Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
Appello di Gennaio 2019

1. Siano A e B due eventi tali che $P(A) = 3/4$, $P(A \cap \overline{B}) = 1/2$ e $P(\overline{A} \cap B) = 1/6$. Calcolare $P(B)$.

   `Svolgimento.` L'evento A può essere scritto come unione di eventi mutuamente esclusivi:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

   pertanto si può ricavare

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{4}.$$

   Anche l'evento B può essere scritto in modo simile

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

   ricavando

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{5}{12}.$$

2. Calcolare la probabilità di estrarre di seguito tre assi da un mazzo di 52 carte francesi senza reintroduzione delle carte.

   `Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{la prima carta estratta è un asso}\} \\ A_2 &= \{\text{la seconda carta estratta è un asso}\} \\ A_3 &= \{\text{la terza carta estratta è un asso}\}. \end{aligned}$$

   La probabilità cercata è $P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)$. Applicando la proprietà che lega l'evento intersezione e l'evento condizionato possiamo scrivere

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = P(A_3/A_2 \cap A_1)P(A_2 \cap A_1) = P(A_3/A_2 \cap A_1)P(A_2/A_1)P(A_1).$$

   Nota la successione dei tre eventi si determinano facilmente le probabilità presenti nell'ultima relazione

$$P(A_1) = \frac{4}{52}, \qquad P(A_2/A_1) = \frac{3}{51}, \qquad P(A_3/A_2 \cap A_1) = \frac{2}{50}$$

   che consentono di ottenere il valore cercato

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50} = \frac{1}{5525}.$$

3. In una scatola ci sono 20 caramelle, 10 al gusto arancia, 6 alla fragola e 4 alla liquirizia. Sappiamo che uno dei nostri coinquilini ha preso di nascosto una caramella ma non sappiamo di che gusto. Successivamente prendiamo una caramella a caso:
a) Calcolare la probabilità che la caramella che abbiamo preso sia al gusto liquirizia.
b) Sapendo che la caramella che abbiamo preso è al gusto liquirizia calcolare che anche quella presa dal nostro coinquilino sia al gusto liquirizia.

`Svolgimento.` Per il quesito a) definiamo il seguente evento:

$$A = \{\text{La prima caramella è al gusto liquirizia}\}$$

per il quale risulta

$$P(A) = \frac{1}{5}, \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{5},$$

ed il successivo evento

$$B = \{\text{La seconda caramella è al gusto liquirizia}\}$$

per il quale possiamo determinare le probabilità condizionate

$$P(B/A) = \frac{3}{19}, \qquad P(B/\overline{A}) = \frac{4}{19}.$$

Applicando il teorema della probabilità totale troviamo

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A}) = \frac{1}{5}.$$

Per il quesito b) applichiamo il Teorema di Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)} = \frac{3}{19}.$$

4. Considerata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} Cx & 0 \leq x \leq 1 \\ C & 1 < x \leq 2 \\ C(3-x) & 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare la costante C in modo tale che $f(x)$ rappresenti la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X;
b) Calcolare $P(X \geq 1)$ e $P(X \leq 2)$.

`Svolgimento.`
a) Tracciando il grafico della funzione si trova che l'integrale della funzione coincide con

l'area di un trapezio avente base maggiore di lunghezza 3, base minore di lunghezza 1 e altezza pari a C. Applicando la nota formula dell'area del trapezio e imponendola pari a 1 si trova

$$(3+1)\frac{C}{2} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{2}.$$

b) Sempre osservando il grafico della funzione si scopre che le probabilità richieste (che sono uguali) coincidono con l'area di un trapezio rettangolo avente base maggiore di lunghezza 2, base minore di lunghezza 1 e altezza 1/2. Pertanto

$$P(X \geq 1) = P(X \leq 2) = \frac{3}{4}.$$

5. Un laboratorio farmaceutico sta elaborando un farmaco che dovrebbe ridurre la frequenza cardiaca a riposo di almeno 4 battiti al minuto. Per testarne l'effetto, viene somministrato il farmaco a un gruppo di 16 volontari. Per ciascun volontario si misura la diminuzione di frequenza cardiaca: la media e la deviazione standard empirica di tali dati (espressi in battiti al minuto) sono $\overline{X} = 5.3$ e $S = 4.8$.
Testare l'ipotesi nulla $H_0 \;:\; \mu \leq 4$, con livello di significatività del 5%.

`Svolgimento.` Definiamo le due ipotesi

$$\begin{aligned} H_0 &\;:\; \mu \leq 4 \\ H_1 &\;:\; \mu > 4. \end{aligned}$$

I dati del problema sono

$$n = 16, \qquad \overline{X} = 5.3, \qquad S = 4.8, \qquad \alpha = 0.05.$$

Poichè non è nota la varianza dobbiamo utilizzare la statistica $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ che ha densità **t-Student** con 15 (ovvero $n-1$) gradi di libertà. In base all'ipotesi nulla la regione di accettazione è

$$[-\infty, t_{0.05,15}] \equiv [-\infty, 1.7531]$$

Calcoliamo ora il valore della statistica T

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{5.3 - 4}{4.8/\sqrt{16}} = 1.08.$$

L'ipotesi nulla viene accettata con un livello di significatività del 5%.

6. Assegnato il seguente campione

20	19	14	22	18	23	24
17	18	22	16	27	27	15

calcolare i quartili Q_1, Q_2 e Q_3.

`Svolgimento.` Innanzitutto osserviamo che $n = 14$ e procediamo ad ordinare il campione

$$\begin{array}{ccccccc} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 18 & 19 \\ 20 & 22 & 22 & 23 & 24 & 27 & 27 \end{array}$$

Calcoliamo quindi i tre quartili richiesti

$$\frac{14+1}{4} = 3 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_3(1-0.75) + x_4(0.75) = 16.75$$

$$Q_2 = x_7(1-0.5) + x_8(0.5) = 19.5$$

$$\frac{3(14+1)}{4} = 11 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_{11}(1-0.25) + x_{12}(0.25) = 23.25.$$

7. Abbiamo un campione di 64 dati estratti da una popolazione avente valore atteso incognito μ e varianza nota $\sigma^2 = 9$. Sapendo che la media del campione vale $\overline{X} = 6.35$, si determinino gli intervalli di confidenza per μ al 5% e all'1%.

   `Svolgimento.` Poichè non è specificato il contrario determiniamo gli intervalli di confidenza a due lati, osservando che $n = 64$, $\sigma = 3$ e $\overline{X} = 6.35$.
   I caso: $\alpha = 0.05$ quindi $\alpha/2 = 0.025$, dovendo utilizzare la statistica Z calcoliamo il quantile gaussiano $z_{0.025}$ consultando la tabella della densità gaussiana:

$$z_{0.025} = 1.96.$$

   Il primo intervallo è

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$6.35 - 1.96\frac{3}{8} \leq \mu \leq 6.35 + 1.96\frac{3}{8}$$
$$5.615 \leq \mu \leq 7.085$$

   II caso: $\alpha = 0.01$ quindi $\alpha/2 = 0.005$, dovendo utilizzare la statistica Z calcoliamo il quantile gaussiano $z_{0.005}$ consultando la tabella della densità gaussiana:

$$z_{0.005} = 2.576$$

   Il primo intervallo è

$$\overline{X} - 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$6.35 - 2.576\frac{3}{8} \leq \mu \leq 6.35 + 2.576\frac{3}{8}$$
$$5.384 \leq \mu \leq 7.316$$

Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
I Appello di Febbraio 2019

1. Due eventi A e B sono tali che $P(A \cup B) = 5/9$, mentre $P(A) = P(B) = 1/3$. Stabilire se A e B siano eventi indipendenti.

   `Svolgimento.` Calcoliamo la probabilità dell'evento inteserzione
   $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{9}.$$
   Poichè $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ allora i due eventi sono indipendenti.

2. Due scatole A e B contengono palline rosse e verdi. In A ci sono due palline rosse e una verde, mentre B contiene due palline verdi e una rossa. Si estrae a caso una pallina da A e la si ripone in B e, quindi, si estrae a caso una pallina da B. Calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla scatola B sia rossa.

   `Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:
   $$\begin{aligned} R_1 &= \{\text{La prima pallina estratta è rossa}\} \\ R_2 &= \{\text{La seconda pallina estratta è rossa}\} \end{aligned}$$
   Risulta
   $$P(R_1) = \frac{2}{3}, \qquad P(\overline{R_1}) = \frac{1}{3}$$
   e possiamo determinare anche le probabilità condizionate
   $$P(R_2/R_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(R_2/\overline{R_1}) = \frac{1}{4}.$$
   Applicando il teorema della probabilità totale risulta
   $$P(R_2) = P(R_2/R_1)P(R_1) + P(R_2/\overline{R_1})P(\overline{R_1}) = \frac{5}{12}.$$

3. Sia X una variabile aleatoria di tipo continuo con densità uniforme nell'intervallo $[-2, 3]$.
   a) Calcolare $E(X)$ e $V(X)$.
   b) Calcolare $P(-1 \leq X \leq 2|X \geq 0)$.

   `Svolgimento.` Se X è una variabile aleatoria di tipo uniforme sull'intervallo $[a, b]$ sappiamo che
   $$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$
   quindi in questo caso $a = -2$ e $b = 3$, pertanto
   $$E(X) = \frac{1}{2}, \qquad V(X) = \frac{25}{12},$$

inoltre la sua funzione densità di probabilità assume valore $1/5$ nell'intervallo $[-2,3]$ e zero altrove.
Per il punto b), da definizione

$$P(-1 \le X \le 2|X \ge 0) = \frac{P(0 \le X \le 2)}{P(X \ge 0)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.$$

4. Una variabile aleatoria bidimensionale di tipo discreto (X,Y) assume valori con probabilità positiva solo nelle sei coppie (i,j), $i=-1,0,1$, e $j=-1,1$.
Precisamente $P(X=0,Y=-1)=1/12$ e $P(X=-1,Y=1)=3/4$, mentre nelle restanti quattro coppie la probabilità è la stessa.
Calcolare le densità marginali di X e Y ed i rispettivi valori attesi.

`Svolgimento.` Riportiamo nella seguente tabella i valori delle probabilità note ed indichiamo con x quella incognita

$X \backslash Y$	-1	1
-1	x	$3/4$
0	$1/12$	x
1	x	x

Determiniamo x imponendo la somma delle probabilità uguale a 1:

$$4x + \frac{1}{12} + \frac{3}{4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{24}.$$

Quindi

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$1/24$	$3/4$
0	$1/12$	$1/24$
1	$1/24$	$1/24$

Le densità di probabilità marginali si ottengono sommando le probabilità lungo le righe e lungo le colonne

$$P(X=-1) = \frac{19}{24}, \qquad P(X=0) = \frac{3}{24}, \qquad P(X=1) = \frac{2}{24},$$

$$P(Y=-1) = \frac{1}{6}, \qquad P(Y=1) = \frac{5}{6}.$$

Per calcolare i valori attesi si applica la formula nel caso di variabili discrete

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = -\frac{19}{24} + \frac{2}{24} = -\frac{17}{24},$$

$$E(Y) = \sum_i y_i p(y_i) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

5. Si misura la concentrazione nel sangue di una certa sostanza in un gruppo di 50 individui, ottenendo un valore medio $\overline{X} = 7.45$ (espresso in opportune unità di misura). Si assuma che il valore atteso sia incognito μ e che la varianza sia $\sigma^2 = 3$.
Si determini il $p-$value del test per l'ipotesi $H_0 \; : \; \mu = 6.9$.

`Svolgimento.` Definiamo le due ipotesi

$$\begin{aligned} H_0 \quad &: \; \mu = 6.9 \\ H_1 \quad &: \; \mu \neq 6.94. \end{aligned}$$

I dati del problema sono

$$n = 50, \qquad \overline{X} = 7.45, \qquad \sigma^2 = 3.$$

In questo caso il $p-$value è

$$p = 2[1 - \Phi(z_0)]$$

dove z_0 è il valore assunto nei dati dalla statistica $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ che ha densità di tipo normale standard:

$$z_0 = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.45 - 6.9}{\sqrt{3}/\sqrt{50}} = 2.245$$

$$\Phi(z_0) = 0.98402$$

e

$$p = 2[1 - \Phi(z_0)] = 0.03196.$$

6. Calcolare i coefficienti della retta di regressione che approssima i seguenti valori

x_i	-3	0	3
y_i	2	1	-1

`Svolgimento.` Le formule dei coefficienti della retta di regressione sono

$$\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}, \qquad \beta = \overline{y} - \alpha\overline{x}.$$

Risulta

$$\sum x_i y_i = -9, \qquad \sum x_i^2 = 18 \qquad \overline{x} = 0, \qquad \overline{y} = 2,$$

pertanto

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \beta = 2.$$

7. Tracciare il diagramma box-plot del seguente campione di dati

$$1 \quad 6 \quad 0 \quad 8 \quad 9 \quad 5 \quad 4 \quad 12 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 13$$

`Svolgimento.` Innanzitutto osserviamo che $n = 12$ e procediamo ad ordinare il campione

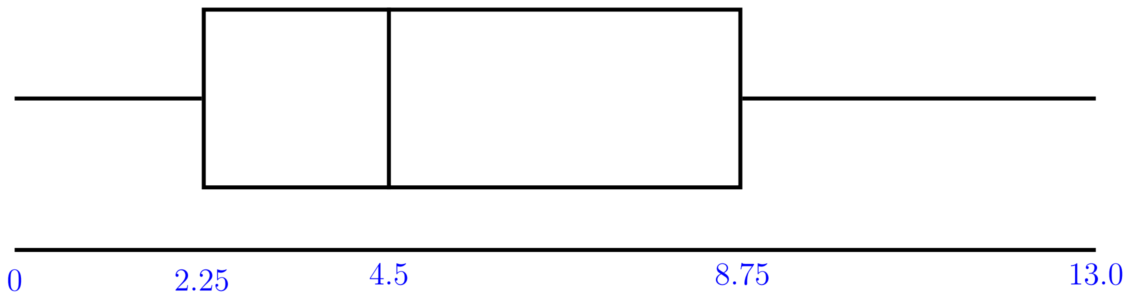
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 12 \quad 13$$

Per tracciare il diagramma box-plot dobbiamo calcolare i tre quartili Q_1, Q_2, Q_3

$$\frac{12+1}{4} = 3 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_3(1-0.25) + x_4(0.25) = 2.25$$

$$Q_2 = 4.5$$

$$\frac{3(12+1)}{4} = 9 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_9(1-0.75) + x_{10}(0.75) = 8.75.$$



Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
II Appello di Febbraio 2019

Risolvere, a scelta, 5 dei seguenti quesiti, indicando sulla traccia i quesiti svolti.

1. Due eventi A e B indipendenti sono tali che $P(A \cup B) = 1/2$, $P(A) = 1/4$. Calcolare $P(B)$.

   `Svolgimento.` Poichè i due eventi sono indipendenti risulta

   $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

   quindi

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

   Poniamo $x = P(B)$ e sostituiamo i valori noti

   $$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + x - \frac{x}{4},$$

   da cui si ricava $P(B) = 1/3$.

2. Un primo dado viene lanciato due volte e si sommano i risultati ottenuti nei due lanci. Viene quindi lanciato una sola volta un secondo dado. Calcolare la probabilità che i punteggi ottenuti dai due dadi siano entrambi uguali a 6.

   `Svolgimento.` Consideriamo il seguente spazio campione

   $$S = \{(i, j, k), i, j, k, \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j, k \leq 6\}$$

   che ha cardinalità $|S| = 6^3$, in cui la coppia (i, j) rappresenta il risultato dei primi due lanci mentre k rappresenta il risultato dell'unico lancio del secondo dado. Tutti gli eventi elementari appartenenti ad S sono equiprobabili. La probabilit'a cercata coincide con quella dei seguenti eventi

   $$(1, 5, 6)\ (2, 4, 6)\ (3, 3, 6)\ (4, 2, 6)\ (5, 1, 6)$$

   ognuno dei quali ha probabilità $1/6^3$. Poichè i cinque eventi sono mutuamente esclusivi la probabilità dell'evento unione è la somma delle singole probabilità, pari a 5/216.

3. In una una scuola superiore si deve scegliere uno studente tra quelli delle sezioni A o B. Il numero di studenti della sezione A è il doppio di quelli della sezione B mentre il numero delle ragazze è uguale al numero dei ragazzi nella sezione A mentre è pari al 60% nella sezione B. Tutti i ragazzi hanno la stessa possibilità di essere scelti. Sapendo che è stata scelta una ragazza calcolare la probabilità che sia della sezione A.

`Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Il ragazzo prescelto appartiene alla sezione } A\} \\ B &= \{\text{Il ragazzo prescelto appartiene alla sezione } B\} \\ R &= \left\{\text{È stata scelta una ragazza}\right\}. \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$P(A) = \frac{2}{3}, \qquad P(B) = \frac{1}{3},$$
$$P(R/A) = \frac{1}{2}, \qquad P(R/B) = \frac{3}{5}.$$

Applicando il teorema della probabilità totale troviamo

$$P(R) = P(R/A)P(A) + P(R/B)P(B) = \frac{8}{15}.$$

Applicando il Teorema di Bayes determiniamo la probabilità richiesta

$$P(A/R) = \frac{P(R/A)P(A)}{P(R)} = \frac{5}{8}.$$

4. Sia X una variabile aleatoria normale $N(0, \sigma^2)$ calcolare il valore della varianza sapendo che $P(X \geq 1) = 0.4$.

   `Svolgimento.`

$$P(X \geq 1) = 0.4$$
$$P(X \leq 1) = 0.6$$
$$P\left(\frac{X}{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0.6$$

   risulta

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.6,$$

   quindi consultando la tabella troviamo

$$\frac{1}{\sigma} = 0.255$$

   e $\sigma^2 \simeq 15.38$.

5. Assegnato il seguente campione di dati

20	32	14	26	38	33	12	30	31
17	19	20	16	22	26	35	16	25

calcolare i quartili Q_1, Q_2 e Q_3.

`Svolgimento.` Innanzitutto osserviamo che $n = 18$ e procediamo ad ordinare il campione

$$\begin{array}{ccccccccc} 12 & 14 & 16 & 16 & 17 & 19 & 20 & 20 & 22 \\ 25 & 26 & 26 & 30 & 31 & 32 & 33 & 35 & 38 \end{array}$$

Calcoliamo quindi i tre quartili richiesti

$$\frac{18+1}{4} = 4 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_4(1-0.75) + x_5(0.75) = 16.75$$

$$Q_2 = x_9(1-0.5) + x_{10}(0.5) = 23.5$$

$$\frac{3(18+1)}{4} = 14 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_{14}(1-0.25) + x_{15}(0.25) = 31.25.$$

6. Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la varianza σ^2 di un campione aleatorio di ampiezza 25 estratto da una popolazione con densità Normale e varianza campionaria $S^2 = 3$.

   `Svolgimento.` In questo caso dobbiamo sfruttare il fatto che la statistica $(n-1)S^2/\sigma^2$ è una variabile aleatoria di tipo χ^2_{n-1} con $n - 1 = 24$ gradi di libertà ed $\alpha = 0.01$.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{24 \cdot 3}{\chi^2_{0.005,24}} \le \sigma^2 \le \frac{24 \cdot 3}{\chi^2_{0.995,24}}$$

   consultando le tabelle si trova

$$\frac{24 \cdot 3}{45.559} \le \sigma^2 \le \frac{24 \cdot 3}{9.886}$$

$$1.58 \le \sigma^2 \le 7.283.$$

7. Si ipotizza che l'età media dei frequentatori di una biblioteca sia 39 anni con una deviazione standard $\sigma = 10.2$ anni. Per verificare tale ipotesi vengono campionati 100 frequentatori e la loro età media risulta essere 41 anni. Si verifichi l'ipotesi $\mu = 39$ ad un livello di significatività del 10%.

   `Svolgimento.` Definiamo le due ipotesi

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 39 \\ H_1 &: \mu \neq 39. \end{aligned}$$

   I dati del problema sono

$$n = 100, \qquad \overline{X} = 41, \qquad \sigma = 10.2, \qquad \alpha = 0.1.$$

In questo caso si deve utilizzare la statistica $Z = (\overline{X} - \mu)/\sigma/\sqrt{n}$ in quanto è nota la deviazione standard σ. Per determinare la regione di accettazione dobbiamo calcolare il quantile gaussiano $z_{\alpha/2} = z_{0.05}$

$$z_{0.05} = 1.645$$

quindi la regione di accettazione è $[-1.645, 1.645]$.
Calcoliamo ora il valore assunto nei dati dalla statistica Z

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{41 - 39}{10.2/10} = 1.9607.$$

L'ipotesi nulla è rigettata con un rischio del 10%.

Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
Appello di Aprile 2019

Risolvere, a scelta, 5 dei seguenti quesiti, indicando sulla traccia i quesiti svolti.

1. Due eventi A e B sono tali che $P(A \cup B) = 5/9$, mentre $P(A) = P(B) = 1/3$. Mostrare che A e B sono eventi indipendenti.

   `Svolgimento.` Vedere primo esercizio del I appello di Febbraio 2019.

2. Si consideri l'esperimento casuale consistente nel lancio di una coppia di dadi non truccati ed il relativo spazio campione S. Indicato con (i, j) il generico evento elementare appartenente ad S si definisca la seguente variabile aleatoria discreta

   $$X(i, j) = |i - j|.$$

   Determinare il range e la densità di probabilità di X.

   `Svolgimento.` Il range di X, ovvero l'insieme dei valori che può assumere è:

   $$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

   Identifichiamo gli eventi equivalenti e la densità di probabilità

   $$\begin{array}{ll}
   \{X = 0\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} & P(X = 0) = 6/36 \\
   \{X = 1\} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6)(6,5)\} & P(X = 1) = 10/36 \\
   \{X = 2\} = \{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\} & P(X = 2) = 8/36 \\
   \{X = 3\} = \{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3)\} & P(X = 3) = 6/36 \\
   \{X = 4\} = \{(1,5),(5,1),(2,6),(5,2)\} & P(X = 4) = 4/36 \\
   \{X = 5\} = \{(1,6),(6,1)\} & P(X = 5) = 2/36
   \end{array}$$

3. Una moneta è truccata in modo tale che la probabilità che esca testa è pari a p, mentre la probabilità che esca croce è pari a $1 - p$, $p \neq 1/2$. Si lancia questa moneta e, se esce testa, viene lanciata nuovamente la stessa moneta, mentre, se esce croce, viene lanciata un'altra moneta, non truccata (cioè tale che la probabilità che esca testa sia uguale a quella che esca croce).
   a) Calcolare la probabilità che in questo secondo lancio esca testa.
   b) Determinare il valore di p che rende minima la probabilità trovata al punto a).

   `Svolgimento.` a) Definiamo i seguenti eventi:

   $$\begin{aligned} A &= \{\text{Al primo lancio esce testa}\} \\ T &= \{\text{Al secondo lancio esce testa}\}. \end{aligned}$$

   Risulta

   $$P(A) = p, \qquad P(\overline{A}) = 1 - p,$$

inotre

$$P(T/A) = p, \qquad p(T/\overline{A}) = \frac{1}{2}.$$

Applicando il teorema della probabilità totale troviamo

$$P(T) = P(T/A)P(A) + P(T/\overline{A})P(\overline{A}) = p^2 + \frac{1}{2}(1-p).$$

b) Per trovare il valore di p che rende minima $P(T)$ basta calcolare la derivata prima rispetto a p e porla uguale a zero:

$$2p - \frac{1}{2} = 0,$$

trovando $p = 1/4$.

4. In un determinato ospedale il numero X di bambini che nascono in una settimana è una variabile aleatoria di Poisson con parametro $\lambda = 13$. Qual è la probabilità che in una settimana nascano 2 o più bambini?

`Svolgimento.` La variabile aleatoria ha la seguente densità di probabilità

$$P(X = k) = e^{-13}\frac{13^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = \\ &= 1 - e^{-13} - e^{-13}13 \simeq 0.999973. \end{aligned}$$

5. Sia X una variabile aleatoria caratterizzata dalla funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quale deve essere il valore della costante a affinchè la funzione $f(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità? Calcolare valore atteso e deviazione standard di X.

`Svolgimento.` La variabile aleatoria X è continua quindi dobbiamo imporre che l'integrale di $f(x)$ sia 1.

$$\int_1^e \frac{a}{2x}\,dx = \left[a\frac{\log x}{2}\right]_1^e = \frac{a}{2}$$

quindi $a = 2$ ed $f(x) = 1/x$ se $1 \leq x \leq e$ e zero altrove.

$$E(x) = \int_1^e \frac{x}{x}\,dx = e - 1.$$

$$E(x^2) = \int_1^e x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e-1)^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1 - 2e^2 + 4e - 2\right) \simeq 0.2429$$

quindi

$$\sigma \simeq 0.4920.$$

6. Determinare un intervallo di confidenza a due lati al 99% per il valore atteso μ di un campione aleatorio di ampiezza 100 estratto da una popolazione con media campionaria $\overline{X} = 6$ e varianza $\sigma^2 = 16$. Determinare l'ampiezza del campione aleatorio volendo ottenere un intervallo di confidenza al 90% della stessa lunghezza e supponendo invariata sia la media campionaria $\overline{X}$ che la varianza σ^2.

   `Svolgimento.` Essendo nota la varianza possiamo utilizzare la statistica Z che ha distribuzione normale standard. I dati sono

   $$\alpha = 0.01, \quad n = 100, \qquad \overline{X} = 6, \qquad \sigma^2 = 16.$$

   Il valore $\alpha/2$ è 0.005 quindi consultando le tabelle dobbiamo trovare il quantile Gaussiano $z_{0.005}$:

   $$z_{0.005} = 2.576.$$

   L'intervallo risulta

   $$\overline{X} - 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 2.576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   $$6 - 2.576\frac{4}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 6 + 2.576\frac{4}{\sqrt{10}}$$

   $$4.9696 \leq \mu \leq 7.0304,$$

   la cui ampiezza è 2.0608.
   Se $\alpha = 0.1$ allora $\alpha/2 = 0.05$ consultando le tabelle dobbiamo trovare il quantile Gaussiano $z_{0.05}$:

   $$z_{0.05} = 1.645.$$

   In questo caso bisogna imporre che l'ampiezza dell'intervallo, ovvero

   $$2z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13.16\frac{1}{\sqrt{n}}$$

   deve essere uguale a 2.0608.

   $$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2.0608}{13.16}$$

   trovando $n = 41$.

7. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione aleatorio di tipo normale con parametri $(0, \sigma^2)$. Determinare la stima di massima verosimiglianza per la varianza.

   `Svolgimento.` Consultare le dispense la dimostrazione è riportata nel paragrafo delle stime di massima verosimiglianza (capitolo 5) per le variabili di tipo Gaussiano ponendo $\mu = 0$.

Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
Appello di Giugno 2019

1. Un'urna contiene 21 palline ciascuna recante una delle 21 lettere dell'alfabeto latino (sono quindi escluse le lettere J, K, W, X e Y). Calcolare la probabilità che, estraendo 3 palline (in blocco e senza reimmissione), escano:
a) le 3 lettere che compongono la parola UNO;
b) 3 consonanti.

`Svolgimento.` a) Avendo 21 lettere a disposizione il numero di parole da tre lettere (diverse) che si possono comporre è pari al numero di combinazioni

$$C_{21,3} = \binom{21}{3} = \frac{21!}{3!\ 18!} = 1330$$

Di tutte queste possibili combinazioni solo una coincide con la parola UNO quindi la probabilità cercata

$$p = \frac{1}{1330}.$$

b) In questo caso il numero di possibili parole è sempre pari a 1330 mentre $C_{16,3}$ sono i gruppi che è possibile comporre con le 15 consonanti prese a gruppi di tre,

$$C_{16,3} = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\ 13!} = 560$$

quindi la probabilità cercata è il rapporto tra tali numeri, quindi

$$p = \frac{560}{1330} \simeq 0.42.$$

2. Risolvere gli stessi quesiti dell'esercizio precedente supponendo però che le 3 palline siano estratte una alla volta e senza reimmissione.

`Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} U &= \{\text{La prima lettera estratta è la U}\} \\ N &= \{\text{La seconda lettera estratta è la N}\} \\ O &= \{\text{La terza Lettera estratta è la O}\}. \end{aligned}$$

La probabilità cercata è $P(O \cap N \cap U)$. Applicando la proprietà che lega l'evento intersezione e l'evento condizionato possiamo scrivere

$$P(O \cap N \cap U) = P(O/N \cap U)P(N \cap U) = P(O/N \cap U)P(N/U)P(U).$$

Nota la successione dei tre eventi si determinano facilmente le probabilità presenti nell'ultima relazione

$$P(U) = \frac{1}{21}, \qquad P(N/U) = \frac{1}{20}, \qquad P(O/N \cap U) = \frac{1}{19}$$

che consentono di ottenere il valore cercato

$$P(O \cap N \cap U) = \frac{1}{21}\frac{1}{20}\frac{1}{19} = \frac{1}{7980}.$$

Per il secondo quesito si procede in modo analogo definendo gli eventi

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\text{La prima lettera estratta è una consonante}\} \\ C_2 &= \{\text{La seconda lettera estratta è una consonante}\} \\ C_3 &= \{\text{La terza Lettera estratta è una consonante}\}. \end{aligned}$$

Ripetendo hli stessi passaggi determiniamo:

$$P(C_1) = \frac{16}{21}, \qquad P(C_2/C_1) = \frac{15}{20}, \qquad P(C_3/C_2 \cap C_1) = \frac{14}{19}$$

$$P(C_3 \cap C_2 \cap C_1) = \frac{16}{21}\frac{15}{20}\frac{14}{19} = \frac{3360}{7980} \simeq 0.42.$$

3. In una popolazione ci sono il 50% di maschi e il 50% di femmine. Supponiamo che il 5% degli uomini e il 10% delle donne siano daltonici (non riconoscono i colori). Si sceglie a caso una persona daltonica. Qual è la probabilità che sia un maschio?

   `Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} M &= \{\text{La persona scelta è un maschio}\} \\ F &= \{\text{La persona scelta è una femmina}\} \\ D &= \{\text{La persona scelta è daltonica}\} \end{aligned}$$

   risulta

$$P(M) = P(F) = \frac{1}{2}$$

$$P(D/M) = 0.05 = \frac{1}{20}; \qquad P(D/F) = 0.1 = \frac{1}{10}.$$

   Ricaviamo $P(D)$ applicando il teorema della probabilità totale

$$P(D) = P(D/M)P(M) + P(D/F)P(F) = \frac{3}{40}.$$

   Applicando il teorema di Bayes possiamo calcolare $P(M/D)$:

$$P(M/D) = \frac{P(D/M)P(M)}{P(D)} = \frac{1}{20}\frac{1}{2}\frac{40}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. Il numero di volte che uno studente sostiene l'esame di calcolo delle probabilità e statistica è una variabile aleatoria discreta X con densità

$$P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 2) = 0.25, \quad P(X = 3) = 0.15, \quad P(X = 4) = 0.1.$$

Calcolare la probabilità che uno studente:
a) sostenga l'esame più di una volta.
b) sostenga l'esame almeno 2 volte.
c) sostenga l'esame al massimo 2 volte.

`Svolgimento.`

$$\begin{array}{ll} P(X > 1) & = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.5 \\ P(X \geq 2) & = 0.5 \\ P(X \leq 2) & = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.75 \end{array}$$

5. Per 20 giorni un pendolare ha registrato i minuti di ritardo del treno per arrivare a Bari, ottenendo la seguente sequenza

28 15 13 12 17 12 14 15 4 12 13 8 9 26 17 16 0 19 14 38

Individuare la presenza di eventuali dati anomali o sospetti.

`Svolgimento.` Innanzitutto è necessario ordinare in modo crescente i dati registrati

0 4 8 9 12 12 12 13 13 14 14 15 15 16 17 17 19 26 28 38

Determiniamo il primo ed il terzo quartile e l'IQR, ponendo $n = 20$, risulta

$$\frac{20+1}{4} = 5 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_5(1 - 0.25) + x_6(0.25) = 12$$

$$\frac{3(20+1)}{4} = 15 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_{15}(1 - 0.75) + x_{16}(0.75) = 17$$

$$IQR = 17 - 12 = 5.$$

I dati compresi nelle regioni

$$[Q_1 - 3\ IQR, Q_1 - 1.5\ IQR] \equiv [-3, 4.5], \qquad [Q_1 + 1.5\ IQR, Q_1 + 3\ IQR] \equiv [24.5, 32]$$

sono sospetti mentre quelli che superiori a 32 sono anomali (non si sono dati negativi).

6. Un commercialista afferma di poter completare una dichiarazione dei redditi standard in meno di un'ora. Per un campione di 50 dichiarazioni, il commercialista impiega una media $\overline{X}$ di 62.2 minuti con una deviazione standard di $\sigma = 7.7$ minuti. Calcolare il $p-$value

volendo testare l'ipotesi nulla $\mu \leq 60$.
`Svolgimento.` Le ipotesi nulla e alternativa sono:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \leq 60 \\ H_1 &: \mu > 60. \end{aligned}$$

Poichè è nota la deviazione standard σ ed n è sufficientemente grande possiamo usare la statistica $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$, calcoliamo pertanto il valore di Z nel caso specifico

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{62.2 - 60}{7.7/\sqrt{50}} = 2.02.$$

In base all'ipotesi alternativa $\mu > 60$ il $p-$value è

$$p = 1 - \Phi(2.02) = 1 - 0.97831 = 0.02169.$$

Per livelli di significatività superiori a p l'ipotesi nulla sarebbe rigettata.

7. Si supponga che il tempo trascorso dai clienti in un negozio sia una variabile aleatoria con densità normale con media incognita e deviazione standard $\sigma = 8$ minuti. Si supponga di aver stimato il tempo medio della popolazione tramite un intervallo di confidenza al 95% e di aver ottenuto il seguente risultato: $[22.06, 26.94]$. Qual è stata la dimensione del campione necessaria ad ottenere il precedente intervallo di confidenza?

   `Svolgimento.` L'ampiezza dell'intervallo di confidenza per il valore atteso è

   $$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

   In questo caso $\alpha = 0.05$ quindi consultando la tabella dei quantili gaussiani si trova

   $$z_{0.95} = 1.96$$

   quindi per trovare il valore di n si deve risolvere l'equazione

   $$2\ 1.96\frac{8}{\sqrt{n}} = 26.96 - 22.06 = 4.88$$

   da cui si ricava il valore approssimato $n \simeq 41$.

Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
Appello di Luglio 2019

1. Siano A e B eventi di uno stesso spazio campione. Noto che $P(B) = 1/4$, $P(A/B) = 1/6$, $P(A/\overline{B}) = 1/3$, calcolare $P(A)$ e $P(B/A)$.

   `Svolgimento.` Applicando il teorema della probabilità totale abbiamo

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) = \frac{7}{24}.$$

   Applicando il teorema di Bayes

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{1}{7}.$$

2. Una variabile aleatoria X può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Sapendo che X ha la stessa probabilità di assumere i valori $1, 2, 3, 4$ e che $E(X) = 1.5$, determinare $P(X = 0)$.

   `Svolgimento.` Poniamo

$$x = P(X = i), \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

   e imponiamo che $E(X) = 1.5$:

$$1.5 = x + 2x + 3x + 4x$$

   da cui si ricava $x = 0.15$. Poichè la somma delle probabilità deve essere 1 troviamo

$$P(X = 0) = 1 - 4\ (0.15) = 0.4.$$

3. Una variabile aleatoria bidimensionale (X, Y) di tipo discreto è equidistribuita nelle sei coppie $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$, e $(1, 1)$.

   a) Calcolare le densità di probabilità marginali di X e Y.

   b) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Z = X - Y$.

   `Svolgimento.` a) Riportiamo i valori nella tabella

X \ Y	-1	1
-1	$1/6$	$1/6$
0	$1/6$	$1/6$
1	$1/6$	$1/6$

Le densità di probabilità marginali si ottengono sommando le probabilità lungo le righe e lungo le colonne

$$P(X=-1)=\frac{1}{3}, \qquad P(X=0)=\frac{1}{3}, \qquad P(X=1)=\frac{1}{3},$$

$$P(Y=-1)=\frac{1}{2}, \qquad P(Y=1)=\frac{1}{2}.$$

b) Se $Z = X - Y$ allora

$$Z=\{-2,-1,0,1,2\}$$

$$P(Z=-2)=\frac{1}{6}, \qquad P(Z=-1)=\frac{1}{6}, \qquad P(Z=0)=\frac{1}{3},$$

$$P(Z=1)=\frac{1}{6}, \qquad P(Z=2)=\frac{1}{6}.$$

4. Un'urna contiene 25 palle numerate da 1 a 25. Si estrae una palla a caso. Sia X la variabile aleatoria che assegna ad ogni palla la somma delle cifre del numero riportato su di essa. Determinare la funzione di densità di probabilità ed il valore atteso di X.

   `Svolgimento.` La variabile X può assumere i seguenti valori

   $$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

   Ogni pallina ha probabilità $1/25$ di essere estratta quindi per determinare le probabilità vanno identificati gli eventi equivalenti legati al numero della pallina estratta ed al valore di X. Per comodità li riportiamo in una tabella

X	palline estratte	probabilità
1	1,10	2/25
2	2,11,20	3/25
3	3,12,21	3/25
4	4,13,22	3/25
5	5,14,23	3/25
6	6,15,24	3/25
7	7,16,25	3/25
8	8,17	2/25
9	9,18	2/25
10	19	1/25

   Calcolando il valore atteso si trova

   $$E(X)=5.08.$$

5. Un'azienda ha commissionato ad una società di software la riprogettazione del proprio sito web. Dopo che quest'ultimo è stato messo on-line vuole studiare gli effetti del rinnovo esaminando il numero di contatti giornaliero al sito. Sotto l'ipotesi che tali contatti abbiano densità normale $N(\mu, \sigma^2)$, viene selezionato un campione casuale di 10 giorni in cui il numero di contatti ha avuto media $\overline{X} = 545$ e deviazione standard campionaria $S = 271$. Costruire un intervallo di confidenza (a due lati) per il valore atteso μ, fissando $\alpha = 0.05$.

   `Svolgimento.` Non essendo nota la deviazione standard σ dobbiamo utilizzare la statistica $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ ha densità $t-$Student con $n - 1 = 9$ gradi di libertà, in quanto il valore di n non è sufficientemente grande.

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$\overline{X} - t_{0.032,9}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{0.025,9}\frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$545 - 2.2622\frac{271}{\sqrt{10}} \le \mu \le 545 - 2.2622\frac{271}{\sqrt{10}}$$
$$351.13 \le \mu \le 738.87.$$

6. Un arciere afferma di poter scagliare una freccia contro un bersaglio di forma circolare e di colpire il centro ad una distanza media inferiore ad 1 centimentro. Si sottoponga a test l'ipotesi nulla $\mu \le 1$ al 90% sapendo che, in 40 tiri, la distanza media è stata di 1.1 centimetri con deviazione standard $S = 0.15$ centimetri.

   `Svolgimento.` Definiamo le due ipotesi

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \le 1 \\ H_1 &: \mu > 1. \end{aligned}$$

   I dati del problema sono

$$n = 40, \qquad \overline{X} = 1.1, \qquad S = 0.15, \qquad \alpha = 0.1.$$

   In questo caso si deve utilizzare la statistica $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ (che ha densità normale standard in quanto l'ampiezza del campione è sufficientemente grande, ovvero superiore a 30) in quanto non è nota la deviazione standard σ. Per determinare la regione di accettazione dobbiamo calcolare il quantile gaussiano $z_{0.1}$

$$z_{0.10} = 1.282$$

   quindi la regione di accettazione è $[-\infty, 1.282]$.
   Calcoliamo ora il valore assunto nei dati dalla statistica T

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{1.1 - 1}{0.15/\sqrt{40}} = 4.22.$$

   L'ipotesi nulla è rigettata con un rischio del 10%.

7. Calcolare i coefficienti della retta di regressione che approssima i seguenti valori

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	2	1	0	-1

`Svolgimento.` Le formule dei coefficienti della retta di regressione sono

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}, \qquad \beta = \overline{y} - \alpha\overline{x}.$$

Risulta

$$\sum x_i y_i = -10, \qquad \sum x_i^2 = 10 \qquad \overline{x} = 0, \qquad \overline{y} = 1,$$

pertanto

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 1.$$

Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
I Appello di Settembre 2019

Risolvere, a scelta, 5 dei seguenti quesiti, indicando sulla traccia i quesiti svolti.

1. Siano A e B due eventi tali che $P(A) = P(B) = 2/3$. Dire se si è in grado di stabilire se A e B siano mutuamente esclusivi, giustificando la risposta.

   `Svolgimento.` Se A e B fossero mutuamente esclusivi sarebbe
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{3} > 1,$$
   e questo ovviamente non è possibile. Quindi concludendo A e B non possono essere mutuamente esclusivi.

2. Abbiamo due dadi truccati di cui il primo ha la faccia 1 che compare due volte e manca la faccia 6 mentre il secondo ha la faccia 6 che compare due volte e manca la faccia 1. Si descriva lo spazio campione dell'esperimento casuale consistente nel lancio contemporaneo dei due dadi e si calcolino le probabilità degli eventi elementari.

   `Svolgimento.` Lo spazio campione dell'esperimento è il seguente
   $$S = \{(i,j), i, j, \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 5, 2 \leq j \leq 6\}.$$
   Per quello che riguarda le probabilità degli eventi elementari risulta molto più conveniente riportarle in una tabella

j / i	2	3	4	5	6
1	2/36	2/36	2/36	2/36	4/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36

3. Una fabbrica, che indichiamo con A, produce 100 elettrodomestici al giorno dei quali un prodotto risulta essere difettoso con probabilità 1/20. Una seconda fabbrica, che indichiamo con B, produce 300 elettrodomestici al giorno dei quali un prodotto risulta essere difettoso con probabilità incognita p. Determinare p sapendo che, preso a caso un elettrodomestico prodotto in un giorno, la probabilità che sia difettoso è pari a 1/40.

   `Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi:
   $$\begin{aligned} A &= \{\text{L'elettrodomestico è prodotto dalla fabbrica } A\} \\ B &= \{\text{L'elettrodomestico è prodotto dalla fabbrica } B\} \\ D &= \{\text{L'elettrodomestico è difettoso}\}. \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$P(A) = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{3}{4}, \qquad P(D) = \frac{1}{40}$$

$$P(D/A) = \frac{1}{20}, \qquad P(B) = p.$$

Applicando il teorema della probabilità totale risulta

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B)$$

ovvero

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{20}\,\frac{1}{4} + p\frac{3}{4}$$

da cui si ricava

$$p = \frac{1}{60}.$$

4. All'arrivo nell'aeroporto internazionale di Bari, i passeggeri transitano per la dogana alla media di 2 ogni 30 secondi. Assumendo che il numero dei passeggeri che attraversano la dogana in un dato intervallo di tempo sia una variabile aleatoria con densità di Poisson, determinare la probabilità che non più di 2 passeggeri abbiano attraversato la dogana, sempre in un periodo di 30 secondi.
`Svolgimento.` La densità di probabilità di una variabile aleatoria di Poisson è

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

In questo caso $\lambda = 2$. La probabilità richiesta è $P(X \leq 2)$, pertanto

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = P(X = 2) \\ &= e^{-2} + e^{-2}\ 2 + e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 5e^{-2} \simeq 0.677. \end{aligned}$$

5. Dimostrare che, assegnato un campione aleatorio $X_1, X_2, \ldots, X_n$ avente densità di Poisson con parametro λ, la stima di massima verosimiglianza per λ coincide con $\overline{X}$.

   `Svolgimento.` La dimostrazione è riportata nelle dispense nel paragrafo del Capitolo 5 riguardante le stime di massima verosimiglianza.

6. Determinare un intervallo di confidenza al 90% per la varianza σ^2 di un campione aleatorio di ampiezza 30 estratto da una popolazione con densità Normale e varianza campionaria $S^2 = 2$.

   `Svolgimento.` In questo caso dobbiamo sfruttare il fatto che la statistica $(n-1)S^2/\sigma^2$ è una variabile aleatoria di tipo χ^2_{n-1} con $n - 1 = 29$ gradi di libertà ed $\alpha = 0.10$.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{29 \cdot 2}{\chi^2_{0.05,29}} \le \sigma^2 \le \frac{29 \cdot 2}{\chi^2_{0.95,29}}$$

consultando le tabelle si trova

$$\frac{29 \cdot 2}{42.557} \le \sigma^2 \le \frac{29 \cdot 2}{17.708}$$

$$1.363 \le \sigma^2 \le 3.275.$$

7. Tracciare il diagramma box-plot del seguente campione di dati

$$25 \quad 7 \quad 0 \quad 10 \quad 18 \quad 3 \quad 9 \quad 12 \quad 6 \quad 11 \quad 20 \quad 5 \quad 15 \quad 13 \quad 4$$

`Svolgimento.` Innanzitutto osserviamo che $n = 14$ e procediamo ad ordinare il campione

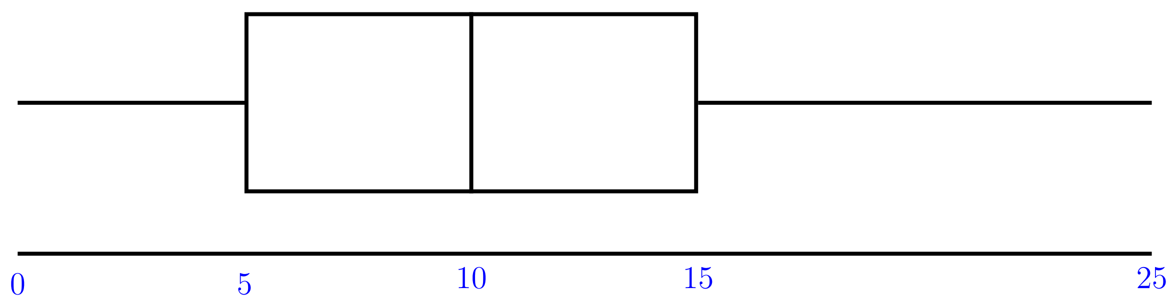
$$0 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 15 \quad 18 \quad 20 \quad 25$$

Per tracciare il diagramma box-plot dobbiamo calcolare i tre quartili Q_1, Q_2, Q_3

$$\frac{15+1}{4} = 4 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_4 = 5$$

$$Q_2 = x_8 = 10$$

$$\frac{3(15+1)}{4} = 12 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_{12} = 15$$



Esame Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
(Laurea in Ingegneria Gestionale)
II Appello di Settembre 2019

Risolvere, a scelta, 5 dei seguenti quesiti, indicando sulla traccia i quesiti svolti.

1. Due eventi A e B sono tali che $P(A) = P(B) = 3/8$, e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/2$. Calcolare $P(A \cap B)$.

   `Svolgimento.` Ricordiamo che
   $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
   quindi
   $$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{2}.$$
   Dalla relazione
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
   segue
   $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4}.$$

2. Abbiamo due monete distinte, che indichiamo con A e B. La moneta A è regolare (ovvero le probabilità di ottenere testa o croce sono uguali), mentre la moneta B è **truccata**, infatti la probabilità di ottenere testa vale 0.7. Scegliamo una delle due monete a caso e la lanciamo.
   a) Qual è la probabilità di ottenere testa?
   b) Se otteniamo testa, qual è la probabilità che la moneta lanciata sia stata A?

   `Svolgimento.` Definiamo i seguenti eventi
   $$\begin{aligned} A &= \{\text{La moneta scelta è la } A\} \\ B &= \{\text{La moneta scelta è la } B\} \\ T &= \{\text{Si ottiene testa}\}. \end{aligned}$$
   a) Conosciamo le seguenti probabilità
   $$P(A) = P(B)\frac{1}{2}, \quad P(T/B) = \frac{7}{10}, \quad P(T/A) = \frac{1}{2}.$$
   Applicando il teorema della probabilità totale troviamo
   $$P(T) = P(T/A)P(A) + P(T/B)P(B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{20} = \frac{3}{5}.$$
   Per il quesito b) applichiamo il Teorema di Bayes
   $$P(A/T) = \frac{P(T/A)P(A)}{P(T)} = \frac{5}{12}.$$

3. Una variabile aleatoria X di tipo continuo ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

   a) Mostrare che f è definita correttamente.
   b) Calcolare $E(X)$.

`Svolgimento.`
a) Innanzitutto osserviamo che se $x \geq -1$ allora $f(x) \geq 0$, quindi la prima condizione è verificata. La seconda condizione è che l'integrale di $f(x)$ tra -1 e 1 sia uguale a 1. Osserviamo che l'area sottesa al grafico della funzione è un triangolo rettangolo con base il segmento $[-1, 1]$ e altezza pari al segmento congiungente i punti $(1, 0)$ $(1, 1)$, quindi si verifica molto banalmente che anche la seconda condizione è verificata.
b) Calcoliamo il valore atteso applicando la definizione

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\ dx \ = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

4. Sia X una variabile aleatoria con densità di tipo normale con parametri (μ, σ^2), calcolare la probabilità che X sia compresa tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$, ovvero $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

`Svolgimento.` Per determinare la probabilità richiesta bisogna standardizzare la variabile aleatoria

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= P\left(-3 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973. \end{aligned}$$

5. Calcolare i quantili Q_1, Q_2 e Q_3 del seguente insieme di dati:

$$-5 \quad -4 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 0 \quad 3 \quad 8 \quad 1$$

`Svolgimento.` Innanzitutto ordiniamo i dati in modo screscente

$$-5 \quad -4 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 8$$

Calcoliamo quindi i tre quartili richiesti, ponendo $n = 10$:

$$\frac{10+1}{4} = 2 + 0.75 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = x_2(1-0.75) + x_3(0.75) = -1$$

$$Q_2 = x_5(1-0.5) + x_6(0.5) = 2.5$$

$$\frac{3(10+1)}{4} = 8 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_3 = x_8(1-0.25) + x_9(0.25) = 4.25.$$

6. Si misura la concentrazione nel sangue di una certa sostanza in un gruppo di 50 individui, ottenendo un valore medio $\overline{X} = 7.45$ (espresso in opportune unità di misura). Si assuma che il valore atteso sia incognito μ e che la varianza sia $\sigma^2 = 3$.
   Si determini il $p-$value del test per l'ipotesi $H_0 \ : \ \mu = 6.9$.

   `Svolgimento.` In questo caso è nota la varianza della variabile aleatoria quindi dobbiamo utilizzare la statistica Z. Determiniamo il valore di Z:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.45 - 6.9}{\sqrt{3}/\sqrt{50}} = 2.245.$$

   In funzione all'ipotesi nulla il $p-$value è

$$p = 2(1 - \Phi(2.245)) = 2(1 - 98745) = 0.025.$$

   L'ipotesi nulla sarebbe accettata con livelli di significatività inferiori al 2.5%.

7. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la varianza σ^2 di un campione aleatorio di ampiezza 20 estratto da una popolazione con densità Normale e varianza campionaria $S^2 = 4$.

   `Svolgimento.` In questo caso dobbiamo sfruttare il fatto che la statistica $(n-1)S^2/\sigma^2$ è una variabile aleatoria di tipo χ^2_{n-1} con $n - 1 = 19$ gradi di libertà ed $\alpha = 0.05$.

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{19 \cdot 4}{\chi^2_{0.025,19}} \leq \sigma^2 \leq \frac{19 \cdot 4}{\chi^2_{0.975,19}}$$

   consultando le tabelle si trova

$$\frac{29 \cdot 2}{42.557} \leq \sigma^2 \leq \frac{29 \cdot 2}{17.708}$$

$$1.363 \leq \sigma^2 \leq 3.275.$$