4. Spiegare cosa vuol dire

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

e fornire un esempio di due funzioni  $g(n)$  ed  $f(n)$  che soddisfano tale proprietà.

5. Spiegare la tesi del calcolo sequenziale.
6. Spiegare perchè si deve calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Settembre 2007**

Rispondere al primo quesiti e ad altri 4 a scelta:

- Si supponga di aver definito la seguente funzione di transizione associata alla macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$  che, accettata in input una stringa di cifre binarie  $x$  che rappresenta il numero  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , calcoli il valore  $n - 1$  in cifre binarie:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$0$	$(s, 0, \rightarrow)$	$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$
$s$	$1$	$(s, 1, \rightarrow)$	$q$	$0$	$(q, 1, \leftarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(q, \sqcup, \leftarrow)$	$q$	$1$	$(h, 0, -)$

- Calcolare  $M(100)$ ;
  - $M$  è applicabile a stringhe composte solo da cifre uguali a "0"?
- Siano  $(q, u, v)$  e  $(q', u', v')$  le configurazioni di una macchina di Turing tali che

$$(q, u, v) \xrightarrow{M} (q', u', v').$$

È possibile che siano  $u = u'$  e  $v = v'$ ? Se le stringhe  $u$  e  $u'$  hanno la stessa lunghezza cosa si può dire sulla lunghezza delle stringhe  $v$  e  $v'$ ?

- Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che il passaggio da  $C$  a  $C'$  avvenga dopo l'esecuzione di un'unica istruzione. Spiegare in quali circostanze risulta  $\kappa' \neq \kappa + 1$ .
- Siano  $f(n), g(n)$  e  $h(n)$  tre funzioni tali che

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)), \quad h(n) = \mathcal{O}(f(n)).$$

Cosa si può dire sulla relazione che lega  $g(n)$  ed  $h(n)$ ?

- Spiegare perchè  $P \subset NP$ .
- Spiegare la differenza tra problemi di ricerca, di enumerazione e di decisione.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2007**  
**Traccia A**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

- Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(s, a, \rightarrow)$	$q_0$	$c$	$(no, c, -)$
$s$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$s$	$c$	$(s, c, \rightarrow)$	$q_1$	$a$	$(no, a, -)$
$s$	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \leftarrow)$	$q_1$	$b$	$(yes, b, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$c$	$(no, c, -)$
$q_0$	$a$	$(no, a, -)$	$q_1$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$q_0$	$b$	$(q_1, b, \leftarrow)$			

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Scrivere i passi e calcolare l'output  $M(aaccbb)$  e  $M(abcbb)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe che terminano con due caratteri uguali} \};$   
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno tre caratteri uguali a } b \};$   
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno due caratteri uguali a } b \};$
  - Il cosiddetto caso peggiore si ha quando l'output è *yes* o *no*? Spiegare.
- Enunciare la tesi del Calcolo Sequenziale.
  - Spiegare come si decide l'appartenenza di un problema ad una determinata classe di complessità.
  - Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che il passaggio da  $C$  a  $C'$  avvenga dopo l'esecuzione di un'unica istruzione. Spiegare in quali circostanze l'insieme  $R$  resta invariato (cioè  $R = R'$ ) mentre  $\kappa' = \kappa + 1$ .

5. Definire il problema complementare del TSP Decisionale. Spiegare se  $TSP - D \in \text{co-NP}$ .
6. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:  
 $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad f(n) = \Theta(g(n)), \quad f(n) = \Omega(g(n))$ .



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2007**  
**Traccia B**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

- Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(s, a, \rightarrow)$	$q_0$	$c$	$(q_1, c, \leftarrow)$
$s$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$s$	$c$	$(s, c, \rightarrow)$	$q_1$	$a$	$(no, a, -)$
$s$	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \leftarrow)$	$q_1$	$b$	$(no, b, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$c$	$(yes, c, -)$
$q_0$	$a$	$(no, a, -)$	$q_1$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$q_0$	$b$	$(no, b, -)$			

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Scrivere i passi e calcolare l'output  $M(bbaacc)$  e  $M(cbab)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe che terminano con due caratteri uguali} \};$   
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno tre caratteri uguali a } c \};$   
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno due caratteri uguali a } c \};$
  - Il cosiddetto caso peggiore si ha quando l'output è *yes* o *no*? Spiegare.
- Definire la configurazione di una RAM.
  - Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che il passaggio da  $C$  a  $C'$  avvenga dopo l'esecuzione di un'unica istruzione. Spiegare in quali circostanze l'insieme  $R$  resta invariato (cioè  $R = R'$ ) mentre  $\kappa' = \kappa + 1$ .
  - Definire il problema complementare del TSP Decisionale. Spiegare se  $TSP - D \in \text{co-NP}$ .

5. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad f(n) = \Theta(g(n)), \quad f(n) = \Omega(g(n)).$$

6. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2007**  
**Traccia C**

Rispondere al primo quesito e ad altri 4 a scelta:

1. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(s, a, \rightarrow)$	$q_0$	$c$	$(no, c, -)$
$s$	$b$	$(s, b, \rightarrow)$	$q_0$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$s$	$c$	$(s, c, \rightarrow)$	$q_1$	$a$	$(yes, a, -)$
$s$	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \leftarrow)$	$q_1$	$b$	$(no, b, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$c$	$(no, c, -)$
$q_0$	$a$	$(q_1, a, \leftarrow)$	$q_1$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$q_0$	$b$	$(no, b, -)$			

- Scrivere l'alfabeto  $\Sigma$  e l'insieme degli stati  $K$ ;
  - Scrivere i passi e calcolare l'output  $M(ccbbaa)$  e  $M(cbab)$ ;
  - Dire quale tra i seguenti insiemi di stringhe è riconosciuto da  $M$ :  
 $\Sigma_1 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno tre caratteri uguali ad } a \};$   
 $\Sigma_2 = \{ \text{stringhe che terminano con almeno due caratteri uguali ad } a \};$   
 $\Sigma_3 = \{ \text{stringhe che terminano con due caratteri uguali} \};$
  - Il cosiddetto caso peggiore si ha quando l'output è *yes* o *no*? Spiegare.
2. Definire la configurazione di una Macchina di Turing.
  3. Siano  $C = (\kappa, R)$  e  $C' = (\kappa', R')$  le configurazioni di una RAM applicata all'input  $I$  e tali che il passaggio da  $C$  a  $C'$  avvenga dopo l'esecuzione di un'unica istruzione. Spiegare in quali circostanze l'insieme  $R$  resta invariato (cioè  $R = R'$ ) mentre  $\kappa' = \kappa + 1$ .
  4. Definire il problema complementare del TSP Decisionale. Spiegare se  $TSP - D \in \text{co-NP}$ .

5. Spiegare, anche con qualche esempio, la seguente simbologia:  
 $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad f(n) = \Theta(g(n)), \quad f(n) = \Omega(g(n))$ .
6. Spiegare come si decide l'appartenenza di un problema ad una determinata classe di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Novembre 2007**

1. Elencare le problematiche che si presenterebbero volendo progettare una macchina di Turing  $M$  che, accettata una stringa binaria in input, fornisca in uscita una stringa avente gli stessi caratteri ma in ordine inverso, (per esempio  $M(011010) = 010110$ ).  
Cosa cambierebbe se la macchina di Turing potesse disporre di due (o più) nastri?
2. Considerare il seguente programma di una RAM:

1	READ	1
2	STORE	1
3	ADD	= 1
4	STORE	2
5	READ	↑ 2
6	STORE	3
7	LOAD	1
8	SUB	= 1
9	JZERO	18
10	STORE	1
11	LOAD	2
12	SUB	= 1
13	STORE	2
14	READ	↑ 2
15	ADD	3
16	STORE	3
17	JUMP	7
18	LOAD	3
19	HALT	

Scrivere le configurazioni della RAM quando viene applicata all'input  $I = (3, 1, 5, 7)$ .

Cosa calcola tale programma? Qual è l'interpretazione dei dati memorizzati nei diversi registri?

3. Perché la funzione complessità in tempo di un algoritmo in funzione della dimensione  $n$  del problema deve essere necessariamente monotona crescente?
4. Spiegare la seguente affermazione:  
"Un problema  $\Pi \in P$  può essere risolto in tempo polinomiale anche con un algoritmo non deterministico, cioè  $\Pi \in NP$ ".

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Febbraio 2008**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ , dove  $K = \{s, q_0, q_1, q_2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$ , mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_1$	$a$	$(q_2, a, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(yes, b, -)$	$q_1$	$b$	$(q_0, b, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$a$	$(yes, a, -)$
$q_0$	$a$	$(yes, a, -)$	$q_2$	$b$	$(no, b, -)$
$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$			

Identificare e correggere le 4 transizioni errate in modo tale che  $M$  risponda *yes* solo quando la stringa di input  $x$  è del tipo  $ab \underbrace{\dots}_k ba$ , con  $k$  numero dispari.

2. È possibile che il seguente cambio di configurazione di una RAM:

$$(\kappa, \{(0, 2), (1, 2), (3, 6)\}) \xrightarrow{\Pi, I^m} (\kappa', \{(0, 8), (1, 2), (2, 8), (3, 6)\})$$

avvenga dopo l'esecuzione di una singola istruzione (cioè  $m = 1$ ).

3. Siano  $A, B, C, D$  ed  $E$  cinque algoritmi per risolvere il problema  $P$ , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$2n^2 \log_2 n$	$n^3$
B	$n^2 \log_2 n^2$	$n^4$
C	$2^n$	$n^2$
D	$3^n$	$n \log_2 n^2$
E	$2^n$	$n \log_2 n$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

4. Perché la funzione complessità in tempo di un algoritmo in funzione della dimensione  $n$  del problema deve essere monotona crescente? La complessità di un algoritmo dipende dalla potenza di calcolo dell'elaboratore? La classe di appartenenza di un problema può variare in funzione dell'aumento delle potenzialità di calcolo degli elaboratori?



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Febbraio 2008**

1. Considerare il seguente programma di una RAM:

1	READ	1
2	STORE	1
3	ADD	= 1
4	STORE	2
5	READ	↑ 2
6	STORE	3
7	LOAD	1
8	SUB	= 1
9	JZERO	18
10	STORE	1
11	LOAD	2
12	SUB	= 1
13	STORE	2
14	READ	↑ 2
15	ADD	3
16	STORE	3
17	JUMP	7
18	LOAD	3
19	HALT	

Scrivere le configurazioni della RAM quando viene applicata all'input  $I = (3, 1, 5, 7, 6)$ . Cosa calcola tale programma? Esiste un dato di input che non viene utilizzato per calcolare l'output?

2. Definire in modo estremamente sintetico la classe NP.
3. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \log_2 n^2, \quad f_B(n) = (\log_2 n)^2.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

4. Definire la configurazione  $(q, u, w)$  di una Macchina di Turing. Se  $(q, u, v)$  e  $(q', u', v')$  sono due configurazioni di una macchina di Turing tali che

$$(q, u, v) \xrightarrow{M} (q', u', v').$$

È possibile che siano  $u = u'$  e  $v = v'$ ? Se le stringhe  $u$  e  $u'$  hanno la stessa lunghezza cosa si può dire sulla lunghezza delle stringhe  $v$  e  $v'$ ? Devono avere anch'esse la stessa lunghezza?

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Maggio 2008**

1. Si descriva la macchina di Turing che, accettando in input stringhe numeriche, riconosca il tuo numero di matricola (cioè si indichi l'alfabeto della macchina, il numero di stati necessari e la struttura della funzione di transizione, senza scriverne esplicitamente la tabella).
2. Spiegare le motivazioni (almeno due) che, nella valutazione di un algoritmo, spingono a privilegiare la risorsa tempo alla risorsa spazio.
3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando brevemente la risposta):
  - (a) La complessità in tempo delle macchine RAM dipende dal numero di registri utilizzati;
  - (b)  $TSP \in NP$ ;
  - (c) Le complessità in tempo e spazio della macchina di Turing vengono calcolate in funzione dello stesso parametro;
  - (d) Non esistono istruzioni RAM in grado di modificare il contenuto di due registri;
  - (e) La complessità in tempo delle macchine di Turing multinastro è funzione del numero di nastri.
4. Enunciare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Luglio 2008**

1. Definire il tempo di computazione di una macchina di Turing  $M$  applicata ad una stringa di input  $x$ .
2. Si consideri la seguente macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$  dove

$$K = \{s, q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{a, b, \triangleright, \sqcup\}$$

mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_1$	$b$	$(q_3, b, \rightarrow)$
$s$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_2$	$a$	$(q_2, a, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$q_0$	$a$	$(q_2, a, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$q_0$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$	$q_3$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_3$	$b$	$(q_3, b, \rightarrow)$
$q_1$	$a$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$q_3$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

che riconosce le stringhe che terminano con almeno due caratteri uguali.

- Scrivere le configurazioni relative all'input  $x = abaaa$ ;
  - Identificare il significato degli stati  $q_0$  e  $q_2$  (ovvero in quali circostanze  $M$  arriva in tali stati ed in quali circostanze li lascia);
  - Spiegare se la stringa vuota è riconosciuta da  $M$ .
3. Spiegare perchè si deve calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile (Almeno due motivazioni).
  4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando brevemente la risposta):
    - (a) La complessità in tempo delle macchine RAM dipende dal numero di registri utilizzati;
    - (b) Se  $f(n)$  e  $g(n)$  sono due funzioni tali che  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  allora

vuol dire che  $f(n) \leq g(n)$  per  $n > n_0 \in \mathbb{N}$ ;

(c) Le istruzioni di salto di una RAM modificano solo il valore del Program Counter;

(d) La funzione complessità in tempo di un algoritmo in funzione della dimensione  $n$  del problema deve essere monotona crescente.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Luglio 2008**

1. Considerare la seguente RAM, scrivere le configurazioni quando viene applicata ai registri di input (4, 3, 2):

1	READ	1
2	JNEG	13
3	JZERO	13
4	STORE	2
5	SUB	= 1
6	JZERO	12
7	STORE	1
8	ADD	2
9	STORE	2
10	LOAD	1
11	JUMP	5
12	LOAD	2
13	HALT	

Cosa calcola la RAM appena descritta?

2. Spiegare la Tesi del Calcolo Sequenziale.
3. Spiegare perchè  $P \subset NP$ .
4. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ , tale che

$$(q, \triangleright 11, 1011 \sqcup) \xrightarrow{M^2} (q, \triangleright 111, 011 \sqcup).$$

Calcolare  $\delta(q, 1)$  e  $\delta(q, 0)$  sapendo che, durante le computazioni, la macchina resta sempre nello stesso stato e che l'alfabeto  $\Sigma$  è uguale al seguente insieme:  $\{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$ .

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Settembre 2008**

1. Si consideri il seguente programma RAM:

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	READ	↑ 1
4	JZERO	16
5	STORE	2
6	LOAD	1
7	ADD	= 1
8	STORE	1
9	READ	↑ 1
10	STORE	3
11	JZERO	16
12	SUB	2
13	JNEG	6
14	LOAD	3
15	JUMP	5
16	LOAD	2
17	HALT	

Scrivere le configurazioni della RAM quando viene applicata all'input  $I = (8, 6, 0)$ . Supponendo che la RAM sia stata progettata per calcolare la funzione  $\phi$ , quanto vale  $\phi(I)$ ? Quale circostanza provoca l'arresto della RAM?

2. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ , tale che

$$(q, \triangleright 11, 100\sqcup) \xrightarrow{M^2} (q, \triangleright 10, 000\sqcup).$$

Determinare i possibili valori che potrebbe assumere  $\delta(q, 1)$ , sapendo che la macchina resta sempre nello stesso stato e che l'alfabeto  $\Sigma$  è uguale al seguente insieme:  $\{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$ .

3. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.
4. Indicare quali tra le seguenti affermazioni sono vere:
  - [a] Una conseguenza della tesi del calcolo sequenziale è che
    - (I) le macchine di Turing hanno complessità inferiore rispetto agli altri modelli di calcolo.
    - (II) tutti i modelli di calcolo sono equivalenti tra loro.
    - (III) un algoritmo RAM con complessità esponenziale ha la stessa complessità dell'equivalente algoritmo codificato utilizzando una macchina di Turing.
    - (IV) un algoritmo RAM con complessità polinomiale ha una complessità superiore rispetto all'equivalente algoritmo codificato utilizzando una macchina di Turing.
  - [b] Sia  $\Pi$  un problema appartenente alla classe NP. Questo significa che
    - (I) sicuramente  $\Pi$  non appartiene alla classe P.
    - (II)  $\Pi$  potrebbe appartenere alla classe P.
    - (III) sicuramente  $\Pi$  appartiene alla classe P.
    - (IV) non possiamo affermare che  $\Pi$  appartiene alla classe P.
  - [c] Sia  $\Pi$  un problema appartenente alla classe P. Questo significa che
    - (I) non esistono algoritmi con complessità esponenziale in grado di risolvere  $\Pi$ .
    - (II) esiste un algoritmo con complessità esponenziale in grado di risolvere  $\Pi$ .
    - (III) esiste sicuramente un algoritmo con complessità logaritmica in grado di risolvere  $\Pi$ .
    - (IV) finora non esiste alcun algoritmo con complessità logaritmica in grado di risolvere  $\Pi$ .



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2008**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina quando viene applicata all'input  $I = (2, 6, 3, -4)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	STORE	2
4	READ	$\uparrow 1$
5	JNEG	21
6	STORE	3
7	LOAD	1
8	ADD	= 1
9	STORE	1
10	READ	$\uparrow 1$
11	JNEG	21
12	STORE	4
13	SUB	3
14	JNEG	7
15	JZERO	7
16	LOAD	4
17	STORE	3
18	LOAD	1
19	STORE	2
20	JUMP	7
21	LOAD	2
22	HALT	

Dedurre il significato del valore di output.

2. Si considerino le seguenti macchine di Turing:
- (i)  $M_1$ : Assegnata la stringa  $x$  di cifre binarie che rappresenta il numero naturale  $k$ , strettamente positivo, calcola la stringa  $y$  rappresentazione binaria del numero  $k - 1$ ;
  - (ii)  $M_2$ : Assegnata la stringa  $x$  di cifre binarie che rappresenta il numero

- naturale  $k$  calcola la stringa  $y$  rappresentazione binaria del numero  $k+1$ ;
- (iii)  $M_3$ : Assegnata la stringa  $x$  di cifre binarie riconosce le stringhe palindrome;
- (iv)  $M_4$ : Assegnata la stringa  $x$  di caratteri appartenenti all'alfabeto  $\{0, 1, 2\}$  riconosce le stringhe che non contengono il carattere 2;
- v)  $M_5$ : Assegnata la stringa  $x$  di caratteri appartenenti all'alfabeto  $\{0, 1, 2\}$  riconosce le stringhe che contengono il carattere 2;
- (vi)  $M_6$ : Assegnata la stringa  $x$  di cifre binarie riconosce le stringhe che hanno due caratteri consecutivi uguali;
- (vii)  $M_7$ : Assegnata la stringa  $x$  di cifre binarie riconosce le stringhe che hanno tre caratteri consecutivi uguali a 0.

Indicare per ciascuna macchina quale tipo di stringa di input di lunghezza  $n$  (ove necessario si supponga  $n \geq 2$  oppure  $n \geq 3$ ) costituisce, rispettivamente, il caso peggiore (cioè quello in cui la macchina esegue il maggior numero di computazioni) ed il caso migliore (cioè quello in cui la macchina esegue il numero minimo di computazioni).

3. Scrivere le definizioni di  $\mathcal{O}$ -grande,  $\Omega$ -grande e  $\Theta$ -grande. Assegnate le seguenti funzioni

$$\begin{aligned}
 f(n) &= 2^n, & g(n) &= 2^{\log_2 n}, \\
 h(n) &= \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } n \text{ dispari,} \\ 2^n & \text{se } n \text{ pari,} \end{cases} & p(n) &= \sqrt{n} \\
 q(n) &= n^2, & r(n) &= 2^{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

stabilire tra quali coppie di funzioni sussiste la relazione  $\mathcal{O}$ -grande.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Novembre 2008**

1. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$1$	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$s$	$0$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(q_2, 1, \leftarrow)$
$s$	$1$	$(q_0, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	$0$	$(q_2, 0, \leftarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \triangleright, -)$	$q_2$	$1$	$(q_2, 1, \leftarrow)$
$q_0$	$0$	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$
$q_0$	$1$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_2$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(q_1, \sqcup, \rightarrow)$			

- Scrivere i passi delle computazioni relative alle stringhe di input  $x = 010$  e  $x = 01011$ ;
- Calcolare l'output  $M(010)$  e  $M(01011)$ ;
- Scrivere il significato della stringa di output  $y$  in corrispondenze della stringa binaria di input  $x$ ;
- Il costo computazionale in tempo è lineare o quadratico? Motivare la risposta.
- Il costo computazionale in spazio è lineare o quadratico? Motivare la risposta.
- Indicare quale tipo di stringa di input di lunghezza  $n$  costituisce, rispettivamente, il caso peggiore (cioè quello in cui la macchina esegue il maggior numero di computazioni) ed il caso migliore (cioè quello in cui la macchina esegue il numero minimo di computazioni) della macchina.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$f(n) = n \log_2 \log_2 n,$$

$$g(n) = 2^{\log_2 n},$$

$$h(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \leq n \leq 100, \\ 2^n & n > 100, \end{cases}$$

$$p(n) = n \log_2 (\log_2 n)^2$$

$$l(n) = n,$$

$$r(n) = \sqrt{n}$$

$$q(n) = 2^n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \Theta(h(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(r(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare perché un problema che appartiene alla classe  $P$  deve necessariamente appartenere anche alla classe  $NP$ .

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Febbraio 2009**

1. Siano  $A, B, C, D$  ed  $E$  cinque algoritmi per risolvere il problema  $P$ , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^3$	$(\log_2(n^2))^2$
B	$n^3$	$\log_2(2 \log_2 n)$
C	$2^n$	$n^2$
D	$2^n$	$n^2 \log_2 n$
E	$2^n$	$n \log_2 n^2$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

2. Siano  $A$  e  $B$  due algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \sqrt{\log_2 n}, \quad f_B(n) = n^{\frac{3}{2}}.$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo, determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i due algoritmi.

3. Si considerino le funzioni

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \leq n \leq 100, \\ n^3 & n > 100, \end{cases} \quad g(n) = n^3.$$

Spiegare perchè risulta

$$f(n) = \Theta(g(n)).$$

4. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (4, -6, 3, 5, 0)$ :

1	LOAD	= 0
2	STORE	2
3	LOAD	= 1
4	STORE	1
5	READ	↑ 1
6	JZERO	15
7	JNEG	11
8	LOAD	2
9	ADD	= 1
10	STORE	2
11	LOAD	1
12	ADD	= 1
13	STORE	1
14	JUMP	5
15	LOAD	2
16	HALT	

Verificare che il risultato è uguale a 3. Che legame esiste tra i dati di input e l'output? Quale registro viene utilizzato per memorizzare il risultato parziale?

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Febbraio 2009**

1. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ , tale che

$$(q, \triangleright 110, 100 \sqcup) \xrightarrow{M^2} (q, \triangleright 111, 000 \sqcup).$$

Spiegare perchè, sapendo che la macchina resta sempre nello stesso stato e che  $\Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$ , deve essere necessariamente

$$\delta(q, 0) = (q, 1, \rightarrow).$$

2. Spiegare cosa vuol dire calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile, nel caso migliore e nel caso medio. In quale dei tre casi deve essere calcolata la la complessità e perchè?
3. Si considerino le seguenti macchine di Turing definite sull'insieme delle stringhe appartenenti all'alfabeto binario:
- (i)  $M_1$ : Assegnata la stringa  $x$  che rappresenta il numero naturale  $k$ , strettamente positivo, calcola la stringa  $y$ , rappresentazione binaria del numero  $k - 1$ ;
  - (ii)  $M_2$ : Assegnata la stringa  $x$  che rappresenta il numero naturale  $k$  calcola la stringa  $y$  rappresentazione binaria del numero  $k + 1$ ;
  - (iii)  $M_3$ : Assegnata la stringa  $x$  riconosce la codifica dei numeri pari;
  - (iv)  $M_4$ : Assegnata la stringa  $x$  riconosce la codifica dei numeri dispari;
  - (v)  $M_5$ : Assegnata la stringa  $x$  riconosce la codifica dei numeri divisibili per 4.

Indicare per ciascuna macchina quale tipo di stringhe di input di lunghezza  $n$  costituisce, rispettivamente, il caso peggiore ed il caso migliore.

4. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$f(n) = \log_2^2 n,$$

$$p(n) = \log_2(\log_2 n),$$

$$g(n) = \begin{cases} 4n^2 + n & n \text{ pari} \\ 3n^2 - n & n \text{ dispari,} \end{cases}$$

$$r(n) = n^2,$$

$$q(n) = \begin{cases} n^2 & n \text{ pari} \\ \log_2^2 n & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$g(n) = \Theta(r(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(q(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Maggio 2009**  
**Traccia A**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (3, 8, 12, 7, 20)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	READ	↑ 1
4	STORE	2
5	STORE	3
6	LOAD	1
7	ADD	= 1
8	STORE	1
9	READ	↑ 1
10	STORE	3
11	SUB	2
12	JNEG	17
13	JZERO	6
14	LOAD	3
15	STORE	2
16	JUMP	6
17	LOAD	2
18	HALT	

Indicare l'output della RAM scegliendo tra le seguenti alternative:

- A) la RAM accetta in input una sequenza di numeri interi e restituisce in output l'ultimo valore che non interrompe l'ordinamento crescente;
- B) la RAM calcola il massimo tra i numeri in input;
- C) la RAM calcola la somma dei primi due numeri in input.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$g(n) = \begin{cases} 4n^2 + n & n \text{ pari} \\ 3n^2 - n & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad f(n) = n^2,$$

$$h(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \leq n \leq 100, \\ 2^n & n > 100, \end{cases} \quad r(n) = \sqrt{n}$$

$$q(n) = 2^n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$g(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(r(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(q(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(q(n) + f(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare cosa vuol dire calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Maggio 2009**  
**Traccia B**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (15, 9, 4, 6, 20)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	READ	↑ 1
4	STORE	2
5	STORE	3
6	LOAD	1
7	ADD	= 1
8	STORE	1
9	READ	↑ 1
10	STORE	3
11	SUB	2
12	JPOS	17
13	JZERO	6
14	LOAD	3
15	STORE	2
16	JUMP	6
17	LOAD	2
18	HALT	

Indicare l'output della RAM scegliendo tra le seguenti alternative:

- A) la RAM accetta in input una sequenza di numeri interi e restituisce in output l'ultimo valore che non interrompe l'ordinamento decrescente;
- B) la RAM calcola il massimo tra i numeri in input;
- C) la RAM calcola la somma dei primi due numeri in input.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$g(n) = \begin{cases} 4n^2 + \sqrt{n} & n \text{ pari} \\ 3n^2 - \sqrt{n} & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad f(n) = n^2,$$

$$h(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 \leq n \leq 100, \\ 2^n & n > 100, \end{cases} \quad r(n) = \sqrt{n}$$

$$q(n) = 2^n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$h(n) = \Theta(r(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(q(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(q(n) + f(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare come si può associare ad un problema una funzione di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Luglio 2009**

1. Siano  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  sette algoritmi per risolvere il problema  $\Pi$ , le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^2$	$\log_2(n^2)$
B	$n^2$	$\log_2(2 \log_2 n)$
C	$2^n$	$n^2$
D	$2^n$	$n^2 \log_2 n$
E	$2^n$	$n \log_2 n^2$
F	$2^{\log_2 n}$	$n^2$
G	$n$	$n^3$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

2. Specificare quali tra le seguenti affermazioni sono false e perchè:
- (a) La classe P comprende tutti gli algoritmi con complessità polinomiale;
  - (b) La classe NP comprende solo i problemi che possono essere risolti in tempo non polinomiale;
  - (c) Se  $f(n)$  e  $g(n)$  sono due funzioni tali che  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  allora vuol dire che  $f(n) \leq g(n)$  per ogni  $n$  maggiore di un certo  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;
  - (d) In mancanza di indicazioni contrarie la risorsa tempo deve essere sempre privilegiata rispetto alla risorsa spazio;
  - (e) Se la complessità di un algoritmo è di tipo polinomiale nel caso migliore deve essere di tipo polinomiale anche nel caso peggiore;
  - (f) Se  $f(n)$  e  $g(n)$  sono due funzioni tali che  $f(n) = \Theta(g(n))$  allora vuol dire che  $f(n) = g(n)$  per ogni  $n$  maggiore di un certo  $n_0 \in \mathbb{N}$ ;
  - (g) La complessità delle macchine di Turing ad un nastro e multinastro si calcola in funzione dello stesso parametro;

(h) Un algoritmo può avere complessità polinomiale in tempo e complessità esponenziale in spazio.

3. Si consideri la seguente macchina di Turing:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$

la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_0$	$0$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$s$	$0$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$1$	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	$1$	$(q, 1, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(h, 0, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_1$	$0$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$q$	$0$	$(q, 0, \rightarrow)$	$q_1$	$1$	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$q$	$1$	$(q, 1, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(h, 1, \rightarrow)$
$q$	$\sqcup$	$(h, 1, -)$			

- Calcolare l'output  $M(011)$ ,  $M(1000)$ ,  $M(1001)$  e  $M(01010)$ ;
- Specificare quale è l'output  $M(x)$  in corrispondenza della stringa binaria di input  $x$ .

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Luglio 2009**

1. Siano  $A, B$  e  $C$  tre algoritmi con complessità in tempo, rispettivamente

$$f_A(n) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{\log_2 n}), \quad f_B(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}}), \quad f_C(n) = \mathcal{O}(n^3 + n).$$

Supposto che il progresso tecnologico aumenti di un fattore  $\alpha$  le potenzialità di calcolo, determinare la variazione nella dimensione massima di un problema risolvibile con i tre algoritmi.

2. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (-3, -6, 2, 0, 9)$ :

1	LOAD	= 0
2	STORE	1
3	LOAD	= 1
4	STORE	2
5	READ	↑ 2
6	JZERO	16
7	JPOS	11
8	STORE	3
9	LOAD	= 0
10	SUB	3
11	ADD	1
12	STORE	1
13	LOAD	2
14	ADD	= 1
15	JUMP	4
16	LOAD	1
17	HALT	

- Calcolare l'output della RAM;
- Spiegare la relazione tra la sequenza dei numeri di input e l'output.

3. Enunciare il criterio di efficienza polinomiale. Quali sono le argomentazioni a favore di tale criterio?



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Settembre 2009**

1. Considerare il seguente programma di una RAM:

1	LOAD	= 0
2	STORE	1
3	LOAD	= 1
4	STORE	2
5	READ	$\uparrow$ 2
6	JNEG	10
7	JZERO	13
8	ADD	1
9	STORE	1
10	LOAD	2
11	ADD	= 1
12	JUMP	4
13	LOAD	1
14	HALT	

Scrivere le configurazioni della RAM quando viene applicata all'input  $I = (-6, 7, -4, 4, 0)$ .

Cosa calcola tale programma?

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$g(n) = \begin{cases} n^3 + \log_2 n & n \text{ pari} \\ 3n^3 & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad f(n) = n^3,$$

$$h(n) = n^3 \log_2 n \quad r(n) = \log_2^3 n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare cosa vuol dire calcolare la complessità di un algoritmo nel caso migliore e nel caso medio e perchè tali concetti sono poco significativi.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Settembre 2009**

1. Considerare il seguente programma di una RAM:

1	LOAD	= 0
2	STORE	2
3	LOAD	= 1
4	STORE	1
5	READ	↑ 1
6	JZERO	17
7	JPOS	11
8	STORE	3
9	LOAD	= 0
10	SUB	3
11	ADD	2
12	STORE	2
13	LOAD	1
14	ADD	= 1
15	STORE	1
16	JUMP	5
17	LOAD	1
18	ADD	= 1
19	STORE	1
20	READ	↑ 1
21	JZERO	23
22	JUMP	7
23	LOAD	2
24	HALT	

Scrivere le configurazioni della RAM quando viene applicata all'input  $I = (-4, 0, 6, 0, 0)$ .

Cosa calcola tale programma?

2. Si consideri un insieme di algoritmi le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^2$	$\log_2^2(n^2)$
B	$2^{3n}$	$\log_2(n!)$
C	$2^n$	$n^2$
D	$4^n$	$n \log_2 n$
E	$2^{\log_2 n}$	$n^2$
F	$n$	$n^4$
G	$n^2$	$\log_2(2 \log_2 n)$
H	$2^{\log_2 n}$	$n^3 \log_2 n$
I	$2^{2n}$	$n^2 \log_2 n$
L	$8^n$	$\log_2((n-1)!)$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente).

- Spiegare quali sono le argomentazioni a favore del criterio di efficienza polinomiale.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Novembre 2009**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (-2, -4, 6, 3, 7, 0)$ :

1	LOAD	= 0
2	ADD	= 1
3	STORE	1
4	READ	$\uparrow$ 1
5	JPOS	8
6	LOAD	1
7	JUMP	2
8	STORE	2
9	LOAD	1
10	ADD	= 1
11	STORE	1
12	READ	$\uparrow$ 1
13	JZERO	22
14	JNEG	9
15	STORE	3
16	SUB	2
17	JPOS	9
18	JZERO	9
19	LOAD	3
20	STORE	2
21	JUMP	9
22	LOAD	2
23	HALT	

- Specificare il valore dell'output in corrispondenza dell'input assegnato;
- Scrivere il valore dell'output in corrispondenza dell'input

$$I = (-5, 4, 5, -7, 6, 5, 2, 4, -9, 3, 0),$$

ovviamente senza calcolare le relative configurazioni.

2. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ , tale che

$$(q, \triangleright 012, 012\sqcup) \xrightarrow{M^2} (q, \triangleright 0100, 12\sqcup).$$

Elencare i possibili valori che potrebbe assumere la funzione di transizione  $\delta(q, 2)$ , sapendo che la macchina resta sempre nello stesso stato e che l'alfabeto  $\Sigma$  è uguale all'insieme  $\{0, 1, 2, \triangleright, \sqcup\}$ .

3. Spiegare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Novembre 2009**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (4, 6, -5, 4, 4, 0)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	STORE	2
4	READ	$\uparrow$ 2
5	JZERO	20
6	STORE	3
7	LOAD	1
8	ADD	= 1
9	STORE	1
10	READ	$\uparrow$ 1
11	JZERO	19
12	SUB	3
13	JZERO	15
14	JUMP	7
15	LOAD	2
16	ADD	= 1
17	STORE	2
18	JUMP	7
19	LOAD	2
20	HALT	

- Specificare il valore dell'output in corrispondenza dell'input assegnato;
- Scrivere il valore dell'output in corrispondenza dell'input

$$I = (-5, 4, -5, -7, 6, -5, 2, 4, -5, 6, -5, 9, 3, 0),$$

ovviamente senza calcolare le relative configurazioni.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$f(n) = \begin{cases} \log_2 n & n \text{ pari} \\ n \log_2 n & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad h(n) = 2n \log_2 n,$$

$$g(n) = \begin{cases} \log_2 n & 0 < n < 3000 \\ n \log_2 n & n \geq 3000, \end{cases} \quad r(n) = \log_2 n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \Theta(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO

3. Sia  $M$  una macchina di Turing applicata ad una stringa di input  $x$ . Sia  $(q, w, u)$  una configurazione di  $M$  e supponiamo che si verifichi la seguente condizione:

$$(q, w, u) \xrightarrow{M^k} (q, w, u).$$

Spiegare tale situazione. Cosa si può dire circa il valore di output prodotto da  $M$ ?



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Febbraio 2010**

1. Si consideri la seguente macchina di Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s)$  dove  $\Sigma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$  mentre la funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(q_3, 0, \rightarrow)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_2$	$\sqcup$	$(q_4, 0, \leftarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_3$	0	$(q_2, 1, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(q_2, 1, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$
$q_0$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_3$	$\sqcup$	$(q_4, 1, \leftarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_4$	0	$(q_4, 0, \leftarrow)$
$q_1$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_4$	1	$(q_4, 1, \leftarrow)$
$q_1$	1	$(q_3, 0, \rightarrow)$	$q_4$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$
$q_1$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$			

Calcolare  $M(0101)$  ed  $M(0110)$ . Spiegare perchè la complessità in tempo è  $\mathcal{O}(n^2)$ .

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false :
- La configurazione di una RAM può restare invariata dopo l'esecuzione di una istruzione;
  - La configurazione di una macchina di Turing è una terna composta da tre stringhe;
  - Se  $f(n)$  e  $g(n)$  sono due funzioni tali che  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  allora vuol dire che  $f(n) \leq g(n)$  per  $n > n_0 \in \mathbb{N}$ ;
  - Le stringhe che fanno parte della configurazione di una macchina di Turing sono composte sempre da un numero finito di caratteri;
  - L'output di una macchina di Turing coincide sempre con lo stato di stop.

3. Dimostrare che

$$\log_2 n! = \mathcal{O}(n^2), \quad n = \mathcal{O}(\log_2 n!).$$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Febbraio 2010**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (4, 3, 3, 0)$ :

1	LOAD	= 0
2	STORE	1
3	LOAD	= 1
4	STORE	2
5	READ	$\uparrow$ 2
6	JZERO	14
7	JNEG	10
8	ADD	1
9	STORE	1
10	LOAD	2
11	ADD	= 1
12	STORE	2
13	JUMP	5
14	LOAD	1
15	HALT	

Scrivere il valore dell'output in corrispondenza dell'input

$$I = (-5, 4, 5, -7, 6, 5, 2, -9, 3, 0),$$

ovviamente senza calcolare le relative configurazioni.

2. Si consideri un insieme di algoritmi le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in spazio	Complessità in tempo
A	$n^2$	$\log_2^2(n^2)$
B	$n^2$	$n^2$
C	$n^3$	$n \log_2 n$
D	$2^{\log_2 n}$	$n^2$
E	$n$	$n^4$
F	$n^2$	$\log_2(2 \log_2 n)$
G	$2^{\log_2 n}$	$2n \log_2 n^2$
H	$n^4$	$n^2 \log_2 n$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente).

- Enunciare il criterio di efficienza polinomiale. Quali sono le argomentazioni a favore di tale criterio?

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Aprile 2010**

1. Spiegare il significato di "Worst Case Analysis" e perchè si deve calcolare la complessità di un algoritmo nel peggior caso possibile.
2. Si consideri la macchina di Turing la cui funzione di transizione  $\delta$  è definita dalla seguente tabella:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(q_3, \sqcup, \leftarrow)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_0$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_0$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$
$q_1$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_3$	0	$(h, \sqcup, -)$
$q_1$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(h, \sqcup, -)$

- Calcolare  $M(1)$ ,  $M(0110)$ ,  $M(01)$  ed  $M(101)$ ;
  - Assegnata una generica stringa di input  $x$  di  $n$  bit, indicare il valore dell'output;
  - Esiste un caso migliore ed un caso peggiore?
3. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \log_2 n^2, & g(n) &= 4 \log_2 n, \\
 h(n) &= \log_2 (\log_2 n) & l(n) &= (\log_2 n)^2 \\
 q(n) &= \log_2 n \log_2 n^2
 \end{aligned}$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$h(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Luglio 2010**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M$  definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(q_3, 0, \leftarrow)$
$s$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_3$	$\triangleright$	$(q_4, \triangleright, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_4$	0	$(q_5, 1, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_4$	1	$(q_6, 1, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_5$	0	$(q_5, 0, \rightarrow)$
$q_0$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_5$	1	$(q_6, 0, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$	$q_5$	$\sqcup$	$(h, 0, -)$
$q_1$	$\sqcup$	$(h, 0, -)$	$q_6$	0	$(q_5, 1, \rightarrow)$
$q_2$	0	$(q_3, 0, \leftarrow)$	$q_6$	1	$(q_6, 1, \rightarrow)$
$q_2$	1	$(q_3, 1, \leftarrow)$	$q_6$	$\sqcup$	$(h, 1, -)$
$q_3$	0	$(h, 1, -)$			

Calcolare l'output  $M(x)$  quando  $x = 11$ ,  $x = 1110$ ,  $x = 1010$  ed  $x =$ stringa vuota.

Quale relazione lega l'output  $y$  e l'input  $x$  scegliendo tra le seguenti alternative:

- [A] Se  $x$  è la rappresentazione binaria del numero  $k$ ,  $y$  è la rappresentazione binaria del numero  $k + 1$ ;  
[B] Se  $x$  è la rappresentazione binaria del numero  $k$ ,  $y$  è la rappresentazione binaria del numero  $k - 1$ ;  
[C] Se  $x$  è la rappresentazione binaria del numero  $k$ ,  $y$  è la rappresentazione binaria del numero  $k + 2$ ;  
[D] Se  $x$  è la rappresentazione binaria del numero  $k$ ,  $y$  è la rappresentazione binaria del numero  $k - 2$ .

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$g(n) = n \log_2(\log_2 n), \quad l(n) = \log_2(\log_2(\log_2 n)),$$

$$f(n) = \log_2(\log_2 n), \quad p(n) = n \log_2(\log_2 n^2)$$

$$h(n) = n \log_2 n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare perchè non conviene calcolare la complessità nel caso migliore e nel caso medio.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Luglio 2010**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M$  definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$q_1$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	1	$(q, 1, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$
$s$	2	$(q, 2, \rightarrow)$	$q_1$	2	$(q, 2, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$q$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(q, 1, \rightarrow)$
$q$	1	$(q, 1, \rightarrow)$	$q_2$	2	$(yes, 2, -)$
$q$	2	$(q, 2, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$q$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$			

Calcolare  $M(0112)$ ,  $M(001220)$ ,  $M(1012)$  e  $M(0210)$ .

Quale proprietà della stringa di input  $x$  viene riconosciuta dalla macchina?

2. Siano  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  sette algoritmi per risolvere il problema II, le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in spazio	Complessità in tempo
A	$n^2$	$\log_2(n^2)$
B	$n^2$	$\log_2(2 \log_2 n)$
C	$n^3$	$n^2 \log_2^2 n$
D	$n^4$	$n^2 \log_2 n$
E	$n^3$	$n \log_2 n^2$
F	$n^3$	$n^3 \log_2 n$
G	$n^2$	$n^2 \log_2 n$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

3. Enunciare il criterio di efficienza polinomiale. Quali sono le argomentazioni a favore di tale criterio?

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**I Appello di Settembre 2010**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (-2, -3, 6, 4, -3, 0)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	READ	$\uparrow$ 1
4	JPOS	9
5	LOAD	1
6	ADD	= 1
7	STORE	1
8	JUMP	3
9	STORE	2
10	LOAD	1
11	ADD	= 1
12	STORE	1
13	READ	$\uparrow$ 1
14	JZERO	23
15	JNEG	10
16	STORE	3
17	SUB	2
18	JPOS	10
19	JZERO	10
20	LOAD	3
21	STORE	2
22	JUMP	10
23	LOAD	2
24	HALT	

Spiegare la relazione tra input e output.



2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$f(n) = \begin{cases} \log_2 n & n \text{ dispari} \\ n \log_2 n & n \text{ pari,} \end{cases} \quad h(n) = 2n \log_2 n,$$

$$g(n) = \begin{cases} \log_2 n & 0 < n < 6000 \\ n \log_2 n & n \geq 6000, \end{cases} \quad r(n) = \log_2 n,$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \Theta(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(r(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$r(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO

3. Spiegare la differenza tra computazione deterministica, non deterministica e probabilistica.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**II Appello di Settembre 2010**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M$  definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(q_3, 1, \rightarrow)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_1$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_2$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(q_3, 0, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$
$q_0$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$	$q_3$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(no, \sqcup, -)$	$q_3$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$q_1$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$	$q_3$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$

Calcolare il valore di output per le seguenti stringhe di input:

$x = 01$ ,  $x = 0011$ ,  $x = 1001$ ,  $x = 10100$ ,  $x = 011001$ ,  $x = 101001$  e  
 $x = 01100011$ . Quale relazione lega l'input con l'output?

Spiegare perchè, in questo caso, non esistono i casi migliore e peggiore.

2. Siano  $A, B, C, D, E$  ed  $F$  sei algoritmi che risolvono lo stesso problema e le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n^2$	$\log_2 n$
B	$2^{\log_2 n}$	$n^2 \log_2 n$
C	$n$	$n \log_2(n^2)$
D	$n^2$	$n \log_2^2 n$
E	$4^{\log_2 n}$	$n^2 \log_2 n$
F	$n^2$	$n \log_2(n^2)$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.

3. Scrivere la definizione di classe di complessità.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Dicembre 2010**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M$  definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$
$s$	1	$(q_1, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_2$	$\sqcup$	$(q, \sqcup, \leftarrow)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q$	0	$(q_3, \sqcup, \leftarrow)$
$q_0$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$	$q$	1	$(q_3, \sqcup, \leftarrow)$
$q_0$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$	$q$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(h, 0, -)$	$q_3$	0	$(q_3, 0, \leftarrow)$
$q_1$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(q_3, 1, \leftarrow)$
$q_1$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$	$q_3$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$
$q_1$	$\sqcup$	$(h, 1, -)$			

Calcolare i seguenti valori di output:

$$\begin{aligned}
 M(1) &= \\
 M(0) &= \\
 M(01) &= \\
 M(010) &= \\
 M(000) &= \\
 M(0110) &= \\
 M(1011) &= \\
 M(01010) &=
 \end{aligned}$$

Quale relazione lega l'input con l'output?

Spiegare perchè, in questo caso, non esistono i casi migliore e peggiore.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$f(n) = 2^n \log_2 n$$

$$g(n) = n \log_2 n$$

$$h(n) = \begin{cases} 2^n \log_2 n & n \text{ pari} \\ n \log_2 n & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad l(n) = \begin{cases} 2^n \log_2 n & 0 < n < 1500 \\ n \log_2 n & n \geq 1500, \end{cases}$$

stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Febbraio 2011**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (2, -6, 1, -8, -7, 0)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	READ	↑ 1
4	JNEG	8
5	LOAD	1
6	ADD	= 1
7	JUMP	2
8	STORE	2
9	LOAD	1
10	ADD	= 1
11	STORE	1
12	READ	↑ 1
13	JZERO	22
14	JPOS	9
15	STORE	3
16	SUB	2
17	JNEG	9
18	JZERO	9
19	LOAD	3
20	STORE	2
21	JUMP	9
22	LOAD	2
23	HALT	

- Specificare il valore dell'output in corrispondenza dell'input assegnato;
- Scrivere il valore dell'output in corrispondenza dell'input

$$I = (-9, -4, 5, -7, 6, 5, -2, 4, -9, 3, 0),$$

ovviamente senza calcolare le relative configurazioni.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$p(n) = \begin{cases} n^3 + \log_2 n & n \text{ pari} \\ n^4 & n \text{ dispari,} \end{cases} \quad h(n) = 3n^3 + \log_2 n^3,$$

$$f(n) = \begin{cases} n^3 + \log_2 n & n > 1000 \\ n^4 & 0 < n \leq 1000, \end{cases} \quad g(n) = n^4.$$

Stabilire quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Marzo 2011**

1. Si consideri la macchina di Turing  $M$  definita dalla seguente funzione di transizione:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_1$	0	$(q_3, 1, \leftarrow)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(q, 0, \leftarrow)$
$q_0$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q$	0	$(q, 0, \leftarrow)$
$q_0$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q$	1	$(q, 1, \leftarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$	$q$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$

- Calcolare i seguenti valori di output:

$$M(0101) =$$

$$M(0011) =$$

$$M(1100) =$$

- Spiegare la relazione tra input e output.
  - Considerando in input solo stringhe di 4 bit ipotizzare quali possano essere il caso migliore ed il caso peggiore.
  - Scrivere le configurazioni della macchina di Turing nel caso in cui la stringa di input  $x$  coincida con quella del caso peggiore, considerando in input stringhe di 4 bit.
2. Siano  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$  e  $p(n)$  quattro funzioni di variabile intera tali che:

$$f(n) = \Theta(g(n)), \quad g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \quad g(n) = \Theta(p(n)).$$

Allora se le seguenti relazioni sono vere, o false oppure non si possa

affermare con certezza se siano vere o false:

$f(n) = \Theta(h(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$p(n) = \Theta(f(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$f(n) + h(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$h(n) = \mathcal{O}(g(n)f(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$g(n)f(n) = \Theta(p^2(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE
$g^2(n) = \Theta(f^2(n))$	VERO	FALSO	NESSUNO DEI DUE



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Aprile 2011**

1. Si consideri la seguente funzione di transizione di una macchina di Turing:

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_1$	0	$(no, 0, -)$
$s$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_1$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$
$s$	2	$(q_2, 2, \rightarrow)$	$q_1$	2	$(q_2, 2, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$	$q_1$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(no, 0, -)$
$q_0$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_2$	1	$(no, 1, -)$
$q_0$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_2$	2	$(q_2, 2, \rightarrow)$
$q_0$	2	$(q_2, 2, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$
$q_0$	$\sqcup$	$(yes, \sqcup, -)$			

- Calcolare  $M(01122)$ ,  $M(01201)$ ,  $M(0122)$  ed  $M(101)$ ;
  - Descrivere l'insieme delle stringhe riconosciuto dalla macchina;
  - Indicare quali stringhe, tra quelle di lunghezza  $n$ , rappresentano il caso migliore.
2. Determinare due funzioni (non banali)  $f(n)$  e  $g(n)$  tali che
- $$\log_2 n! = \mathcal{O}(g(n)), \quad f(n) = \mathcal{O}(\log_2 n!)$$
- dimostrando perchè sussistono tali relazioni.
3. Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più al meno efficiente), degli algoritmi  $A, B, C, D, E$  ed  $F$  che risolvono lo stesso problema e aventi le seguenti funzioni di complessità in tempo e spazio:

Algoritmo	Complessità in spazio	Complessità in tempo
A	$n^4$	$\log_2(n^2)$
B	$n^2$	$\log_2(\log_2(n^2))$
C	$n^5$	$\log_2(\log_2 n)$
D	$n^4$	$\log_2(n^{\log_2 n})$
E	$n^3$	$\log_2(n^3)$
F	$n^2$	$\log_2 n$

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Luglio 2011**

1. Considerare il seguente programma di una RAM e scrivere le relative configurazioni e l'output quando viene applicato all'input  $I = (-5, -6, 4, -3, 2, 0)$ :

1	LOAD	= 1
2	STORE	1
3	LOAD	= 0
4	STORE	2
5	READ	$\uparrow$ 1
6	JNEG	11
7	JZERO	15
8	LOAD	2
9	ADD	= 1
10	STORE	2
11	LOAD	1
12	ADD	= 1
13	STORE	1
14	JUMP	5
15	LOAD	2
16	HALT	

Scrivere l'output quando lo stesso programma è applicato all'input

$$I = (-5, -6, 3, 4, 5, 6, 9, 8, -4, -3, -2, 0)$$

senza scriverne le configurazioni.

2. Spiegare perché un problema che appartiene alla classe  $P$  deve necessariamente appartenere anche alla classe  $NP$ .
3. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$g(n) = \log_2(\log_2 n) \quad f(n) = (\log_2 n)^2,$$

$$h(n) = 2n \log_2 n \quad p(n) = n \log_2 n^2,$$

indicare quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \Theta(g(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \Theta(p(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$h(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Settembre 2011**

1. Si consideri la seguente funzione di transizione della macchina di Turing  $M$ :

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$q$	0	$(q, 0, \rightarrow)$
$s$	1	$(s, 1, \rightarrow)$	$q$	1	$(q_3, 1, \rightarrow)$
$s$	$\sqcup$	$(q, \sqcup, \leftarrow)$	$q$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$
$s$	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$	$q_3$	0	$(q_3, 0, \rightarrow)$
$q_1$	0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$q_3$	1	$(q_2, 1, \rightarrow)$
$q_1$	1	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$q_3$	$\sqcup$	$(e, \sqcup, \leftarrow)$
$q_1$	$\sqcup$	$(e, \sqcup, \leftarrow)$	$q_2$	1	$(q_3, 1, \rightarrow)$
$q_0$	0	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$q_2$	0	$(q_2, 0, \rightarrow)$
$q_0$	1	$(q_0, 1, \rightarrow)$	$q_2$	$\sqcup$	$(h, \sqcup, -)$
$q_0$	$\sqcup$	$(q_4, \sqcup, \leftarrow)$	$e$	0	$(e, \sqcup, \leftarrow)$
$q_4$	0	$(q_4, 0, \leftarrow)$	$e$	1	$(e, \sqcup, \leftarrow)$
$q_4$	1	$(q_4, 1, \leftarrow)$	$e$	$\triangleright$	$(h, \triangleright, \rightarrow)$
$q_4$	$\triangleright$	$(q, \triangleright, \rightarrow)$			

- Scrivere i passi computazionali e calcolare i seguenti output:

$M(000) =$

$M(0011) =$

$M(1010) =$

$M(0001) =$

$M(00) =$

$M(10) =$

$M(00100) =$

- Spiegare la relazione tra la stringa binaria di input e l'output calcolato dalla macchina;
- Spiegare perchè la complessità è di tipo lineare.

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Novembre 2011**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (4, 6, -5, -4, 3, 4, 0)$ :

1	LOAD	= 0
2	STORE	1
3	LOAD	= 1
4	STORE	2
5	READ	↑ 2
6	STORE	3
7	LOAD	2
8	ADD	= 1
9	STORE	2
10	READ	↑ 2
11	JZERO	19
12	SUB	3
13	JPOS	7
14	JZERO	7
15	LOAD	1
16	ADD	= 1
17	STORE	1
18	JUMP	7
19	LOAD	1
20	HALT	

- Specificare il valore dell'output in corrispondenza dell'input assegnato;
- Scrivere il valore dell'output in corrispondenza dell'input

$$I = (5, 4, -5, -7, 5, 3, -5, 2, 4, 6, -5, 9, 3, 0),$$

ovviamente senza calcolare le relative configurazioni.

2. Siano assegnate le seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} f(n) = n\sqrt{\log_2 n} & g(n) = n \log_2 \sqrt{n}, \\ h(n) = \sqrt{n} \log_2 n & l(n) = n \log_2 n^2, \\ p(n) = n \log_2 n & q(n) = \sqrt{n} \log_2 n^2, \end{array}$$

indicare quali tra le seguenti relazioni sono vere:

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$g(n) = \mathcal{O}(l(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO
$q(n) = \mathcal{O}(g(n))$	VERO	FALSO
$p(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$f(n) = \mathcal{O}(p(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(q(n))$	VERO	FALSO
$l(n) = \mathcal{O}(h(n))$	VERO	FALSO

**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Febbraio 2012**

1. Considerate le seguenti righe di codice RAM scrivere le configurazioni della macchina durante la computazione quando viene applicata all'input  $I = (8, 5, 4, 6, 8, 0)$ :

1	LOAD	= 0
2	STORE	1
3	ADD	= 1
4	STORE	2
5	READ	$\uparrow$ 2
6	JZERO	20
7	ADD	1
8	STORE	1
9	LOAD	2
10	ADD	= 1
11	STORE	2
12	READ	$\uparrow$ 2
13	JZERO	20
14	STORE	3
15	LOAD	1
16	SUB	3
17	STORE	1
18	LOAD	2
19	JUMP	3
20	LOAD	1
21	HALT	

Spiegare la relazione tra l'input e l'output della macchina.

2. Siano  $A, B, C, D$  ed  $E$  cinque algoritmi che risolvono lo stesso problema e le cui funzioni di complessità in tempo e spazio sono riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n \log_2 n$	$2^n$
B	$\sqrt{n} \log_2 n$	$2^n$
C	$n \log_2 \sqrt{n}$	$n^4$
D	$n^2 \log_2 n$	$n$
E	$n \log_2 n^2$	$n^2$

Si scriva l'ordine di efficienza degli algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando complessivamente le funzioni complessità.



**Esame Scritto di Complessità Numerica**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica)**  
**(Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione)**  
**Appello di Maggio 2012**

1. Si consideri la seguente funzione di transizione della macchina di Turing  $M$ :

$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$	$p \in K$	$\varepsilon \in \Sigma$	$\delta(p, \varepsilon)$
$s$	$\triangleright$	$(q, \triangleright, \rightarrow)$	$q_1$	$0$	$(no, 0, -)$
$q$	$0$	$(q, 0, \rightarrow)$	$q_1$	$1$	$(q_0, 1, \leftarrow)$
$q$	$1$	$(q, 1, \rightarrow)$	$q_1$	$2$	$(no, 2, -)$
$q$	$2$	$(q, 2, \rightarrow)$	$q_1$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$q$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$	$q_2$	$0$	$(no, 0, -)$
$q_0$	$0$	$(yes, 0, -)$	$q_2$	$1$	$(no, 1, -)$
$q_0$	$1$	$(no, 1, -)$	$q_2$	$2$	$(q_1, 2, \leftarrow)$
$q_0$	$2$	$(no, 2, -)$	$q_2$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$
$q_0$	$\triangleright$	$(no, \triangleright, -)$			

- Scrivere i passi computazionali e calcolare i seguenti output:

$$\begin{array}{ll}
 M(01) = & M(0012) = \\
 M(10102) = & M(01012) = \\
 M(0120012) = & M(102) =
 \end{array}$$

- Descrivere l'insieme delle stringhe riconosciuto dalla macchina;
- Individuare le stringhe che rappresentano il caso migliore ed il caso peggiore.

2. Si scriva l'ordine di efficienza dei seguenti algoritmi (dal più efficiente al meno efficiente) valutando le funzioni complessità in tempo ed in spazio riassunte nella seguente tabella:

Algoritmo	Complessità in tempo	Complessità in spazio
A	$n \log_2 n$	$n^2$
B	$n \log_2 n^2$	$n^3$
C	$n^2 \log_2 n$	$n^4$
D	$n (\log_2 n)^2$	$n^2$
E	$n \log_2 n^3$	$n^5$
F	$n \log_2 n^n$	$n$